

第一部分 习题

第一章 静电场基本规律

1. 2. 1 在真空中有两个点电荷，设其中一个所带电量是另一个的四倍，它们相距 5×10^{-2} 米时，相互排斥力为 1.6 牛顿。问它们相距 0.1 米时，排斥力是多少？两点电荷的电量各为多少？

解：设两点电荷中一个所带电量为 q ，则另一个为 $4q$ ：

$$(1) \quad \text{根据库仑定律：} \vec{F} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad \text{得：} \frac{F_1}{F_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

$$F_2 = \frac{F_1 r_1^2}{r_2^2} = \frac{1.60 \times (5 \times 10^{-2})^2}{(10^{-1})^2} = 0.4 \text{ (牛顿)}$$

$$(2) \quad F_2 = K \frac{4q^2}{r_1^2}$$

$$\therefore q = \pm \left(\frac{F_1 r_1^2}{4K} \right)^{\frac{1}{2}} = \pm \left(\frac{1.60 \times 5^2 \times 10^{-4}}{4 \times 9 \times 10^9} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \pm 3.3 \times 10^{-7} \quad (\text{库仑})$$

$$4q = \pm 1.33 \times 10^{-8} \quad (\text{库仑})$$

1. 2. 2 两个同号点电荷所带电量之和为 Q ，问它们带电量各为多少时，相互作用力最大？

解：设其中一个所带电量为 q ，则一个所带电量为

$$Q - q。$$

根据库仑定律知，相互作用力的大小：

$$F = K \frac{q(Q - q)}{r^2}$$

求 F 对 q 的极值 使 $F' = 0$

$$\text{即：} \frac{K}{r} (Q - 2q) = 0$$

$$\therefore q = \frac{1}{2} Q。$$

1. 2. 3 两个点电荷所带电量分别为 $2q$ 和 q ，相距 L ，将第三个点电荷放在何处时，它所受合力为零？

解：设第三个点电荷放在如图所示位置是，其受到的合力

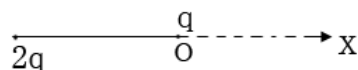


图 1. 2. 3

$$\text{即: } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q_0 q}{(L-x)^2}$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{2}{(L-x)^2} \quad \text{即: } x^2 + 2xL - L^2 = 0$$

解此方程得:

$$x = (-1 \pm \sqrt{2})L \quad (x \text{ 是到 } q_0 \text{ 的 } q \text{ 距离})$$

(1) 当 $x = (\sqrt{2} - 1)L$ 时, $x > 0$ 为所求答案。

(2) 当 $x = (-\sqrt{2} - 1)L$ 时, $x < 0$ 不合题意, 舍去。

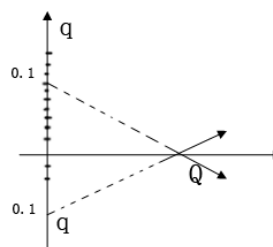
1. 2. 4 在直角坐标系中, 在 $(0, 0.1)$, $(0, -0.1)$ 的两个位置上分别放有电量为 $q = 10^{-10}$ (库) 的点电荷, 在 $(0.2, 0)$ 的位置上放有一电量为 $Q = 10^{-8}$ (库) 的点电荷, 求 Q 所受力的大小和方向? (坐标的单位是米)

解: 根据库仑定律知:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= K \frac{q_1 Q}{r_1^2} \hat{r}_1 \\ &= K \frac{q_1 Q}{r_1^2} (\cos \alpha_1 \hat{i} - \sin \alpha_1 \hat{j}) \\ &= \frac{9 \times 10^9 \times 10^{-10} \times 10^{-8}}{0.1^2 + 0.2^2} \left[\frac{0.2 \hat{i}}{(0.1^2 + 0.2^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{-0.1 \hat{j}}{(0.1^2 + 0.2^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \\ &= 1.61 \times 10^{-7} \hat{i} - 8.0 \times 10^{-8} \hat{j} \end{aligned}$$

如图所示, 其中 $\cos \alpha_1 = \frac{x_1}{(x_1^2 + y_1^2)^{\frac{1}{2}}}$

$$\sin \alpha_1 = \frac{y_1}{(x_1^2 + y_1^2)^{\frac{1}{2}}}$$



$$\text{同理: } \vec{F}_2 = K \frac{q_1 Q}{r_2^2} \times (\cos \alpha_2 \hat{i} + \sin \alpha_2 \hat{j})$$

$$= \frac{9 \times 10^9 \times 10^{-10} \times 10^{-8}}{0.1^2 + 0.2^2} \times \left[\frac{0.2 \hat{i}}{(0.1^2 + 0.2^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{-0.1 \hat{j}}{(0.1^2 + 0.2^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$=1.61 \times 10^{-7} \hat{i} - 8.0 \times 10^{-8} \hat{j}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 3.22 \times 10^{-7} \hat{i} (\text{牛顿})$$

1. 2. 5 在正方形的顶点上各放一电量相等的同性点电荷 q 。

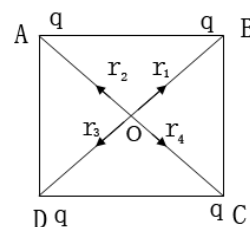
(1) 证明放在正方形中心的任意电量的点电荷所受的力为零；

(2) 若在中心放一点电荷 Q ，使顶点上每个电荷受到的合力恰为零，求 Q 与 q 的关系。

证：

(1) 如图 (a)，设正方形每边长为 a ，中心所放的点电荷的电量 Q 。由库仑定律及迭加原理得：

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{合}} &= \vec{F}_{BO} + \vec{F}_{DO} + \vec{F}_{AO} + \vec{F}_{CO} \\ &= kQq \left[\frac{\hat{r}_{BO}}{r_{BO}^2} + \frac{\hat{r}_{DO}}{r_{DO}^2} + \frac{\hat{r}_{AO}}{r_{AO}^2} + \frac{\hat{r}_{CO}}{r_{CO}^2} \right] \\ &= \frac{2kQq}{a^2} (\hat{r}_{BO} + \hat{r}_{DO} + \hat{r}_{AO} + \hat{r}_{CO}) = 0\end{aligned}$$



$$\text{其中： } r_{BO} = r_{AO} = r_{CO} = r_{DO} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$\hat{r}_{BO} = -\hat{r}_{DO}, \hat{r}_{AO} = -\hat{r}_{CO}$$

在证明过程中可看出：放在正方形中心的点电荷不论其电量为何值，它所受的力均为零。

(2) 讨论 B 点的电荷所受的力：

设 A, O, C, D 点的点电荷对 B 点的电荷 q 的作用力分别为： $\vec{F}_A, \vec{F}_O, \vec{F}_C, \vec{F}_D$

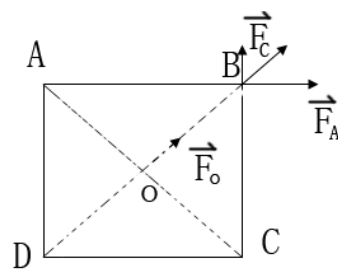
$$\text{如图所示： } \vec{F}_A = \frac{Kq^2}{a^2} \hat{r}_A \quad \vec{F}_C = \frac{Kq^2}{a^2} \hat{r}_C$$

$$\vec{F}_D = \frac{Kq^2}{2a^2} \hat{r}_D = \frac{Kq^2}{2a^2} (\cos 45^\circ \hat{r}_A + \sin 45^\circ \hat{r}_C)$$

$$= \frac{\sqrt{2}Kq^2}{4a^2} (\hat{r}_A + \hat{r}_C)$$

$$\vec{F}_O = \frac{2KQq^2}{a^2} \hat{r}_O = \frac{\sqrt{2}KQq}{a^2} (\hat{r}_A + \hat{r}_C)$$

$$\text{使 } \vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_O + \vec{F}_C + \vec{F}_D$$



$$= \left(\frac{Kq^2}{a^2} + \frac{\sqrt{2}Kq^2}{4a^2} + \frac{\sqrt{2}KQq}{a^2} \right) \times (\hat{r}_A + \hat{r}_C) = 0$$

$$\text{即使: } \left(\frac{Kq^2}{a^2} + \frac{\sqrt{2}Kq^2}{4a^2} + \frac{\sqrt{2}KQq}{a^2} \right) = 0$$

$$\therefore Q = - \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) q$$

1. 2. 6 两电量相等的同性点电荷，在其联线的中垂面上放一点电荷，根据对称性可知，该点电荷在中垂面上受力的极大值的轨迹是一个圆，求该圆的半径。

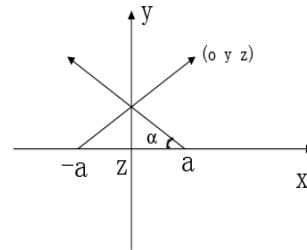
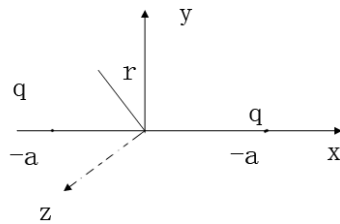
解：如图 (a)，设 x 轴上有两个点电荷，其电量均为 q，坐标分别为 (-a, 0, 0)、

(a, 0, 0)；中垂面 yoz 平面上有一点点电荷 Q，坐标为 (0, y, z)

$$\text{设 } \vec{r} = y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$r^2 = y^2 + z^2 \quad \text{即在中垂面内 Q 到坐标原点的距离。}$$

如图 (b)，根据对称性点电荷 Q 所受的合力方向与 $\vec{r}$ 方向一致，



设 (q 与 Q 同号)

$$\therefore \vec{F} = 2 \frac{kQq}{r^2 + a^2} \sin \alpha \hat{r} = \frac{2kQqr}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \hat{r}$$

求 F 对 r 的极值：

$$\left[\frac{2kQqr}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \right]' = 2kQq \left[-\frac{3r^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} + \frac{1}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \right] = 0$$

$$\text{即: } -3r^2 + (r^2 + a^2) = 0$$

$$\therefore r^2 = \frac{a^2}{2}$$

即: $y^2 + z^2 = \frac{a^2}{2}$ 是一个圆的方程。 圆心 (0, 0, 0) , 半径为

$$\frac{\sqrt{-2}}{2}a。$$

1. 3. 1 在长为 50 厘米、相距 1 厘米的两个带电平行板间的电场是匀强电场（场强方向垂直向上）。将一速度为 $v_0=10^7$ （米/秒）的电子从 M 点（距上下板等距离）水平射入电场（见图），若电子恰在平行板的边缘处离开电场，求该匀强电场的大注。（忽略边缘效应，认为板外场强为零，且略去重力对电子的影响。）

解：根据场强的定义得，电子所受的力：

$$\vec{F} = -e\vec{E}$$

电子产生一个向下的加速度：

$$a = \frac{F^-}{m} = \frac{Ee}{m}$$

设板长为 L，电子在平板间运动的时间：

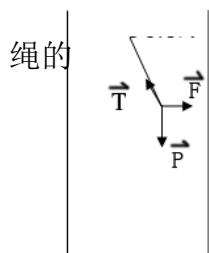
$$t = \frac{L}{v_0} = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

$$\text{即：} \quad \frac{L}{v_0} = \sqrt{\frac{2hm}{eE}}$$

$$\begin{aligned} \therefore E &= \frac{2hm v_0^2}{L^2 e} \\ &= \frac{2 \times 5 \times 10^{-3} \times 9.11 \times 10^{-31} \times 10^{14}}{25 \times 10^{-2} \times 1.6 \times 10^{-19}} \\ &= 22.8 \quad (\text{牛/库}) \end{aligned}$$

1. 3. 2 用细线悬一质量为 0.2 克的小球，将其置于两个竖直放置的平行板间（见图）。设小球带电量为 6×10^{-9} 库仑，欲使悬挂小球的细线与场强夹然成 60° 角，求两板间场强？

解：带电小球所受的电力： $\vec{F} = Q\vec{E}$ ，重力为 mg ，细



张力为 $\vec{T}$ ，根据力的平衡条件知：

$$\begin{cases} T \sin 60^\circ = mg \\ T \cos 60^\circ = QE \end{cases}$$

图 1.3 2

$$\text{即: } E = \frac{mg}{Q} \operatorname{ctg} 60^\circ$$

$$= \frac{2 \times 10^{-4} \times 9.8 \times 0.577}{6 \times 10^{-9}}$$

$$= 1.89 \times 10^5 \text{ (牛/库)}$$

1. 3. 3 有一电子射入一电场强度是 5×10^3 牛顿/库仑的均匀电场，电场的方向是竖直向上，电子的初速度是 10^7 米/秒，与水平线所夹的入射角为 30° （见图），不考虑重力对电子的影响。

(1) 求该电子上升的最大高度；

(2) 此电子回到其原来高度时的水平射程是多少？

解：

$$\vec{F} = -e\vec{E}$$

$$\text{其加速度 } \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{e\vec{E}}{m}$$

当电子上升到最大高度时： $v_{\perp} = 0$

$$\therefore v_{0\perp}^2 = (v_0 \sin 30^\circ)^2 = 2ah$$

$$\therefore h = \frac{(v_0 \sin 30^\circ)^2}{2a} = \frac{(v_0 \sin 30^\circ)^2 m}{2eE}$$

$$= \frac{(10^7 \times 0.5)^2 \times 9.1 \times 10^{-31}}{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 5 \times 10^3}$$

$$= 1.4 \times 10^{-2} \text{ (米)}$$

(2) 电子从上升到返回到原来高度时共用时间：

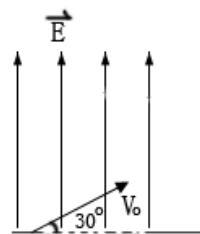
$$t = 2\sqrt{\frac{2h}{a}} = 2\sqrt{\frac{2hm}{eE}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{2 \times 1.4 \times 10^{-2} \times 9.1 \times 10^{-31}}{1.6 \times 10^{-19} \times 5 \times 10^3}}$$

$$= 1.13 \times 10^{-8} \text{ (秒)}$$

水平射程：

$$S = v_{0\parallel} t = v_0 \cos 30^\circ t$$



$$=10^7 \times 0.866 \times 1.13 \times 10^{-8}$$

$$=9.79 \times 10^{-2} (\text{米})$$

1. 3. 4 电子所带的电量（基本电荷—e）最先是由密立根通过油滴实验测出的。密立根设计的实验装置如附图所示，一个很小的带电油滴在电场 E 内，调节 E，使作用在油滴上的电场力与油滴的重量平衡。如果油滴的半径为 1.64×10^{-4} 厘米。若平衡时， $E = 1.92 \times 10^5$ 牛顿/库仑。求油滴上的电荷（已知油的密度为 0.851 克/厘米³）。

解：设油滴的电量为 Q，体密度为 ρ ，半径为 R（设油滴所带电量为体分布），

它受的电场力和重力分别为 F 和 P，

由 F=P 得：

$$EQ = mg = \frac{4\pi R^3 \rho g}{3}$$

$$Q = \frac{4\pi R^3 \rho g}{3E}$$

$$= \frac{4\pi \times (1.64 \times 10^{-6})^3 \times 0.851 \times 10^3 \times 9.8}{3 \times 1.92 \times 10^5}$$

$$= 8.02 \times 10^{-19} (\text{库仑})$$

1. 3. 5 两个电荷， $q_1 = 4.0$ （微库）， $q_2 = 8.0$ （微库），其相距为 10 厘米，求离它们都是 10 厘米处的电场强度 E。

$$\text{解： } E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-6}}{10^{-2}}$$

$$= 3.6 \times 10^8 (\text{牛/库})$$

$$E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 8 \times 10^{-6}}{10^{-2}}$$

$$= 7.2 \times 10^8 (\text{牛/库})$$

如图所示，在直角坐标系 o x y 中，

将 $\vec{E}_1$ ， $\vec{E}_2$ 分解：

$$\begin{aligned}
 E_x &= E_{1x} + E_{2x} \\
 &= E_1 \cos 60^\circ + E_2 \cos 120^\circ \\
 &= 9.36 \times 10^8 \text{ (牛/库)} \\
 E_y &= E_{1y} + E_{2y} = E_1 \sin 60^\circ + E_2 \sin 120^\circ \\
 &= 9.52 \times 10^8 \text{ (牛/库)}
 \end{aligned}$$

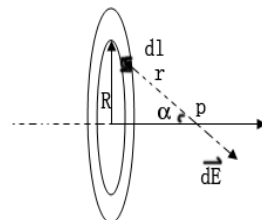
1. 3. 6 如图，一半径为 R 的均匀带电圆环，电荷总量为 q 。

(1) 求轴线上离环中心 O 为 x 处的场强 E ；

(2) 画出 $E-x$ 曲线；

(3) 轴线上什么地方场强最大？其值是多少？

解：(1) 如图所示，圆环上任一电荷元 dq 在 p 点产生的场强为：



$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

根据对称性分析，整个圆环在距圆心 x 处 P 点产生的场强：

$$\begin{aligned}
 E &= \oint dE \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{dq}{r^2} \cdot \frac{x}{r} \\
 &= \frac{x}{4\pi\epsilon_0 r^3} \oint dq = \frac{xq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\
 &= \frac{xq}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

(2) $E-x$ 曲线如图所示。

(3) 求 E 的极值：

$$\text{由 } \frac{dE}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} \right] = 0$$

$$\text{得： } x^2 = \frac{R^2}{2}$$

既： $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} R$ ，在距圆心左右两侧 $\frac{\sqrt{2}}{2} R$ 处的场强最大。其值为：

$$E_{\max} = \frac{q}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 R^2}$$

1. 3. 7 电荷以线密度 η 均匀分布在长为 L 的直线段上。

(1) 求带电线的中垂线上与带电线相距为 R 的点的场强；

(2) 证明当 $L \rightarrow \infty$ 时，该点的场强 $E = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0 R}$ ；

(3) 试证当 $R \gg L$ 时，所得结果与点电荷场强公式一致。

解：(1) 如图建立坐标，带电线上任一电荷元在 P 点产生的场强为：

$$d\vec{E} = \frac{\eta dx}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)} \hat{r}$$

根据对称性分析， $\vec{E}$ 的方向是 y 轴方向。

$$E = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\eta dx}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)} \sin \alpha$$

$$E = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{R\eta}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$= \frac{\eta L}{4\pi\epsilon_0 R \sqrt{R^2 + \frac{L^2}{4}}}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{\eta L}{4\pi\epsilon_0 R \sqrt{R^2 + \frac{L^2}{4}}} \hat{j}$$

(2) 当 $L \rightarrow \infty$ 时：

$$E = \frac{\eta L}{4\pi\epsilon_0 R \sqrt{R^2 + \frac{L^2}{4}}} = \frac{\eta}{4\pi\epsilon_0 R \sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{1}{4}}}$$

当 $L \rightarrow \infty$ 时， $(\frac{R}{L})^2 \rightarrow 0$

$$\therefore E = \frac{2\eta}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0 R}$$

(3) 当 $R \gg L$ 时： $(\frac{R}{L})^2 \gg \frac{1}{4}$

$$\therefore E = \frac{\eta L}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

其中 $\eta L = q$, 与点电荷公式一致。

1. 3. 8 线电荷密度为 η 的无限长均匀带电线, 分别弯成附图中 (a), (b) 两种形状, 若圆弧半径为 R , 试求: (a), (b) 图中 O 点的场强。

解: (a) 在 O 点建立坐标系, 如图所示:

$A \infty$ 半无限长直导线在 O 点产生的场强 E_1 :

$$\begin{aligned}\bar{E}_1 &= \int_0^\infty \left[\frac{-R\eta}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{j} + \frac{\eta y}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} \right] dy \\ &= -\frac{\eta}{4\pi\epsilon_0 R} \hat{j} + \frac{\eta}{4\pi\epsilon_0 R} \hat{i}\end{aligned}$$

同理: $B \infty$ 半无限长直导线在 O 点产生的场强 E_2 :

$$\bar{E}_2 = \frac{\eta}{4\pi\epsilon_0 R} \hat{j} - \frac{\eta}{4\pi\epsilon_0 R} \hat{i}$$

$\widehat{AB}$ 弧在 O 点产生的场强为:

$$\begin{aligned}\bar{E}_{\widehat{AB}} &= \frac{\eta}{4\pi\epsilon_0 R} \hat{i} + \frac{\eta}{4\pi\epsilon_0 R} \hat{j} \\ \therefore \bar{E} &= \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_{\widehat{AB}} \\ &= \frac{\eta}{4\pi\epsilon_0 R} (\hat{i} + \hat{j})\end{aligned}$$

(b) 建立如图所示的坐标系, 与图 (a) 讨论相同得:

$$\bar{E}_1 = \frac{\eta}{4\pi\epsilon_0 R} (-\hat{i} - \hat{j})$$

$$\bar{E}_2 = \frac{\eta}{4\pi\epsilon_0 R} (-\hat{i} + \hat{j})$$

$$\bar{E}_{\widehat{AB}} = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{i}$$

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0$$

1. 3. 9 一无限长带电圆柱面，其面电荷密度由下式所决定： $\sigma = \sigma_0 \cos \varphi$ ，

φ 角为与 x 轴间夹角，见附图，求圆柱轴线 z 上的场强。

解：设该圆柱面的截面半径为 R ，根据 1. 3. 7 题中 $L \rightarrow \infty$ 时的结论：

无限长直带电线在空间一点产生的场强 $E = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0 r}$ 得出：带电圆柱面上宽度为 d

($=Rd\varphi$) 的无限长带电线在轴线一点产生的场强为：

$$\begin{aligned} d\vec{E} &= -\frac{\eta}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{R} = -\frac{\sigma_0 \cos \varphi}{2\pi\epsilon_0 R} R d\varphi \hat{R} \\ &= -\frac{\sigma_0 \cos \varphi}{2\pi\epsilon_0} (\cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}) d\varphi \\ \therefore \vec{E} &= -\int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0 \cos \varphi}{2\pi\epsilon_0} (\cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}) d\varphi \\ &= -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{i} \end{aligned}$$

1. 4. 1 如图所求，匀强电场的场强 E 半径为 R 的半球面的轴线平行，试计算通过此半球面的电通量，若以半球面的边线为边，另作一个任意形状的曲面，此面的通量为多少？

解： S_1 的通量：如图设与场强垂直的圆平面为 S_0 ， S_1 和 S_0 组成一个闭和

曲面，其包围电荷 $\sum q_i = 0$ ，利用高斯定理得：

$$\begin{aligned} \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_0} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \Phi_0 + \Phi_{S_1} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \Phi_{S_1} = -\Phi_{S_0}$$

$$\Phi_{S_0} = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \pi R^2 E$$

$$\therefore \Phi_{S_1} = -\Phi_{S_0} = -\pi R^2 E$$

$$\text{同理：} \Phi_{S_2} = -\Phi_{S_0} = -\pi R^2 E$$

1. 4. 2 图中电场强度分别为 $E_x = bx^{\frac{1}{2}}, E_y = E_z = 0$, 其中 $b=800$ (牛顿/库仑)。

试求:

(1) 通过正立方体的电通量;

(2) 正立方体内的总电荷是多少? 设 $a=10$ (厘米)。

解: (1) 通过立方体的左侧面的电通量:

$$\Phi_{\text{左}} = -E_x S = -b a^{\frac{5}{2}}$$

通过立方体的右侧面的电通量: $\Phi_{\text{右}} = E_x S = \sqrt{2} b a^{\frac{5}{2}}$

其余各面的电通量为零。

$\therefore$ 通过正立方体的电通量:

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_{\text{左}} + \Phi_{\text{右}} = -b a^{\frac{5}{2}} + \sqrt{2} b a^{\frac{5}{2}} \\ &= (\sqrt{2} - 1) b a^{\frac{5}{2}} = (\sqrt{2} - 1) \times 800 \times (10^{-1})^{\frac{5}{2}} \\ &= (\sqrt{2} - 1) \times 800 \times (10)^{-\frac{5}{2}}\end{aligned}$$

$$= (\sqrt{2} - 1) \times 800 \times 10^{-\frac{5}{2}}$$

$$= 1.05 (\text{牛顿} \cdot \text{米}^2 / \text{库})$$

(2) 根据高斯定理得:

$$\phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\sum q}{\epsilon_0}$$

$$\therefore \sum q = \epsilon_0 \Phi = 8.85 \times 10^{-12} \times 1.05 = 9.29 \times 10^{-12} (\text{库仑})$$

1. 4. 3 求线电荷密度为 η 的无限长均匀带电直线在空间任意一点产生的场强。

解: 根据对称性分析, 无限长均匀带电直线在空间任意一点产生的场强与棒垂直, 呈辐射状。如图所示以带电直线为轴过 p 点作一封闭的圆柱面。长度 L 是任意的。

由高斯定理:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{\text{侧面}} E \cos \theta ds + \iint_{\text{上底}} E \cos \theta ds + \iint_{\text{下底}} E \cos \theta ds = \frac{\eta L}{\epsilon_0}$$

$$\text{上下底面上 } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \cos \theta = 0$$

$$\text{侧面上场强夹角 } \theta = 0$$

$$\therefore \cos \theta = 1$$

$$\therefore \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{\text{侧面}} E \cos \theta ds = E \cos \theta ds = E \cdot 2\pi r L = \frac{\eta L}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0 r}$$

1.4.4 求面电荷密度为 σ 的无限长均匀带电圆柱面的场强分布，并画出 $E-r$ 曲线。

解：设带电圆柱面的半径为 R ，根据对称性分析，在以圆柱的轴线为轴的任意一圆柱面上场强大小相等，而且场强方向垂直于圆柱面。在柱面内，过任一，以 z 为轴作一封闭圆柱面为高斯面，其半径为 r ，($r < R$)，长为 L ，如图所示。由高斯定理：

$$\oint \vec{E}_{\text{内}} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{侧面}} E_{\text{内}} \cos \theta dS + \iint_{\text{上底}} E_{\text{内}} \cos \theta dS + \iint_{\text{下底}} E_{\text{内}} \cos \theta dS = 0$$

$$\text{上下底与场强夹角 } \theta = \frac{\pi}{2} \quad \cos \theta = 0$$

$$\text{侧面与场强夹角 } \theta = 0 \quad \cos \theta = 1$$

$$\therefore \oint \vec{E}_{\text{内}} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{侧面}} E_{\text{内}} \cos \theta dS = 0$$

$$\therefore E_{\text{内}} = 0$$

在柱面外，同理过任一点 p 作半径 ($r > R$) 的封闭圆柱体形高斯面。由高斯定理：

$$\vec{E}_{\text{外}} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{侧}} \vec{E}_{\text{外}} \cos \theta dS + \iint_{\text{上底}} E_{\text{外}} \cos \theta dS + \iint_{\text{下底}} E_{\text{外}} \cos \theta dS$$

$$\iint E_{\text{外}} dS = 2\pi r L E_{\text{外}} = \frac{2\pi L \sigma}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E_{\text{外}} = \frac{\sigma R}{r \epsilon_0}$$

1.4.5 在一厚度为 d 的无限大的平板层内电荷均匀分布，起体密度 $\rho > 0$ ，求在平板层，外的电场强度。

解：如图 (a) 所示的是平板的俯视图， $00'$ 是与板面平行的对称面，根据对称性分析，

在对称面两侧等距离 x 出的场强大小相等，方向垂直该对称面指向两侧。在板内过任一点 P_0 ，被对称面平分的封闭圆柱面为高斯面，其底面积为 ΔS ，底面与对称面的距离为 x ：

由高斯面定理：

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{侧}} E \cos \theta dS + 2 \iint_{\text{柱面}} E \cos \theta dS$$

$$= 2E \Delta S = 2\rho \Delta S x / \varepsilon_0$$

$$\therefore E = \frac{\rho x}{\varepsilon_0} \quad \text{即 } \vec{E}_{\text{内}} = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E \Delta S = \frac{d\Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \quad \vec{E}_{\text{外}} = \pm \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$

$E-x$ 的分布曲线如图 (b)

1.4.6 一 半径为 R 的 带电球，起体电荷密度

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right), \quad \rho_0 \text{ 为一常数, } r \text{ 为空间某点至球心的距离。}$$

试求：(1) 球内，外的强度分布。

(2) 为多大时，场强最大，该点的 $E_{\text{max}} = ?$

解：(1) $\because \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$, ρ 与 r 是线性关系。在球内 P_0 做一个半径为 r 的与带电球同心的球面斯面如图，根据对称性分析，此球面上的场强大小相等，方向与 $\vec{r}$ 的一致。

$$\text{由高斯面定理：} \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E_{\text{内}}$$

$$q = \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) 4\pi r^2 dr$$

$$= \rho_0 \pi r^3 \left(\frac{4}{3} - \frac{r}{R}\right)$$

$$\therefore 4\pi r^2 E_{\text{内}} = \frac{\rho_0 \pi r^3}{\epsilon_0} \left(\frac{4}{3} - \frac{r}{R}\right)$$

$$\therefore E_{\text{内}} = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \left(1 - \frac{3r}{4R}\right) (r < R)$$

当 $r < R$ 时，即在球外过任一点 p 仍作球形高斯面。

由高斯定理得：

$$\oiint \vec{E}_{\text{外}} \cdot d\vec{s} = 4\pi r^2 E_{\text{外}}$$

$$q = \int_r^R \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) 4\pi r^2 dr = \frac{1}{3} \pi \rho_0 R^3$$

$$4\pi r^2 E_{\text{外}} = \frac{1}{3} \pi \rho_0 R^3$$

$$\therefore E_{\text{外}} = \frac{\rho_0 R^3}{12\epsilon_0 r^2}$$

$$(2) \frac{d}{dr} E_{\text{内}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(1 - \frac{3r}{2R}\right) = 0$$

$$\therefore r = \frac{2R}{3}$$

r 越大, $\vec{E}_{\text{外}}$ 单调减小, 因而球外场强无极值。

1.4.7 如图所示，两条平行的无限长均匀带电直线，相距为 $2a$ ，电荷线密度分别为 $+\lambda$ ，求这两条直线在空间任一点的场强。

解：利用高斯定理分别求出两条均匀带电直线在点 p 的电场强度：

$$\vec{E}_+ = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0 r_+} \hat{r}_+$$

$$\vec{E}_- = \frac{-\eta}{2\pi\epsilon_0 r_-} \hat{r}_-$$

$$\hat{r}_+ = \cos \theta_+ \hat{i} + \sin \theta_+ \hat{j}$$

$$= \frac{x+a}{r_+} \hat{i} + \frac{y}{r_+} \hat{j}$$

$$\hat{r}_- = \frac{x-a}{r_-} \hat{i} + \frac{y}{r_-} \hat{j}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

$$= \frac{\eta}{2\pi \epsilon_0 r_+} \left(\frac{x+a}{r_+} \hat{i} + \frac{y}{r_+} \hat{j} \right) - \frac{\eta}{2\pi \epsilon_0 r_-} \left(\frac{x-a}{r_-} \hat{i} + \frac{y}{r_-} \hat{j} \right)$$

$$= \frac{\eta}{2\pi \epsilon_0} \left[\left(\frac{a}{r_+^2} + \frac{a}{r_-^2} \right) + \left(\frac{x}{r_+^2} - \frac{x}{r_-^2} \right) \right] \hat{i} -$$

$$\frac{\eta}{2\pi \epsilon_0} \left(\frac{y}{r_-^2} - \frac{y}{r_+^2} \right) \hat{j}$$

$$\text{其中: } r_+^2 = y^2 + (x+a)^2$$

$$r_-^2 = y^2 + (x-a)^2$$

1.4.8 两无限大的平行平面均匀带电，面电荷密度都是 σ ，求各处的场强分布。

解：设 $\sigma > 0$ （对 $\sigma < 0$ 解题方法相同，只是图中 $\vec{E}$ 的方向不同），由高斯定理可求得无限大均匀带电平板的场强的大小为：

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

规定场强方向向右为正，向左为负。

$$E_1 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$E_{\text{II}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 0$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

1.4.9 如图所示,两无限大平行的均匀带电平面,相距为 L , 其面密度分别为 $-\sigma$ 与 σ , 以 z 为轴分别在两平面上挖去两个半径为 R 的圆, 且有 $l \ll R$, 试求, 轴上一点的场强分布 (子轴原点在 $\frac{l}{2}$ 处)。

解: 利用迭加原理, 先求两个没有挖去圆的无限大带电平面在 I (两平面的区域), II (两平面外的区域) 区域内的场强, 再减去两个圆产生的场强。

利用高斯定理求两带相反电荷的无限大平面产生的场强:

$$\text{在 I 区内: } \vec{E}_I = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{k}$$

$$\text{在 II 区内: } \vec{E}_{II} = 0$$

两个半径为 R 的带异号电荷的圆板在轴上产生的场强:

$$\text{在 I 区内: } \therefore l \ll R, \text{ 两带电圆板产生的场强: } \vec{E}'_1 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{k}$$

在 II 区内: 带正电荷的圆板在 z 轴上一点 ($z > \frac{l}{2}$) 产生

$$\text{的场强 } \vec{E}'_+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z - \frac{1}{2}}{\sqrt{R^2 + (z - \frac{1}{2})^2}} \right) \hat{k}$$

带负电荷的圆板在 z 轴同一点产生的场强

$$\vec{E}'_- = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z + \frac{1}{2}}{\sqrt{R^2 + (z + \frac{1}{2})^2}} \right) \hat{k}$$

$$\therefore \text{I 区的总场强: } \vec{E} = \vec{E}_I + \vec{E}'_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{k} - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{k} = 0$$

$$\text{II 区的总场强: } \vec{E} = \vec{E}_{II} + \vec{E}'_+ + \vec{E}'_-$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z + \frac{1}{2}}{\sqrt{R^2 + (z + \frac{1}{2})^2}} - \frac{z - \frac{1}{2}}{\sqrt{R^2 + (z - \frac{1}{2})^2}} \right) \hat{k}$$

$\therefore l$ 很小, 用台劳级数将上式在 $l=0$ 处展开, 取前两项:

$$f'(z) = \frac{z + \frac{1}{2}}{\sqrt{R^2 + (z + \frac{1}{2})^2}} - \frac{z - \frac{1}{2}}{\sqrt{R^2 + (z - \frac{1}{2})^2}}$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [f(0) + f'(0)l] \hat{k}$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (0 + \frac{R^2 l}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}) \hat{k}$$

$$= \frac{\sigma R^2 l}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k}$$

1.1.10 如图所示，在半径为 R ，电荷体密度为 ρ 的均匀带电球体内 O' 点放一个

点电荷 q 。试求： O, P, N, M 点的场强（ O', O, P, N, M ，在一条直线上）。

解：利用高斯定理分别求出均匀带电球体分别在 O, P, N, M 点的场强为（其中 O 为球心）：

$$\vec{E}_{RO} = 0$$

$$\vec{E}_{RN} = -\frac{\rho r_{ON}}{3\epsilon_0} \hat{r}$$

$$\vec{E}_{RP} = -\frac{\rho r_{op}}{3\epsilon_0} \hat{r}$$

$$\vec{E}_{RM} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r_{OM}^2} \hat{r}$$

点电荷 q 分别在 O, N, P, M 点产生的场强为

$$\vec{E}_{qO} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \hat{r}$$

$$\vec{E}_{qO} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_{ON}^2} \hat{r}$$

$$\vec{E}_{qP} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_{OP}^2} \hat{r}$$

$$\vec{E}_{qM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_{OM}^2} \hat{r}$$

利用迭加原理：

$$\vec{E}_O = \vec{E}_{RO} + \vec{E}_{qO} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_{OO}^2} \hat{r}$$

$$\vec{E}_N = \vec{E}_{RN} + \vec{E}_{qN} = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_{ON}^2} - \frac{\rho r_{ON}}{3\epsilon_0} \right) \hat{r}$$

$$\vec{E}_P = \vec{E}_{RP} + \vec{E}_{qP} = \left(\frac{\rho r_{OP}}{3\epsilon_0} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_{OP}^2} \right) \hat{r}$$

$$\vec{E}_M = \vec{E}_{RM} + \vec{E}_{qM} = \left(\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r_{OM}^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_{OM}^2} \right) \hat{r}$$

1. 4. 11 在半径为 R ，电荷体密度为 ρ 的均匀带电体内，挖去一个半径为 r 的小球，如图所示，试求： O ， O' ， P ， M 各点的场强。（ O', O, P, M 在一直线上）。

解：将挖去的小球 Q' 用电荷体密度为 ρ 的球补起来。先求均匀带电球体 Q 产生的场强，再求填补的带电球体 Q' 产生的场强，两者相减即是所要求的场强。

利用高斯定理求带电球体 Q 分别在 O, O', P, M ，产生的场强为：

$$\vec{E}_{OO} = 0$$

$$\vec{E}_{O'O} = \frac{\rho r_{OO'}}{3\epsilon_0} \hat{r} \quad (\hat{r} \text{ 方向如图所示，原点在 } O \text{ 点})$$

$$\vec{E}_{OP} = -\frac{\rho r_{OP}}{3\epsilon_0} \hat{r}$$

$$\vec{E}_{OM} = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r_{OM}^2} \hat{r}$$

带电球体 Q' 分别在各点产生的场强为：

$$\vec{E}_{O'O} = -\frac{\rho r_{OO'}}{3\epsilon_0} \hat{r}$$

$$\vec{E}_{OO} = 0$$

$$\vec{E}_{OP} = -\frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0 r_{OP}^2} \hat{r}$$

$$\vec{E}_{OM} = -\frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0 r_{OM}^2} \hat{r}$$

图中各点的场强分别为：

$$\vec{E}_p = \vec{E}_{op} - E_{o'p} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(\frac{r^3}{r_{op}^2} - r_{op} \right) \hat{r}$$

$$\vec{E}_M = \vec{E}_{oM} - \vec{E}_{o'M} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(\frac{r}{r_{o'M}^2} - \frac{R^3}{r_{o'M}^2} \right) r$$

1. 4. 12 半径为 R 的无限长直圆柱体内均匀带电，电荷的体密度 ρ ，求场强分布，并画 E---曲线。

解：分别过圆柱体内，外一点 P_0, P 作如图（a）所示高斯面，由高斯定理可得：

$$r \leq R \text{ 时, } \oiint \vec{E}_{\text{内}} d\vec{S} = 2\pi l \vec{E}_{\text{内}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \pi r^2 l$$

$$\therefore E_{\text{内}} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

$$r \geq R \text{ 时: } \oiint \vec{E}_{\text{外}} d\vec{S} = 2\pi l \vec{E}_{\text{外}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \pi R^2 l$$

$$\therefore E_{\text{外}} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

场强的方向为径向

E---r 曲线如图（b）。

1. 4. 13 一对无限长的共轴直圆筒，半径分别为 R_1 和 R_2 ，筒面上都均匀带电。沿轴线单位长度的电量分别为 λ_1 和 λ_2 。（1）求各区域内的场强分布；（2）若 $\lambda_1 = -\lambda_2$ ，情况如何？并画出此情形的 E---r 曲线

解：如图（a）所示，将空间分成三个区域，应用 1.4.4 题的结果可得：

（1）I 区域内（ $r < R_1$ ）： $\vec{E}_I = 0$

II 区域内（ $R_1 < r < R_2$ ）：

$$\vec{E}_{II} = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

当

$\lambda_1 > 0$ 时， $\vec{E}_{II}$ 的方向与 $\hat{r}$ 方向一致

当 $\lambda_1 < 0$ 时， $\vec{E}_{II}$ 的方向与 $\hat{r}$ 方向相反。

区域内：（ $r > R_2$ ）：

$$\vec{E} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

当 $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ 时， $\vec{E}_{II}$ 方向与 $\hat{r}$ 方向一致。

当 $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ 时， $\vec{E}_{II}$ 方向与 $\hat{r}$ 方向相反。

（2）若 $\lambda_1 = -\lambda_2$ 时，则 $\vec{E}_I, \vec{E}_{II}$ 不变。

$\therefore \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$\therefore \vec{E}_{II} = 0$

E—r 曲线如图（b）

1.5.1 设有一个电量 $q = 1.5 \times 10^{-8}$ （库仑）的电电荷。试求：（1）电位为 30 伏特的等位面的半径有多大？（2）电位差为 1.0 伏特的任意两个等位面，其半径之差是否相同？

解：（1）选无限远为电位参考点，根据电电荷电位公式

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ 得:}$$

$$30 = \frac{1.5 \times 10^{-8}}{4\pi \times 8.9 \times 10^{-12} r}$$

$$\therefore r = 4.5(\text{米})$$

(2) 设半径差为 Δr , 则 $r_2 = r_1 + \Delta r$,

根据电位差公式得:

$$\begin{aligned} V &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + \Delta r} \right) \\ \therefore V &= 1.0(\text{伏}) \\ \therefore \frac{\Delta r}{r_1(r_1 + \Delta r)} &= \frac{4\pi\epsilon_0}{q} \\ \Delta r \left(1 - \frac{4\pi\epsilon_0}{q} r_1 \right) &= \frac{4\pi\epsilon_0}{q} r_1^2 \\ \therefore \Delta r &= \frac{r_1^2}{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} - r_1} \end{aligned}$$

从上式看出, 当 r_1 取不同值时, Δr 值不等。

1.5.2 如图所示, 两个点电荷的电量分别为 q 与 $-3q$, 其间距离为 d , 求: (1) 在它们连线中间 $U=0$ 的点和 (2) 在连线上 $\vec{E}=0$ 的点在什么位置?

解: 建立如图所示坐标, 设其原点在 q 所在出。

(1) 设电位 $U=0$ 的点的坐标是 x ,

$$\text{点电荷 } q \text{ 在该点的电位为: } U_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}$$

$$\text{点电荷 } -3q \text{ 在该点的电位为: } U_{-3q} = -\frac{3q}{4\pi\epsilon_0 (d-x)}$$

根据电位迭加原理得:

$$\begin{aligned} U &= U_q + U_{-3q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} - \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 (d-x)} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{d-4x}{x(d-x)} \right] = 0 \\ \therefore d-4x &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{d}{4}$$

(2) 设 $\vec{E}=0$ 的点的坐标为 x'

点电荷 q 在该点产生的场强: $\vec{E}_q = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x'^2} \hat{i}$

点电荷 $-3q$ 在该点产生的场强: $\vec{E}_{-3q} = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 (x'-d)^2} \hat{i}$

由场强迭加原理得:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_q + \vec{E}_{-3q} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x'^2} + \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 (x'-d)^2} \hat{i} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{x'^2} - \frac{3}{(x'-d)^2} \right] \hat{i} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2x'^2 + 2x'd - d^2}{x'^2(x'-d)} \hat{i} = 0\end{aligned}$$

即: $2x'^2 + 2x'd - d^2 = 0$

$$\therefore x' = -\frac{d}{2}(1 \pm \sqrt{3})$$

$$x' = -\frac{d}{2}(1 + \sqrt{3}) \text{ 符合题意。}$$

$$x' = -\frac{d}{2}(1 - \sqrt{3}) \text{ 不符合题意应舍去。}$$

1. 5. 3 如图所示, 假如在电场中某一部分的电力线的形状是以 O 点为中心的通信圆弧。试证明: 该部分上各点的电场强度都与该点离 O 点的距离成反比。

证: 利用环路定理, 如果过 1, 2 两点做一闭和环路:

$$dl_1 = r_1 d\theta$$

$$dl_2 = r_2 d\theta$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \int \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}_2 + \int \vec{E}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} + \int \vec{E}_{21} \cdot d\vec{r}_{21} = 0$$

$$\because \vec{E}_{12} \perp \vec{r}_{12} \quad \vec{E}_{21} \perp \vec{r}_{21}$$

$$\therefore \int \vec{E}_1 d\vec{l}_1 + \int \vec{E}_2 d\vec{l}_2 = E_1 dl_1 - E_2 dl_2 = 0$$

$$\therefore E_1 r_1 d\theta = E_2 r_2 d\theta$$

$$\therefore \frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

说明每点的电场强度都与该点离 O 的距离成反比。

1. 5. 4 证明: 在静电场中凡是电力线都是平行直线的地方, 电场强度的大小必定

处处相等：或者换句话说，凡是电场强度的方向处处相同的地方，电场强度的大小必定处处相等。

（提示：利用高斯定理和环路定理，分别证明沿同一电力线和不同电力线上任意两点的场强相等。）

证：先证明同一条电力线上任意两点 A, B 场强相等。过 A, B 两点以该条电力线为轴做以闭合的圆柱面，如图所示，底面积 $\Delta S \rightarrow 0$ ，即认为上场强相同，由高斯定理得：

$$-E_A \Delta S + E_B \Delta S = 0$$

$$\therefore E_A = E_B$$

点 C, D 场强相等。过 C, D 两点做如图所示的矩形积分环路，由环路定理得：

$$-E_C l + E_D l = 0$$

$$\therefore E_C = E_D$$

（注：此处 L 不一定趋于无限小，为已证明电力线上各点 $\vec{E}$ 都相等。）[证毕]

1.5.5 如图所示，AB=2L， $\widehat{OCD}$ 是以 B 为中心，L 为半径的半圆。A 点有正点电荷 +q, B 点有负点电荷 -q.

(1) 把单位正电荷从 O 点沿 $\widehat{OCD}$ 移到 D 点，电场力对它做了多少功？

(2) 把单位负电荷从 D 点沿 AB 的延长线移到无穷远处，电场力对它作了多少功？

解：根据点位叠加原理：

$$U_O = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{L} - \frac{q}{L} \right) = 0$$

$$U_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{3L} - \frac{q}{L} \right) = -\frac{q}{6\pi\epsilon_0 L}$$

(1) 电场力把单位正电荷（即 $q_0 = +1$ ）从 O 点沿 $\widehat{OCD}$ 移到点 D 所做的功：

$$\begin{aligned} A_{\widehat{OCD}} &= q_0 (U_O - U_D) = q_0 \left(0 - \left(-\frac{q}{6\pi\epsilon_0 L} \right) \right) \\ &= \frac{q}{6\pi\epsilon_0 L} \end{aligned}$$

(2) 场力把单位负电荷（即 $q_0 = -1$ ）从 D 点移到无穷远处所作的功：

$$A_{D_{\infty}} = q(U_D - U_{\infty}) = q_0(0 - \frac{-q}{6\pi\epsilon_0 L}) = \frac{q}{6\pi\epsilon_0 L}$$

1. 5. 6 电荷 Q 均匀分布在半径为 R 的球内, 证明离球心 r 处 ($r < R$) 的电位为;

$$U = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

证明: 利用高斯定理求得球内外任一点场强:

$$E_{\text{内}} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$E_{\text{外}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

离球心 r 处 ($r < R$) 的电位:

$$\begin{aligned} U &= \int_r^R \vec{E}_{\text{内}} \cdot d\vec{l} + \int_R^{\infty} \vec{E}_{\text{外}} \cdot d\vec{l} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_r^R r dr + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{Q(R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \\ &= \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3} \end{aligned}$$

证毕。

1. 5. 7 求 1. 4. 7 题中两条平等的无限长均匀带异号电荷的直线, 在空间任一点的电位。选无限远为电位参考点。

解: 利用迭加原理求空间任一点 p(x, y) 的电位:

一条无限长直带电线

在 p 点的场强:

$$\vec{E} = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

在这种情况下不能选无限远为电位参考

(指一条无限长直带电的情况), 因为电荷分布不是在有限区域内,

选用与带电线相距 r_0 远的 Q 点作为参考点, 如图所示。

对带正电荷的直线:

$$U_+ = \int_{r_+}^{r_{Q+}} \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0 r_+} dr_{r_+} = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{Q+}}{r_{0+}}$$

对带负电荷的直线:

$$U_- = -\frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \int_r^{r_{Q-}} \frac{dr}{r} = -\frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{Q-}}{r_-}$$

利用迭加原理:

$$U = U_+ + U_- = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{r_{\theta+}}{r_+} - \ln \frac{r_{Q+}}{r_-} \right)$$

$$= \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{\theta+} r_-}{r_{\theta-} r_+}$$

当参考点 Q 趋于无限远处时, $r_{\theta+} \approx r_{\theta-}$

$$U = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{r+}}{r_{r-}}$$

1. 5. 8 如图所示, 电量 q 均匀分布在长为 2L 的细直线上。

(1) 求空间任一点 p(x, y) 的电位 U ($0 < y < +\infty, -\infty < x < +\infty$),

(2) 讨论: 当 p 点在延长线上, 距 0 为 x 外; 当 p 点在直线中垂直面上离中心 0 为 y 外的电位。

解: (1) 在图中:

$$r = \sqrt{(x-l)^2 + y^2}$$

带电线元 dl 在 p 点的电位;

$$dU = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 L} \frac{dl}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}}$$

整个带电线在 p 点的电位;

$$\begin{aligned} dU &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0 L} \int_{-L}^L \frac{dl}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}} \\ &= \frac{-q}{8\pi\epsilon_0 L} \ln [x-l + \sqrt{(x-l)^2 + y^2}] \Big|_{-L}^{+L} \\ &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{x+L + \sqrt{(x+L)^2 + y^2}}{x-L + \sqrt{(x-L)^2 + y^2}} \end{aligned}$$

(2) 当 p 点在其延长线上, 距 0 为 x [即 p(x, 0)]

外,

$$U = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{x+L+\sqrt{(x+L)^2}}{x-L+\sqrt{(x-L)^2}}$$

$$= \frac{q}{8\pi\epsilon_0 L} \ln \left| \frac{x+L}{x-L} \right|$$

当 p 点在直线中垂面上, 离中心 O 为 [即 p(0, y)] 处

$$U = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{L+\sqrt{L^2+y^2}}{-L+\sqrt{L^2+y^2}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{L+\sqrt{L^2+y^2}}{y}$$

1. 5. 9 如图所示, 两个平行放置的均匀电圆环, 它们的半径为 R, 电量为 q 及 -q, 其中相距为 l, 并有 $l \ll R$ 关系。

(1) 试求以两环的对称中心 O 为坐标原点, 垂直于环面的 x 轴上的电位

(2) 证明: 当 $x \gg R$ 时, $U = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 x^2}$

解: (1) 求在 x 轴上 p 点的电位:

带电圆环上电荷线密度 $\pm \eta = \frac{\pm q}{2\pi R}$

带正电的圆环在 p 点的电位

$$U_+ = \frac{2\pi\eta R}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 + R^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 + R^2}}$$

同理, 带负电的圆环在 p 点的电位,

$$U_- = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + R^2}}$$

由迭加原理得:

$$U = U_+ + U_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + R^2}} \right]$$

当 $l \ll R$ 时, 用台劳级数在 $l=0$ 的地方展开, 略去 l 的二次项 (1. 4. 9 题方法同) 得:

$$U = \frac{qlx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(2) 当 $x \gg R$ 时,

$$U = \frac{qlx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

1.5.10 求 1.4.9 题中, 沿 z 轴上的电位分布。选无限远处为电位参考点。

$$\text{解: 利用 1.4.9 题结论 } \vec{E} = -\frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i}$$

积分求电位:

$$U = \int_z^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_z^{\infty} \frac{-\sigma R^2}{2\epsilon_0(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} dz = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

1•5•11 如图所示, 在半径为 R_1 和 R_2 的两个同球心球面上, 分别均匀带电, 电量为 Q_1 , Q_2

(1) 求 I、II、III 区域内的电位分布

(2) 讨论: 当 $Q_2 = -Q_1$;

$$Q_2 = -\frac{R_2}{R_1} Q_1 \quad \text{两种情况下 I、II、III 区域中电位分布, 并画出两种}$$

情况下 $U-r$ 曲线

解: (1) 利用高斯定理求出:

$$\vec{E}_I = 0 \quad (r < R_1)$$

$$\vec{E}_{II} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$\vec{E}_{III} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (r > R_2)$$

电位分布:

$$U_{III} = \int_r^{\infty} \vec{E}_{III} \cdot d\vec{l} = \int_r^{\infty} \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r \geq R_2)$$

$$U_{II} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_1}{r} \right)$$

$$(R_1 \leq r \leq R_2)$$

$$U_I = \int_{R_2}^{\infty} \vec{E}_{III} \cdot d\vec{l} + \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_{II} \cdot d\vec{l} + \int_r^{R_1} \vec{E}_I \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_1}{R_1} \right)$$

$$(r \leq R_1)$$

(2) 当 $Q_2 = -Q_1$ 时,

$$U_{III} = 0$$

$$U_{II} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$U_I = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

当 $Q_2 = -\frac{R_2}{R_1} Q_1$ 时,

$$U_{III} = -\frac{Q_1(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_1 r}$$

$$U_{II} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$U_I = 0$$

在此两种情况下的 $U-r$ 曲线如图

1.5.12 在上题中, 保持内球上电量 Q_1 不变, 当外球电量 Q_2 变化时, 试讨论三个区域内的电位有没有变化? 两球面之间的电位差有没有变化?

解: 在上题中

$$U_I = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_1}{R_1} \right)$$

$$U_{II} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_1}{r_1} \right)$$

$$U_{III} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

从上面结论可看出, 当 Q_2 变化时, 三个区域的电位都变化。

两球面间电位差 $\Delta U = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ 不随 Q_2 的变化而变化。

1.5.13 求 1.4.11 题中 O, O', P, M 各点的电位。

解 用 1.4.11 题解同样的“挖补法”求各点的电位。

先计算均匀带电球体在 $O' O, M, P$ 各点的电位；

$$\begin{aligned}
 U_{OM} &= \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r_{OM}} \\
 U_{OP} &= \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} - \frac{\rho}{6\epsilon_0} (R^2 - r_{OP}^2) \\
 &= \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} - \frac{\rho r_{OP}^2}{6\epsilon_0} \\
 U_{OO'} &= \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} + \frac{\rho}{6\epsilon_0} (R^2 - r_{OO'}^2) \\
 &= \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r_{OO'}^2}{6\epsilon_0} \\
 U_{OO} &= \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}
 \end{aligned}$$

再计算均匀带电球体 $O' O, M, P$ 各点的电位；

$$\begin{aligned}
 U_{O'M} &= \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0 r_{O'M}} \\
 U_{O'P} &= \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0 r_{O'P}} \\
 U_{O'O'} &= \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0 r_{O'O'}} \\
 U_{O'O} &= \frac{\rho r^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r_{O'O}^2}{6\epsilon_0}
 \end{aligned}$$

利用迭加 原理得

$$U_M = U_{OM} - U_{O'M} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R^3}{r_{OM}} - \frac{r^3}{r_{O'M}} \right)$$

$$U_P = U_{OP} - U_{OP} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r_{OP}}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0 r_{OP}}$$

$$= \frac{\rho}{6\varepsilon_0} (3R^2 - r_{OP} - \frac{2r^3}{r_{OP}})$$

$$U_0 = U_{00} - U_{0'0} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho r_{0'0}}{6\varepsilon_0}$$

$$U_{0'} = U_{00} - U_{0'0} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r_{0'0}}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho}{6\varepsilon_0} (3R^2 - 3r^2 - r_{0'0}^2)$$

1.5.14 在 1.413 题中分别以无限远和轴线为电位参考点，求无限长共轴圆筒的电位分别和两筒的电位差（设 $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$ ），并画出 U-r 曲线。

解：根据 104.13 题的结论：

$$\text{在 } \lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda \text{ 时, } \vec{E}_1 = 0, \vec{E}_{II} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \hat{r}, \vec{E}_{III} = 0$$

设无限远处为电位参考点，则各区域的电位为： $U_{II} = 0$

$$U_{II} = \int_r^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{r}$$

$$U_I = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \times \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\text{电位差 } \Delta U = U_{R_2} - U_{R_1} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

U-r 曲线如图 (a) 所示。

设共轴圆筒的轴线为电位参考点，则各区域的电位为：

$$U_I = 0$$

$$U_{II} = \int_r^{R_1} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_1}{r}$$

$$U_{III} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

$$\text{电位差 } \Delta U = U_{R_2} - U_{R_1} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

U—r 曲线如图 (b) 所示。讨论：从以上分别以无限远和轴线为电位参考点得出三个区域中电位的值是不同的，但 U—r 曲线形状不变，对不同的参考点，U—r 只是做了平移，这说明电位值与参考点的选择有关，而空间两点间的电位差与参考点无关。

1. 5. 15 半径为 R 的无限长直圆柱体内均匀带电，电荷体密度为 ρ 。以轴线为电位参考点，求其电位分布。

解：利用高斯定理求出场强的分布：

$$\vec{E}_{\text{外}} = \frac{\rho R^2}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

$$\vec{E}_{\text{内}} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \hat{r}$$

以轴线为电位参考点得

$$U_{\text{内}} = \int_r^0 \vec{E}_{\text{内}} \cdot d\vec{r} = \int_r^0 \frac{\rho r}{2\epsilon_0} dr = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} \quad (r \leq R)$$

$$U_{\text{外}} = \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} + \int_r^R \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} dr = -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \ln \frac{R}{r} = \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} \left(2 \ln \frac{R}{r} - 1 \right) \quad (r \geq R)$$