第九章　　电磁场和电磁波

9-1-1 如图所示，设平行板电容器内各点的交变电场强度 E=720sin$10^{5}\pi t$（伏/米），正方向规定如图。求：（1）电容器中的位移电流密度，（2）电容器内距中心联线 r=10^{2}（米）的一点 P，当 t=0，t=$\frac{1}{2}\times 10^{5}$（秒）时的磁场强度的大小及方向。（不考虑传导电流的磁场）

解：（1）$\vec{j}_{位}=\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

在空气中：$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$

$$\therefore j_{位}=\frac{\partial D}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial(720\sin 10^5\pi t)}{\partial t}=720\times 10^5\pi t \text{（安/米}^2\text{）}$$

（2）根据环路定理：

$$\oint \vec{H}\bullet d\vec{l}=\iint_s(\vec{j}_{位}+\vec{j}_{传})\bullet d\vec{s}=2.2\text{伏}$$

$$E=\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}$$

$$p=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0 E=\frac{(\varepsilon_r-1)\lambda_0}{2\pi\varepsilon_r r}$$

（3）介质内表面：$\sigma^{'}=-P=-(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0 E$

$$=-\frac{(\varepsilon_r-1)\lambda_0}{2\pi\varepsilon_r R_1}$$

外表面：$\sigma_2^{'}=\frac{(\varepsilon_r-1\lambda_0)}{2\pi\varepsilon_r R_2}$

3．5.13 两共周轴的导体圆筒，内筒的外半径为 R_1，外

筒的内半径为 R_2（$R_2\angle 2R_1$），其间的两层均匀介质，分

界面的半径为 r，内层相对介电常数为 ε_{r1}，外层相对介电

常数为 $\varepsilon_{r2}=\frac{\varepsilon_{r1}}{2}$ ，两介质的介电强度（即击穿强度）都

是 E_M。当电压升高时，哪层电解质先击穿？证明：两筒最

大的电位差$U_M=\frac{1}{2}rE_M\ln\frac{R_2^2}{rR_1}$。

证：设沿轴线单位长度内外筒的电量为±λ。内层介质中的场强：

$$E_1=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r_1}\qquad（R_1\angle r_1\angle r）$$

外层介质中的场强：

$$E_2=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r_2}\qquad（r\angle r_2\angle R_2）$$

$$\because\quad \varepsilon_{r2}=\frac{\varepsilon_{r1}}{2}$$

$$\therefore\quad U=\int_{R1}^{r}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r_1}dr_1+\int_{r}^{R_2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r_2}dr_2$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\ln\frac{r}{R_1}+\frac{1}{\varepsilon_{r2}}\ln\frac{R_2}{r}\right]$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}\ln\frac{R_2^2}{rR_1}$$

故内层介质中场强最大植：

$$\because\quad E_{1M}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}R_1}$$

$$\therefore E_{1M}=\frac{U_M}{R_1\ln\frac{R_2^2}{rR_1}}$$

外层介质场强的最大植：

$$E_{2M}=\frac{2U_M}{r\ \ln\frac{R_2^2}{rR_1}}$$

$$\therefore\frac{E_{2M}}{E_{1M}}=\frac{2R_1}{r}$$

又$\because R_2\angle 2R_1$

$$\therefore\frac{E_{2M}}{E_{1M}}=\frac{2R_1}{r}>\frac{R_2}{r}>1$$

即$E_{2M} > E_{1M}$

因两种介质的击穿强度都是E_M， 古电压上升时外层

介质中场强首先达到$E_{2M} = E_M$使其击穿。

由 $E_{2M} = E_M = \dfrac{2U_M}{r\ \ln\dfrac{R_2^2}{rR_1}}$得出：

$$U_M = \frac{1}{2}E_{Mr}\ln\frac{R_2^2}{rR_1}$$

3.6.1　如图所示，由两层均匀电介质充满的圆柱形电，两电介质的相对介电常数分别为ε_{r1}和ε_{r2}；设沿轴线单位长度上，内、外圆筒的电荷为λ和$-\lambda$；

（1） 问 D 及$\vec{E}$在介质的分界面处是否连续？
（2） 求此电容器单位长度的电容。
解：（1）利用高斯定理得：

在介质 1 中：$\vec{D} = \dfrac{\lambda}{2\pi r}\hat{r}$　　（$R_1 \angle r \angle R_2$）

在介质 2 中：$\vec{D} = \dfrac{\lambda}{2\pi r}\hat{r}$　　（$R_2 \angle r \angle R_3$）

在两介质的分界面上：

$\vec{D}_1 = \vec{D}_2 = \dfrac{\lambda}{2\pi R_2}\hat{r}$是连续的。

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{D}_1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r}\hat{r} \qquad (R_1 \angle r \angle R_2$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{D}_2}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r}\hat{r} \qquad (R_2 \angle r \angle R_3)$$

在两介质的分界面出；

$$\vec{E}_1=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}R_2}\hat{r}$$

$$\vec{E}_2=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}R_2}\hat{r}$$

在$\varepsilon_{r1}\neq\varepsilon_{r2}$时，$\vec{E}_1\neq\vec{E}_2$

$\therefore \vec{E}$是不连续的

（2）$$U=\int_{R1}^{R2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r}dr+\int_{R_2}^{R_3}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r}dr$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{1}{\varepsilon_{r2}}\ln\frac{R_3}{R_2}\right]$$

$\therefore$ $$C=\frac{\lambda}{U}=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r2}\ln\frac{R_2}{R_1}+\varepsilon_{r1}\ln\frac{R_3}{R_2}}$$

3.6.2　分界面左、右两侧电介质的相对介电常数分别为：ε_{r1}=3 和 ε_{r2}=7。设在分界面左侧的场强大小为$E_1=1000$伏/米，与发线成45°角，且指向右侧，求分界面右侧的场强$\vec{E}_2$。

解：两种电介质界面上无自由电荷，故电位移矢量的法向分量是连续的。

$$D_{1n}=D_{2n}\qquad \text{或}\ \varepsilon_{r1}\varepsilon_0E_{1n}=\varepsilon_{r2}\varepsilon_0E_{2n}$$

P118——P121

P339

在电容器中：$\vec{j}_{传}=0$

在平行板电容器中作过 P 点以 r 为半径的圆，如图所示，

根据对称性可知其上 H 大小相等。

$\therefore \oint \vec{H} \bullet d\vec{l} = H \bullet 2\pi r$ （选积分方向与 $\vec{H}$ 方向一致）

$\iint_S \vec{j}_{位} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = j_{位} \pi r^2$

$$\therefore \quad H_{cp} = \frac{j_{位} \bullet r}{2} = \frac{720 \times 10^5 \times 10^{-2} \varepsilon_0 \pi \cos 10^5 \pi t}{2}$$

$=3.6 \times 10^5 \pi\varepsilon_0 \cos 10^5 \pi\varepsilon_0$ （安/米）

当 t=0 时，H=3.6$\times 10^5 \pi\varepsilon_0$ （安/米）

当 t=$\frac{\pi}{2} \times 10^5$时，H=0

9.1.2 一平行板电容器的两板面积均为 A 的圆形金属板，接一交流电源时，板上的电荷随时间变化。

即 $q_0 = q_m \sin \omega t$。

（1） 试求电容器中的位移电流密度

（2） 试证两板之间的磁感应强度分布

$B = \frac{q_m r \omega \mu_0}{2A} \cos \omega t$，其中 r 为由圆板中心线到该点的距离。

解：（1） $q_0 = q_m \sin \omega t$ 对于平行板电容器

$$D = \sigma_0 = \frac{q_0}{A} = \frac{q_m}{A} \sin \omega t$$

$$\therefore \ j_{位} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{q_m \omega}{A} \cos \omega t$$

（3） 根据环路定理知：

$\oint \vec{H} \bullet d\vec{l} = \iint_R \vec{j}_{位} \bullet \mathrm{d}\vec{s}$ （电容器中的 $\vec{j}_{传} = 0$）

以两极板中心线为对称轴，在平行于极板的平面内，以该平面与中心线的交点为圆心，以 r 为半径作圆，根据对称性知，其上 H 大小相等，选积分方向与 $\vec{H}$ 方向大小一致。

$$\therefore \quad \oint \vec{H} \bullet d\vec{l} = H \bullet 2\pi r$$

$$\iint \vec{j}_{位} \bullet d\vec{S} = j_{位} \bullet \pi r^2$$

$$\therefore H=\frac{\vec{j}_{位}\mathrm{r}}{2}=\frac{q_m\omega r}{2A}\cos\omega t$$

$$\therefore \quad B=\mu_0 H=\frac{q_m\omega r}{2A}\cos\omega t$$

9.1.3 试证：平行板电容器中的位移电流可以表示为：

$$i_{位}=\frac{C\mathrm{d}_u}{d_t}=\frac{dq_0}{d_t}$$ （省去边缘效应）。

证：$\because q_0=C_u$

$$\sigma_0=\frac{q_0}{S}=\frac{Cu}{S}$$

在平行板电容器中：$D=\sigma_0$

$$\vec{j}_{位}=\frac{\partial D}{\partial \mathrm{t}}=\frac{C}{S}$$

位移电流： $i_{位}=j_{位}\mathrm{S}=\mathrm{C}\frac{\partial u}{\partial t}$

q_0，u 只是 t 的函数，又$\because$ u=$\frac{q_0}{C}$

$$\therefore i_{位}=C\frac{du}{dt}=\frac{dq_0}{dt}.$$

证毕。

9•1•4　如图所示，电路中直流电源的电动势为 12 伏、电阻 R=6（欧），电容器的电容 C=1.0（微法），试求：

（1）　接通电源瞬时电容器极板间的位移电流。

（2）　T=6×10^{-6}(秒)时，电容器极板间的位移电流，

（3）　位移电流持续多长时间。（通常认为经过 10 倍电路时间常数后电流小到可忽略不计。）

解：对 RC 串联的暂态过程有：

$$\mathrm{R}\frac{dq_0}{dt}+\frac{1}{C}\ q_0=\xi$$

解之得：q_0=Cξ（$1-e^{-\frac{1}{RC}t}$）

$$=12\times10^{-6}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{10^6}{6}t}\right)$$

在电容器内，由上题结论知：

$i_{位}=\frac{dq_0}{dt}$=12×$10^{-6}\times\frac{10^6}{6}e^{-\frac{10^6}{6}t}$=2e$^{-\frac{10^6}{6}t}$

(1)在接通电源瞬时 t=0, $i_{位}$=2(安

(2)当 t=6×10^{-6}秒时，$i_{位}$=2e$^{-\frac{10^6}{6}\times\frac{6}{10^6}}$=2e^{-1}(安)

(3) $i_{位}\to 0$，在 t=10τ时可认为电流忽略不计

t=10τ=10RC=10×6×10^{-6}=6×10^{-5}(秒)

9•3•1 一个很长的螺线管，每单位长度有 n 匝，半径为 a，载有一增加的电流 i，试求：

（1） 在螺线管内距轴线为 r 处一点的感应电场，

（2） 在这点的坡印廷矢量的大小及方向。

解：（1）螺线管内磁场强度：H=ni

B=$\mu_0 ni$

利用$\oint \vec{E}\bullet d\vec{l}=-\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{S}$

由对称性知，以轴线为对称轴，距轴线为 r 的圆周上$\vec{E}$的大小相等：

∴ $\oint \vec{E}\bullet d\vec{l}=E\bullet 2\pi r$

$\iint_S \frac{\partial B}{\partial t}\bullet d\vec{S}=\pi r^2\mu_0 n\frac{di}{dt}$

∴ E=$\frac{u_0 nr}{2}\bullet\frac{di}{dt}$

0 玻印廷矢量：$\overline{S}=\overline{E}\times\overline{H}$

在螺线管内 $\overline{E}\perp\overline{H}$

∴ $S=EH$

$=\frac{u_0 n^2 r}{2}i\frac{di}{dt}$

$\overline{S}$方向指向轴线，如图所示。

9.3.2 单位长的电阻为 3×10^{-3} 欧/米，载有电流 25.1

字培计算在距导线表面很近一处点处的下列各量：

（1）$\overline{H}$ 的大小

（2）线方向上的分量，

（3）　垂直于导线 $\overline{S}$ 的分量

解：1）由环路定理 $\oint \overline{H} \bullet d\bar{l}$ =I $_{传}$

$$\frac{25.1}{2\pi\times10^{-2}}=4\times10^{-2} \quad （安/米）$$

（2）导体电阻公式：R= $\dfrac{l}{\sigma S}$

$$\therefore \quad \sigma=\frac{l}{RS}=\frac{I}{\frac{R}{l}}S$$

电流的密度：　j $_{传}$ = $\dfrac{I_{传}RS}{lS}=I_{传}\dfrac{R}{l}$

=25.1×3×10^{-3}=75.3×10^{-3}　（安/米）

(3)　$\overline{S}=\overline{E_{''}}\times\overline{H}=\overline{E}\times\overline{H}$

$\because \quad \overline{E}\perp\overline{H}$

$\therefore$　S=EH=75.3×10^{-3}×4×10^{-3}

=30.1（瓦/米）

9•3•3　有一圆柱形导体，半径为 a,阻率为,载有电流 I。

（1）求在导体内距轴线为 r 处某点 E 的大小及方向。

（2）求该点 $\overline{H}$ 的大小与方向。

（3）求该点玻印廷矢量 $\overline{S}$ 的大小与方向，

（4）试将（3）的结果与长度为 L，半径为 r 的导体内消耗的能量做比较。

解：（1）　j $_{传}$ = $\dfrac{I_{。}}{S}=\dfrac{I_{。}}{\pi a^2}$

E= $\dfrac{j_{传}}{\sigma}=\rho j_{传}=\rho\dfrac{I_{。}}{\pi a^2}$

E 的方向与电流方向致

(2) $\oint \overline{H} \bullet d\bar{l}$=j$_{传}$ πr^{2}

$\therefore\oint \overline{H} \bullet$d$\bar{l}$=2$\pi$rH=j$_{传}$ πr^{2}

$\therefore$H=$\dfrac{j_{传}r}{2}=\dfrac{I_{\circ}r}{2\pi a^{2}}$

的方向在过该点与轴线垂直平面内，且与电流方向满足右手螺旋关系。

（3） $\overline{S}=\overline{E}\times\overline{H}$

$\because \overline{E}\perp\overline{H}$

$\therefore$ S=EH=$\rho\dfrac{I_{\circ}r}{\pi a^{2}}\bullet\dfrac{I_{\circ}r}{2\pi a^{2}}=\dfrac{\rho I_{\circ}^{2}r}{2\pi^{2}a^{4}}$

方向满足$\overline{S}=\overline{E}\times\overline{H}$关系。

（4） 长为 L，半径为 r 的导体电阻为：

R=$\rho\dfrac{L}{S}=\rho\dfrac{L}{\pi r^{2}}$

I' =j$_{传}$ $\pi r^{2}=\dfrac{I_{\circ}r^{2}}{a^{2}}$

导体内消耗的能量：

W=I$'^{2}$R=$\dfrac{I_{\circ}^{2}}{a^{4}}r^{4}\rho=\dfrac{\rho I_{0}^{2}r^{2}L}{\pi a^{4}}$

$=\dfrac{\rho I_{0}^{2}r}{2a^{4}\pi}\bullet 2\pi rL$

=S$\bullet 2\pi rL$

$\varpi_{E}=\dfrac{\partial\varpi_{E}}{\partial t}=\dfrac{1}{2C}\dfrac{dq_{0}^{2}}{dt}=\dfrac{q_{0}}{C}\dfrac{dq_{0}}{dt}$

$\therefore\varpi_{s}=\varpi_{E}$ 即流入电容器的能量等于其静电能的增加速率。

9.3.5 假设 100 瓦的灯泡的输入功率中有 10%以 500 毫微米（1 毫微米=10^{-9}波长

的光均匀辐射，在距光源 2 米处，电场与磁场强度正按正弦规律变化，E= $E_m \sin(\varpi t+\varphi_E)$ 及 H= $H_m \sin(\varpi t+\varphi_H)$ 。计算 E 及 H。

解：

$$\varpi = 2\pi f = \frac{2\pi C}{\lambda} = -\frac{6\pi}{5}\times 10^{15}$$

$$\varphi_E = \varphi_H = -\frac{x\varpi}{C} = \frac{2\times\frac{6\pi}{5}\times 10^{15}}{3\times 10^8} = -\frac{4\pi}{5}\times 10^7$$

$$\overline{S} = \frac{W}{4\pi r^2} = \frac{10}{4\pi\times 2^2} = \frac{10}{16\pi} = \frac{5}{8\pi}$$

又由 $\sqrt{\varepsilon_0}$ E=

H= $\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}}E$

$$\therefore \overline{S} = \frac{1}{2}E_m H_m = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_m^2$$

$$\therefore E_m = (2\overline{S}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}})^{\frac{1}{2}}$$

$=(2\times\frac{5}{8\pi}\times\sqrt{\frac{4\pi\times 10^{-7}}{8.85\times 10^{-12}}})^{\frac{1}{2}}$ =150（伏/米）

$H_m = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}}\ E_m = \sqrt{\frac{8.85\times 10^{-12}}{4\pi\times 10^{-7}}}\times 150$

=0.4（安/米）

$\therefore E = 150\sin(\frac{6\pi}{5}\times 10^{15}t - \frac{4\pi}{5}\times 10^7)$（特/米）

H=0.4 $\sin(\frac{6\pi}{5}\times 10^{15}t - \frac{4\pi}{5}\times 10^7)$（安/米）