电磁学中的物理图景法与数学分析法

- 电磁学中数学分析法的应用及特点
- 电磁学中物理图景法的应用及特点
- 如何运用数学分析法和物理图景法

- 物理图景最大的优点是直观,理解容易。
- 它能避免繁琐的数学运算， 电像法就是其典型实例。大家知道直接一点电荷与无限大导体平板之间的作用力是多么困难， 甚至不可能。

- 真空中的高斯定理:通过任意闭合曲面S的电通量等于该面内的全部电荷的代数和除以,与面外电荷无关.
- 证明分两步:
- 先考虑最简单的点电荷情形.当高斯面为单位球面,q正好位于球心所在位置时,则球面上电场强度大小

  为 $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}$,其方向与球面径向平行.通过S的电通

  量 $\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$,满足高斯定理

- 对高斯面为任意封闭曲面S时,考虑该面上的任一面元,其外法线方向的夹角设为与点电荷q距离设为r.以q为顶点,通过的周线作一锥面.
- $\Delta S_2 = \Delta S \cdot \cos\theta$ $\qquad \dfrac{\Delta S_2}{\Delta S_1} = r^2$
- $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}$ $\qquad \Delta\Phi = \vec{E} \cdot \Delta\vec{S}\cos\theta = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Delta S$
-

正好就是穿过单位面元 ΔS 电通量.

- 对处于高斯面外的点电荷,可另作一封闭曲面,使之包围点电荷并与S相交,则有

$$\iint_{S_0} \vec{E}d\vec{S} - \iint_{S_1} \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\iint_{S} \vec{E}d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \therefore \oiint_{S} \vec{E}d\vec{S} = 0$$

- 以上的证法充分利用了点电荷的场强度公式，

理解起来容易接受，但证明过程中严谨有待疑问，ΔS的近似没有确切的理论根据。

- 数学语言特点:

  简洁,严谨.能很好的解决以上出现的问题。

  建立在公理化体系上的数学往往能得出意想不到的结论.

- 再看另一种证法:对任一封闭曲面S,电场通量为

$$\Phi = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint\!\!\!\oint dS \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}\,')(\vec{r}\,'-\vec{r})\vec{n}}{|\vec{r}\,'-\vec{r}|^3}dV$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\vec{r}\,')dV \oint\!\!\!\oint_S \frac{\vec{R}\cdot\vec{n}dS}{R^3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\vec{r}\,')dV \oint\!\!\!\oint_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\!\!\!\oint_S d\Omega$$

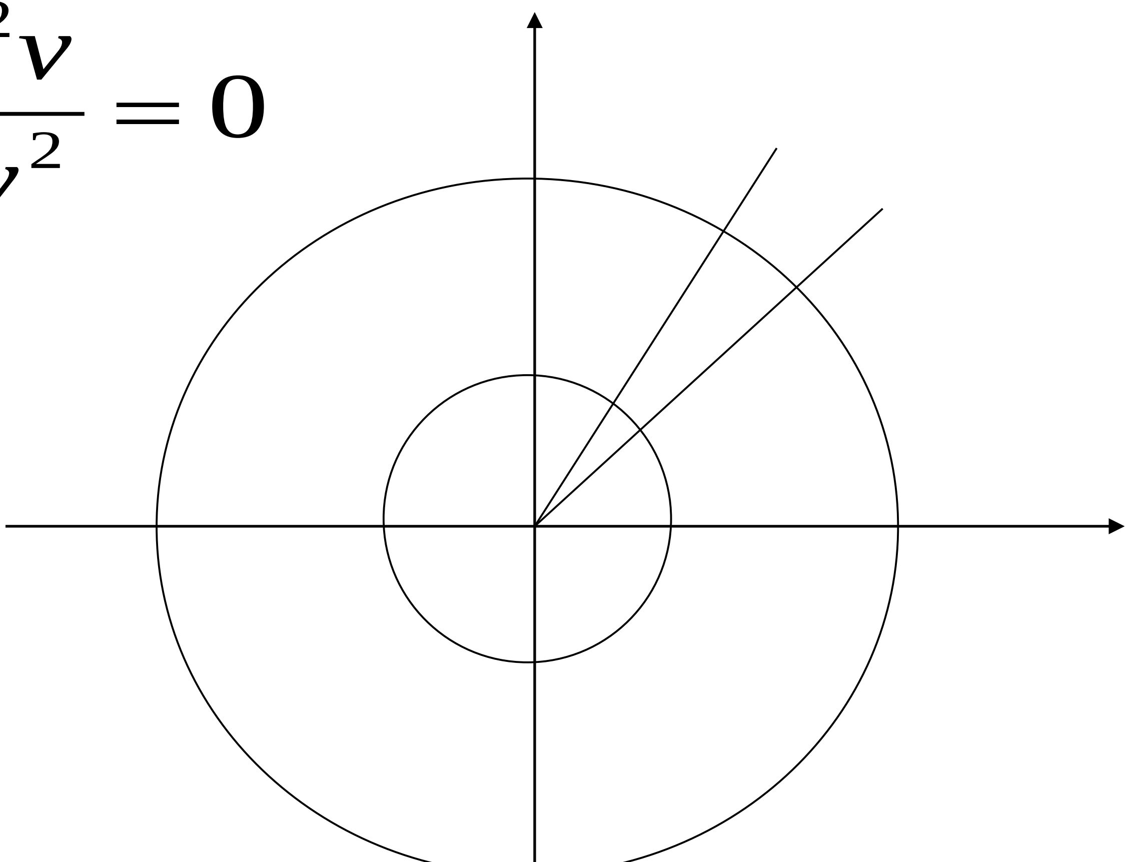
$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,', d\Omega$ 为面元对所张的立体角

- 因为
- $$\oint\!\!\!\oint_S d\Omega = \begin{cases} 4\pi, & \text{当在S面内} \\ 0, & \text{当在S面外} \end{cases}$$
- 所以
- 得证

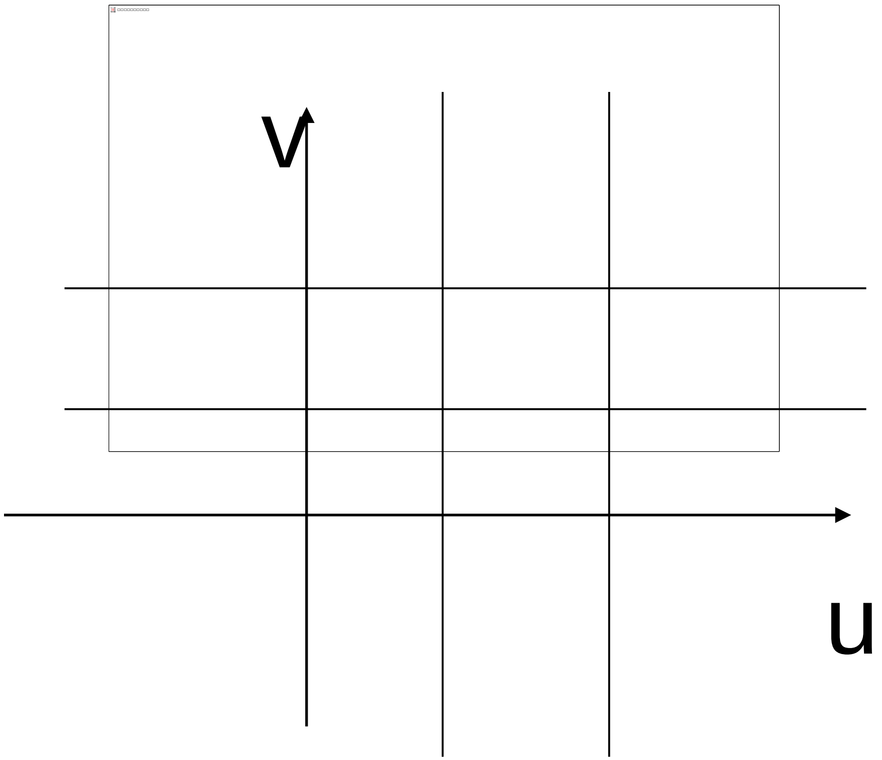
- 我们平时计算静电场的主要是库仑定律和高斯定理。在求有些电场问题，可用复变函数法。
- 应用这种方法的主要限制时：
- （1）在需要计算电位的区域，电位分步布函数必须满足拉普拉斯方程。
- （2）只能计算二维的静电场问题，即通常所说的平行平面场问题，因为复变函数只能描述二维平面上的场分布。
- （3）要求场中的边界必须是等势面，即通常指的导体表面。
- 对于解析函数它的实部和虚部都满足拉普拉斯方程，即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$



- 且曲线u=常数和v=常数互相垂直。故u或v中的任何一个都可取为电位函数。如果能够找到一个解析函数的u=常数或v=常数的曲线族中的一条或几条能与导体边界重合，则u或v就是要求的电位函数。根据唯一性定理，这各函数既能满足拉普拉斯方程，又满足给定的边值，因而是唯一的。
- 现在以 $W = A\ln z + B$为例说上述原理的应用。



$$z = \mathrm{Re}^{i\varphi}, B = B_1 + B_2$$

$$W = u + iv = A\ln R + B + i(A\varphi + B_2)$$

$$\therefore u = A\ln R + B_1$$

$$v = A\varphi + B_2$$

- 令u=constant和v=constant。在W平面上它们是两族平行坐标轴的直线。而在Z平面上，u=constant是一族以原点为中心的同心圆。v=constant是一族从原点出发的径向直线。
- 从已经得到的函数图行可知，如果给定的导体边界形状在Z平面上圆，例如单根无限长圆柱导体或同轴线，就选u作电位函数，u=常数的曲线族就是等位线。V=常数的曲线就是电力线。如果给定的边界的是夹角为但不相交的两块半无限大导体平面，则应选v电位函数。

- 从前面讨论可知，物理和数学都是描述自然规律的，只是出发的角度不同。自然规律的实质决定了你所能描述它的行式。
- 根据自然规律，恰当的选择方法。