第八章　　交流电路

目的：

１、理解并掌握交流电的三要素：振幅、频率、初相位以及交流电的瞬时值、有效值等基本概念。

２、掌握交流电路中各类元件（纯电阻、纯电感、纯电容）的电压、电流及元件电性能之间的相位关系。

３、掌握串、并联电路的矢量图解法，并能进行有关的计算。

４、了解电压复有效值、电流有效值及阻抗的概念，并能进行有关计算。

５、掌握交流电路的功率和功率因素的概念，了解提高功率因素的方法。

§8-1　　交流电的基本性质

大小和方向都在不断地随时间作周期性变化的电流、电压及电动势通称为交流电，通有交流电的电路称为交流电路。

交流电流、交流电压及交流电动势的大小和方向都在不断地随时间作周期性变化，以电流为例可用数学式子表示为：$i(t) = i(t+T) = i(t+2T) = \cdots$

i(t) 表 t 时刻电流的值．T 是一个常数称为交流电的周期，上式表明 i 是时间 t 的周期函数，函数的形式有各种各样，表示了不同的交流电随时间的变化规律不同。

交流电的波形虽然各种各样，但最基本也是最重要的是正弦（或余弦）交流电,其它各种交流电都可以看成是由若干不同频率的正弦(或余弦)交流电合成的结果,本章仅讨论余弦交流电。

通常的发电机所产生的是余弦交流电,其产生的电动势随时间的函数关系式。

$$e = \varepsilon_m \cos(\omega t + \varphi) \qquad \cdots\cdots(1)$$

由此式可以看出要确定任意时刻交流电的瞬时值,必须知道它的三个基本参数,即频率、峰值和相位。

１、频率和周期

交流电流（或电压、电动势）的大小和方向不断地随时间作周期性变化，它完成一次变化所需要的时间为交流电的周期，用 T 表示，单位是秒。

$$f = \frac{1}{T}$$

周期的倒数表示在单位时间内，交流电变化的次数，称为交流电的频率，用 f 表示：

频率的单位是赫兹，简称赫，用符号 Hz 表示。

(1)式中的ω称为园频率(也称角频率),它表示简谐交流电瞬时值变化的快慢,单位是弧度/秒(rad/s)。园频率与频率、周期的关系

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

2 、峰值和有效值

(1)式中 ε_m 表示电动势的最大值,又称为峰值或幅值,我们常用的是交流电的有效值来表示它的大小,余弦交流电的有效值等于峰值的 $1/\sqrt{2}$ 倍,例如电压的有效值：

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0.707\,U_m$$

3、相位

(1)式中 $\omega t + \varphi$ 称为交流电的相位.它是决定任意时刻交流电瞬时状态的物理量,其中 φ 表 t=0 时刻的相位，称为初相位。

相位和初相位在交流电路中起着十分重要的作用，因此，交流电路比直流电路具有更复杂更丰富的内容。

§8-2　三种理想电路

交流电路的基本问题和直流电路一样，也是确定电路各元件上的电流和电压的关系以及电流、电压和功率在电路中的分配问题。

这里讨论的电流称为似稳电流，似稳电流所激发的电磁场称为似稳电磁场，似稳电流的瞬时值服从直流电的基本规律。

一、交流电路中的电阻

设电阻两端的电压为： $u = U_m \cos(\omega t)$

则电阻中的电流为： $i = I_m \cos(\omega t)$

表明纯电阻电路中，电流 i 和电压 u 是同频率的余弦波，它们的有效值之间的关系满足欧姆定律，并且相位相同.

交流电的瞬时功率等于电压瞬时值 u 和电流瞬时值 i 乘积，而它在一个周期以内对时间的平均值，称为平均功率，利用电流和电压的有效值，平均功率可以表示：

$$P = I^2 R = IU$$

二、纯电感电路

设通过纯电感电路的电感元件的电流：$i = I_m \cos(\omega t)$

推导可以得出电感元件两端的电压：$u = U_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

上式表明，纯电感两端的电压与通过电感的电流频率相同，但相位不同，电压相位比电流相位超前 $\frac{\pi}{2}$ 。

纯电感电压峰值 U_m 和电流的峰值 I_m 之间的关系为：$U_m = L\omega I_m$

用有效值表示 $U = L\omega I$

式中 $L\omega$ 称为电感元件的阻抗或称感抗，通常用 Z_L 表示，即

$$Z_L = L\omega = 2\pi f L$$

感抗 Z_L 的大小不仅与 L 成正比，还与交流电的频率 f 成正比。

三、纯电容电路

设通过纯电容电路的电容元件的电压： $u = U_m \cos(\omega t)$

则通过电路两端的电流为： $i = I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

上式表明，纯电容两端的电压与电流频率相同，但相位不同，电流相位比电压相位超前 $\frac{\pi}{2}$ 。

纯电容电路电压峰值 U_m 和电流的峰值 I_m 之间的关系为：$I = C\omega V$

用有效值表示 $I = C\omega U$

式中 $\frac{1}{\omega c}$ 称为电感元件的阻抗或称容抗，仍用 Z_c 表示，即

$$Z_c=\frac{1}{\omega c}=\frac{1}{2\pi fc}$$

表明容抗 Z_c 的大小不仅与电容 c 大小有关，还与交流电的频率 f 成反比.

容抗和感抗一样单位均为欧姆，与电阻单位是相同的。

现将三种理想电路总结列表如下：

元件	电　　流	电　　压	电压和电流的关系	
			阻抗 Z＝U／I	相位差
电阻	$i=I_m\cos(\omega t)$	$u=V_m\cos(\omega t)$	$Z_R=\frac{U}{I}=R$	0
电感	$i=I_m\cos(\omega t)$	$u=U_m\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})$ $U_m=L\omega I_m$	$Z_L=\frac{U}{I}=\omega L$	$+\frac{\pi}{2}$
电容	$i=I_m\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})$	$u=U_m\cos(\omega t)$ $U_m=\frac{I_m}{\omega C}$	$Z_c=\frac{U}{I}=\frac{1}{\omega c}$	$-\frac{\pi}{2}$

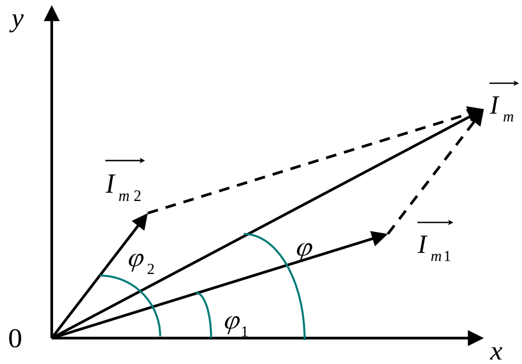
§8-3　　矢量图解法

一、矢量图解法

余弦交流电除用函数式、余弦曲线图表示外，还可以用矢量图解来表示，设某一交流电压

$$u=U_m\cos(\omega t+\varphi)$$

我们以直角坐标的原点作一矢量 $\vec{U}_m$，令其长度等于交流电压的峰值 V_m，在 t=0 时刻矢量 V_m 的方向与 x 轴的夹角等于交流电压的初相位，并使矢量 $\vec{U}_m$ 以角速度ω绕 0 点向逆时针方向旋转，矢量 $\vec{V}_m$ 称为旋转矢量，这种方法论叫做旋转矢量法，任一时刻 t，矢量 $\vec{U}_m$ 与 x 轴的夹角为 $\omega t+\varphi$，而矢量 V_m 在 x 轴上的投影，就等于交流电压在该时刻的瞬时值 $u=U_m\cos(\omega t+\varphi)$ 旋转矢量不过是一种表示余弦函数的方法，在我们的三维空间中，实际上并不存在什么电流矢量或电压矢量等。采用矢量图解法求解同频率的两交流电的迭加



是极为方便的。两同频率交流电i_1 和 i_2

$$i_1 = I_{m1}\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$i_2 = I_{m2}\cos(\omega t + \varphi_2)$$

这两个电流之和为：

$$i = i_1 + i_2 = I_{m1}\cos(\omega t + \varphi_1) + I_{m2}\cos(\omega t + \varphi_2)$$

用旋转矢量法可求得： $i = I_m\cos(\omega t + \varphi)$

式中 I_m表示总电流 i 的峰值，它等于合矢量$\overrightarrow{I_m}$ 的大小， φ 则为 i 的初相位，即为 t=0 时刻矢量 $\overrightarrow{I_m}$ 与 x 轴的夹角，由图可以求得：

$$I_m = \sqrt{I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + 2I_{m1}I_{m2}COS(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\varphi = \arctan\frac{I_{m1}\sin\varphi_1 + I_{m2}\sin\varphi_2}{I_{m1}\cos\varphi_1 + I_{m2}\cos\varphi_2}$$

这就是利用矢量图来计算两同频率余弦交流电之和的方法。

和直流电路一样，交流电路最基本的联接方式仍然是串联和并联两种。在串联电路中，任一时刻各点电流相同，总电压的瞬时值等于各段电路分电压的瞬时值之和，并联电路中，各支路两端电压相同，总电流的瞬时值等于各支路分电流的瞬时值之和。

下面是采用矢量图解法求解串、并联电路所得的几个结论：

一、串联电路

1 、RC 串联电路

RC 串联电路的等效阻抗(亦称总阻抗)为：$Z = \sqrt{Z_R^2 + Z_C^2} = \sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega c})^2}$

该式表明,RC 串联电路的等效阻抗不等于分阻抗的和,即 $Z \neq Z_R + Z_c$

电压与电流间的相位差为：$\varphi=-\tan^{-1}\frac{U_c}{U_R}=-\tan^{-1}\frac{Z_c}{Z_R}=-\tan^{-1}\frac{1}{\omega cR}$

φ 又称为阻抗角，由于 $\varphi<0$，故电路呈容性。

2、RL 串联电路

RL 串联电路的等效阻抗(亦称总阻抗)为：$Z=\sqrt{Z_R{}^2+Z_L{}^2}=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$

该式表明,RL 串联电路的等效阻抗不等于分阻抗的和,即 $Z\neq Z_R+Z_L$

电压与电流间的相位差为：

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{U_L}{U_R}=\tan^{-1}\frac{Z_L}{Z_R}=\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

由于$\varphi>0$，故电路呈感性。

在 RC、RL 串联电路中，若电流有效值为 I，等效阻抗为 Z，总电压有效值为 U，则它们之间的关系具有欧姆定律的形式，即：$I=\frac{U}{Z}$

各元件上的分电压与该元件的阻抗成正比，其分压规律和直流串联电路的分压规律一致的。

二、并联电路

1、RC 并联电路

RC 并联电路的总电流为：$I=\sqrt{I_R{}^2+I_C{}^2}$

该式表明,RC 并联电路的总电流有效值并不等于分电流有效值的和,即 $I\neq I_R+I_c$

电路的等效阻抗为：$Z=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{z_R{}^2}+\frac{1}{z_c{}^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2}+(\omega c)^2}}$

电压与电流间的相位差为：$\varphi=-\tan^{-1}\frac{I_c}{I_R}=-\tan^{-1}\omega cR$

由于 $\varphi<0$，故电路呈容性。

2、RL 并联电路

RL 并联电路的总电流为：$I=\sqrt{I_R{}^2+I_L{}^2}$

该式表明,RL 并联电路的总电流有效值并不等于分电流有效值的和,即 $I\neq I_R+I_L$ 电路的等效阻抗为：

$$Z=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{z_R^2}+\frac{1}{z_L^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{(\omega L)^2}}}$$

电压与电流间的相位差为：$\varphi=\tan^{-1}\frac{I_L}{I_R}=\tan^{-1}\frac{R}{\omega L}$

由于 $\varphi>0$ ，故电路呈感性。

在 RC、RL 并联电路中，若总电流有效值为 I ，等效阻抗为 Z，总电压有效值为 U，

则它们之间的关系具有欧姆定律的形式，即：$I=\frac{U}{Z}$

各元件上的分电流的有效值与各元件的阻抗成反比，其分流规律和直流并联电路的分流规律是一致的。

应用矢量图解法的步骤如下：

1 、选择参考矢量自原点 0 沿横轴放置，对串联电路一般选电流矢量为参考矢量，对并联电路一般选电压矢量为参考矢量。

2 、根据理想元件的电压矢量和电流矢量的相位关系作出相应的矢量。

3 、按矢量的几何关系计算欲求量的大小和初相位。

§8-4 复数解法

任何一个简谐量都可以用一个复数形式来表示（即与一个复数相对应），并视其为正弦或余弦形式而取复数的虚部或实部（我们规定取余弦形式，故取实部）．设有一简谐量

$$a(t)=A_m\cos(\omega t+\varphi)$$

与它对应的复数应为：
$$\tilde{A}_m=A_m e^{j(\omega t+\varphi)}$$
$$=A_m\cos(\omega t+\varphi)+jA_m\sin(\omega t+\varphi)$$

即复数的模等于简谐量的幅值，复数的复角等于简谐量的相位，取此复数的虚部正好是简谐量本身，此复数称为简谐量的复瞬时值。

上式又可表示为：
$$\tilde{A}_m=A_m e^{j\omega t}\cdot e^{j\varphi}=\sqrt{2}Ae^{j\omega t}\cdot e^{j\varphi}$$

考虑到因子 $\sqrt{2}e^{j\omega t}$ 对任何简谐量都相同，运算中可将对应规则简化，略去因子$\sqrt{2}e^{j\omega t}$ ，即

$Ae^{j\varphi}$ $\tilde{A}$

认为简谐量 a(t)的对应复数是　　　，并称之为 a(t)的复有效值，用　　表示，这样就有

$$\tilde{A} = Ae^{j\varphi}$$

该式表明，复有效值的模等于简谐量的有效值，其幅角等于简谐量的初相位. 所谓复数解法，实际上就是借助复数理论用复有效值的运算代替简谐量的运算来求解与简谐量相关的问题。

(1)复阻抗和复角

复阻抗的定义是：$\hat{Z} = \dfrac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = \dfrac{U}{I}e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Ze^{j\varphi}$

式中：$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

是电压和电流之间的相位差,称为幅角(或阻抗角),一个交流电路的性质,其阻抗和相位差完全由复阻抗所确定,也即电路的复阻抗概括了电路的阻抗和电路里电压与电流间的相位差两个方面，所以掌握了一段电路的复阻抗，这段电路的性质也就清楚了.

应当指出，虽然我们将交流电的简谐量与复数对应起来，但并不意味着任何一个复数必然对应一个交流电的简谐量. 例如，复阻抗并不对应一个简谐量，因它与时间无关，不是一个周期函数，所以复阻抗我们用 $\hat{Z}$ 表示，以区别于有简谐量对应的复数 $\tilde{U}$ ，$\tilde{I}$ 等。

(2)电流的复有效值和电压的复有效值

复有效值的概念很重要,必须牢固掌握其物理意义,电流的复有效值和电压 的复有效值的定义是：　$\tilde{I} = Ie^{j\varphi_i}$　；　$\tilde{U} = Ue^{j\varphi_u}$

以电流的复有效值为例,模 I 是余弦量的有效值，φ_i 是余弦量的初相位.

(3)欧姆定律的复数形式

设有一段不含电源的交流电路，负载的复阻抗为 $\hat{Z}$ ，当规定电压 u，电流 i 的正方向相同

时，根据复阻抗的定义式 $\hat{Z} = \dfrac{\tilde{U}}{\tilde{I}}$　得：$\tilde{U} = \tilde{I}\hat{Z}$

上式与直电路中一段不含源电路欧姆定律Ｕ＝ＩＲ的形式相似，称为交流电路中一段不含源电路欧姆定律的复数形式，用其研究三种理想元件，可得如下结果：

纯电阻复阻抗：$\hat{Z} = \hat{Z}_R = \dfrac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = Re^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = R$

所以纯电阻的复阻抗就是电阻Ｒ。

纯电容复阻抗：$\hat{Z} = \hat{Z}_c = \dfrac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = \dfrac{1}{\omega c}e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \dfrac{1}{\omega c}e^{-j\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{j\omega c}$

$\dfrac{1}{\omega c}$　　　　$-\dfrac{\pi}{2}$

所以纯电容的复阻抗的模等于　　，幅角为　　　。

纯电感复阻抗：$\hat{Z} = \hat{Z}_L = \dfrac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = \omega L e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega L$

φ

$\cos\varphi$

所以纯电感的复阻抗的模等于 ωL ，幅角为 $\dfrac{\pi}{2}$

（4）串、并联电路复数解法的结果：

串联电路： $\hat{Z} = \sum_{i=1}^{n} \hat{Z}_i$

即串联元件的总复阻抗等于各元件复阻抗之和。

并联电路： $\dfrac{1}{\hat{Z}} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\hat{Z}_i}$

即并联元件的总复阻抗的倒数等于各元件复阻抗的倒数之和。

复数法计算比较简单，而且适用于任何复杂电路，用复数形式表示交流电路中的各种关系，在形式上与直流电路中的各种关系完全相同。不过应当注意，复阻抗中有物理意义的是它的模和辐角，它们分别代表电路的阻抗和相位差。所以在进行复阻抗的运算之后，重要的是还要把它的模和辐角求出来，这是比直流电路复杂的方面。

§8-5　交流电路中的功率　功率因素

一、瞬时功率、平均功率、功率因素

任意一个与外界有两连接点的无源二端网络，它两端的电压与其中电流之间存在着相位差φ ，$\cos\varphi$ 可取 $-\dfrac{\pi}{2}$ 到 $\dfrac{\pi}{2}$ 之间的任意值，而在 0 到 1 之间,设所加电压

$$u = V_m \cos(\omega t)$$

则通过电路中的电流 $i = I_m \cos(\omega t - \varphi)$

任意时刻 t ,电路中瞬时功率为：$p = ui = V_m \cos\varphi \cdot I_m \cos(\omega t - \varphi)$

而在一个周期 T 时间内平均功率为：

$$P=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}p\cdot dt=\frac{1}{2}V_{m}I_{m}\cos\varphi=VI\cos\varphi$$

可见,二端网络的平均功率等于电压有效值、电流有效值和电压与电流的相位差 的余弦的乘积，上式中 称为电源二端网络的功率因素．即：

$$\cos\varphi=\frac{P}{VI}$$

即对任意无源二端网络电路，平均功率的大小不仅与电流和电压的有效值有关，还与功率因素 $\cos\varphi$ 的大小，也即电压和电流的相位差 φ 有关，这是和直流电路中电功率 P=IV 的重要区别，这也是交流电路中要考虑电压、电流间相位差之原故。

实际上三种理想元件的平均功率可视为一般情况下平均功率 $P=IV\cos\varphi$ 的特例，对于电阻我们知道 $\varphi=0$ 所以 P=IV．而对于电感或电容 $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ ，所以 P=0。

二、有功功率、视在功率和无功功率

平均功率亦称有功功率，仍用 P 表示，即 P=UIcosφ

发电机工作时的电流和电压的乘积 IU(均为有效值)称为发电机输出的视在功率，用 S 表示,即 S=IU

在电工技术中除了有功功率 P 和视在功率 S 外，还常引入无功功率的概念，它等于电压、电流的有效值和它们的相位差 φ 的正弦的乘积，用Ｑ表示，即

Ｑ＝ＩＵsinφ

P、Q、Ｓ和电压与电流间相位差 φ 之间的关系如右图“功率三角形”表