

第八章 磁介质

§ 8-1 磁介质与磁化强度矢量 M

8.1.1 磁化现象与磁化强度矢量 M

1. 磁化：使物质具有磁性的物理过程。
2. 磁介质：一切能磁化的物质。
3. 磁化强度矢量—磁化的物理描述

(1) 定义：单位体积内所有分子磁矩的矢量和，即

$$M = \frac{\sum m_{\text{分子}}}{\Delta V}, \quad (8-1-1)$$

其中 $m_{\text{分子}}$ 是安培分子电流的磁矩（注意： ΔV 的大小应满足：分子间距 $\ll \Delta V^{1/3} \ll M$ 的非均匀尺度）。

(2) 性质：

- a. 非磁化状态下，分子固有磁矩为零（见§8-2 中的抗磁质）；或虽不为零，但由于取向无规（见§8-2 中的顺磁质），以至 $\sum m_{\text{分子}}=0$ ，所以 $M=0$ 。
- b. M 反映介质内某点的磁化强度，其值越大，与外磁场的相互作用越强，相应物质的磁性越强。

8.1.2 磁化电流

1. 定义：磁化状态下，由于分子电流的有序排列，磁介质中出现的宏观电流。
2. 与传导电流比较：
 - (1) 相同之处：在激发磁场和受磁场作用方面完全等效。
 - (2) 不同之处：前者无宏观移动，无焦耳效应，不必处于导体中。
3. 与 M 关系：

$$\oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \sum I', \quad (8-1-2)$$

即 M 在一闭合回路的环路积分等于该闭合回路中穿过的磁化电流之和（证明见附件 1-1）。

4. 推论：均匀磁化介质 M 为常量，所以 $\oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 。因而磁化电流只出现在非均匀磁化介质内部和介质界面上。

* 附件 1-1 式 (8-1-2) 的证明

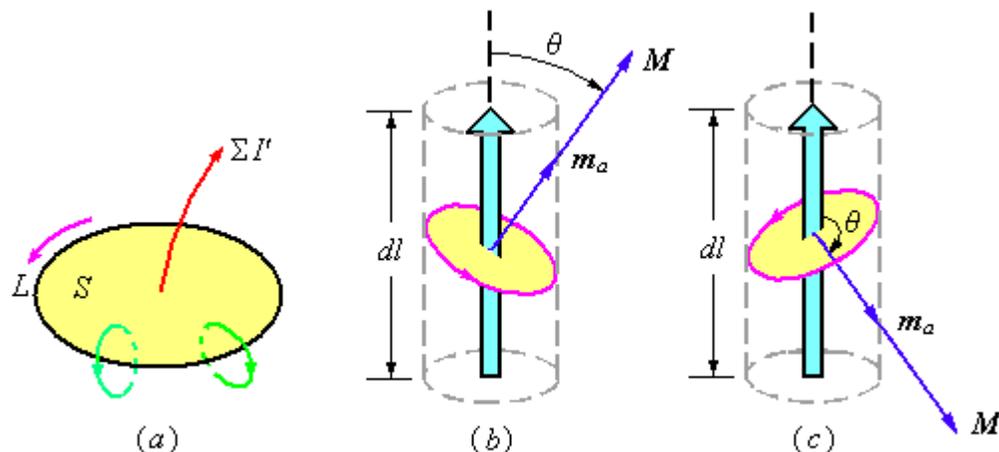


图8-1-1 磁化强度和磁化电流的关系

引入分子平均磁矩 $m_a = \frac{\sum m_{\text{分子}}}{n \Delta V}$ ，其中 n 为分子数密度，则 $M = nm_a$ 。再设由一等效分子电流产生，则 $m_a = I_a S_a$ 。而 ΔV

中各分子具有相同 m_a 。

考虑磁介质中任一闭合回路 L 和以它为周线的曲面 S (图 8-1-1 a)，设通过的总磁化电流为 $\Sigma I'$ ，其正向与绕行方向满足右手定则。显然，只有从 S 内穿过，且在 S 外闭合的分子电流对 $\Sigma I'$ 有贡献。

考虑 L 上的一段弧元 dl ，设该处 M 与 dl 夹角 θ 。当 $\theta < 90^\circ$ 时 (图 8-1-1 b)，对 $\Sigma I'$ 有贡献的分子，其中心应位于以 dl 为轴， $S_a \cos \theta$ 为底， dl 为高的圆柱体中，总数为 $n S_a \cos \theta dl$ ，产生的磁化电流 $= I_a n S_a \cos \theta dl = nm_a dl = M \cdot dl$ 。当 $\theta > 90^\circ$ 时 (图 8-1-1 c) 磁化电流为负，而 $\cos \theta$ 也为负，所以上式仍成立。

所以，穿过的总磁化电流满足 $\oint_L M \cdot dl = \Sigma I'$ 。(假设分子具有不同磁矩，证明该结论。)

§ 8-2 磁介质中静磁场的基本定理

8.2.1 高斯定理和环路定理

1. B 所满足的两定理:

设由传导电流 I_0 和磁化电流 I' 产生的磁感应强度分别是 B_0 和 B' , 则总磁感应强度为 $B=B_0+B'$ 。 B_0 和 B' 均由真空中的毕奥—萨伐尔—拉普拉斯定律确定 (为什么?), 因而它们均遵守真空中的高斯定理和安培环路定理:

$$\oiint_S \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \oint_L \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_0, \quad \oiint_S \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \oint_L \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I'。$$

所以 B 满足

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (8-2-1)$$

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_0 + \mu_0 \sum I'。 \quad (8-2-2)$$

2. 磁场强度:

为使安培环路定理中不出现磁化电流, 以方便计算, 引入辅助矢量

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}。 \quad (8-2-3)$$

则由式 (8-2-2) 和 (8-1-2) 可推出

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_0。 \quad (8-2-4)$$

式 (8-2-1) 和 (8-2-4) 是一般磁介质中的高斯定理和安培环路定理。

8.2.2 介质的磁化规律

1. 非铁磁性各向同性磁介质:

M 和 H 之间满足线性关系

$$M = \chi_m H, \quad (8-2-5)$$

代入式 (8-2-3) 可得磁介质性能方程

$$B = \mu \mu_0 H, \quad (8-2-6)$$

其中 χ_m 为磁化率, $\mu = 1 + \chi_m$ 为 (相对) 磁导率。

该类磁介质可分为三小类:

- a) 真空: $M = 0$, $\chi_m = 0$, $\mu = 1$ 。
- b) 顺磁质: $\chi_m > 0$, $\mu > 1$, χ_m 仅 $10^{-4} \sim 10^{-5}$ 。
- c) 抗磁质: $\chi_m < 0$, $\mu < 1$, $|\chi_m|$ 仅 $10^{-5} \sim 10^{-7}$ 。

2. 非铁磁性各向异性磁介质:

$M = \chi_m \cdot H$, $B = \mu_m \cdot \mu_0 H$, 其中 χ_m 和 μ 均为对称二阶张量。

3. 铁磁质: χ_m 很大, M 与 H 关系同磁化历史有关。类似于铁电体的电滞回线, 铁磁质有磁滞回线。图 8-2-1 a 和 b 分别是硬磁材料和软磁材料的磁滞回线。

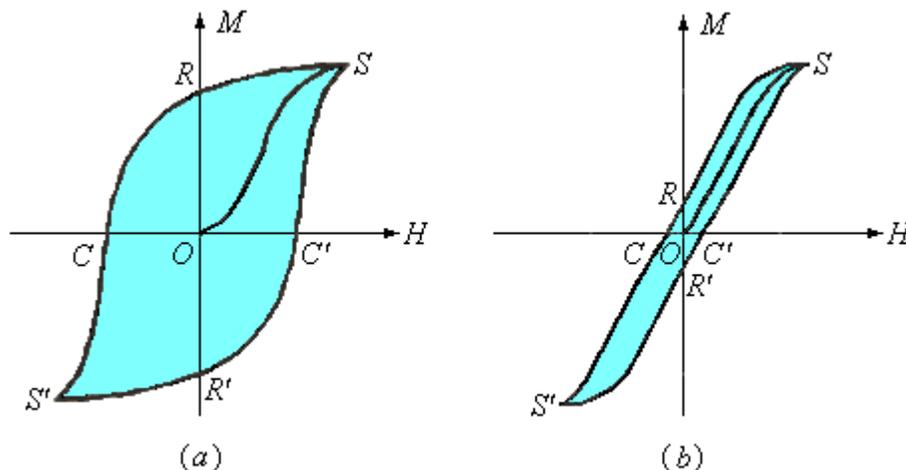


图8-2-1 磁滞回线

8.2.3 介质磁化的微观机制（经典）

1. 分子固有磁矩：分子内全部电子磁矩矢量和，其中电子磁矩包括轨道磁矩和自旋磁矩。（为什么可以忽略原子核磁矩？）
2. 顺磁效应：若分子固有磁矩不为零，在无外磁场时，分子热运动使各分子的磁矩取向不定，因而宏观磁矩为零。有外磁场时，分子受磁力矩 $m_{\text{分子}} \times B$ ，使 $m_{\text{分子}}$ 有顺着外场方向排列的趋势，产生与外场方向一致的磁化强度（定量证明见附件 2-1）。
3. 抗磁效应：无外磁场时，分子固有磁矩为零。在外场作用下，分子中每个电子的轨道运动将受影响，而引起附加轨道磁矩，它总与外场反向，产生与外场方向相反的磁化强度（定量证明见附件 2-2）。

4. 铁磁效应：系统的解释需要量子力学知识。铁磁质的磁性主要源于电子的自旋磁矩。在无外磁场时，铁磁质中电子的自旋磁矩可以在小范围内自发排列，形成自发磁化区——磁畴。它具有很强的磁化强度，但各磁畴方向不同，因而不显示宏观磁性。在外磁场作用下，磁化方向与外磁场接近的磁畴会扩大疆界，直至饱和，介质将显示很强的宏观磁性。

8.2.4 环路定理的应用举例

当磁场所在空间充满均匀各向同性介质，且电流分布（因而磁场分布）具有一维对称性时，可直接由安培环路定理求 H ，进而求 B 。

例 8-2-1 求一电流为 I 的无穷长直导线在磁导率为 μ 的无限均匀介质中的磁场分布。

[解] 由对称性， B 线是以长直导线为轴的圆， H 只与 r 有关，所以

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H = I, \quad H = \frac{I}{2\pi r}, \quad \therefore B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}, \text{ 为真空中的 } \mu \text{ 倍。}$$

例 8-2-2 设匝数为 N 、电流为 I 、平均半径为 R 的细螺绕环内填满磁导率为 μ 的均匀各向同性磁介质，求管内磁感应强度的大小。

[解] 对管内与环同轴的半径为 R 的圆形回路，有

$$2\pi R H = NI, \quad H = \frac{NI}{2\pi R} = nI,$$

$$\therefore B = \mu\mu_0 nI, \text{ 是真空中的 } \mu \text{ 倍。}$$

以上两例的结果包含了一普遍结论，即无限均匀各向同性介质中的磁感应强度为真空中的 μ 倍，原因是出现了与传导

电流同方向的磁化电流：

$$\Sigma I = \Sigma I_0 + \Sigma I' = \mu \Sigma I_0, \quad \therefore \Sigma I' = (\mu - 1) \Sigma I_0.$$

*附件 2-1 顺磁效应的微观机制

设诸分子具有相同大小的固有磁矩 m_0 ，方位角 φ 任意的分子数密度为 $dn(\theta)$ ， m_0 方向角处于 $\theta \sim \theta + d\theta$ ， $\varphi \sim \varphi + d\varphi$ 之中的分子数密度为 $dn(\theta, \varphi)$ 。

无外场时， $dn(\theta, \varphi) = \frac{n_0 \sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi}$ ，呈各

$$dn(\theta) = \int_0^{2\pi} dn(\theta, \varphi) = \frac{n_0 \sin \theta d\theta}{2}.$$

当存在外磁场 B 时，取 B 为 m_0 的 z 方向，则其中 ε_p 是分子在外磁场中的势能， $\varepsilon_p = -m_0 B \cos \theta$ 。

常温下 $|\varepsilon_p| \ll kT$ ，所以 $dn(\theta) = C \left(1 + \frac{m_0 B \cos \theta}{kT} \right) \sin \theta d\theta$ 。由归一化条件 $n_0 = \int_0^\pi dn(\theta)$ 求得 $C = n_0/2$ ，所以

$$dn(\theta) = \frac{n_0}{2} \left(1 + \frac{m_0 B \cos \theta}{kT} \right) \sin \theta d\theta. \quad (8-2-8)$$

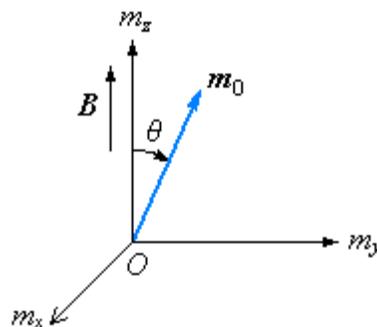


图 8-2-2 顺磁效应

子数密度为 n_0 ， m_0 的极角处于 $\theta \sim \theta + d\theta$ ，方位角 $\varphi \sim \varphi + d\varphi$ 之中的分子数密度为

向同性分布。所以

(8-2-7)

$dn(\theta) = C e^{\frac{\varepsilon_p}{kT}} \sin \theta d\theta$ ，即呈玻尔兹曼分布，

于是 $M = \int_0^\pi m_0 \cos\theta dn(\theta) = \frac{n_0 m_0^2}{3kT} B \approx \frac{\mu_0 n_0 m_0^2}{3kT} H$ 。由对称性， M 的方向与 H 一致，所以 $M = \frac{\mu_0 n_0 m_0^2}{3kT} H$ ，即

$$\chi_m = \frac{\mu_0 n_0 m_0^2}{3kT} \quad (8-2-9)$$

可见磁化率与温度成反比，称为居里定律。

讨论：

- 在上述推导中假设 $m_0 B \ll kT$ 成立，所以磁场不能太强，温度不能过低。
- 实验表明，式（8-2-9）对气态顺磁质适用，但对某些液态和固态顺磁质不成立。

（证明：当 $m_0 B \ll kT$ 不成立时， C 的一般表达式为 $C = \frac{n_0 m_0 B}{2kT} \operatorname{csch} \frac{m_0 B}{kT}$ 。）

*附件 2-2 抗磁效应的微观机制

考虑一电子以角速度 ω 、轨道半径 r 绕核运动，则

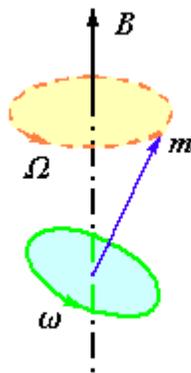
$m = \pi r^2 I = -e r^2 \omega / 2$ ，其矢量形式为

$$m = -e r^2 \omega / 2 \quad (8-2-10)$$

在外磁场的力矩

$$L = m \times B \quad (8-2-11)$$

作用下，该电子的轨道面绕 B 进动。通常外磁场作用远



轨道电流 $I = -e\omega/2\pi$ ，轨道磁矩

小于分子内的库仑作用，以至进动角速

图8-2-3 抗磁效应

度 $\Omega \ll \omega$ ，因而近似有

$$L = m_e r^2 \Omega \times \omega, \quad (8-2-12)$$

其中 m_e 为电子质量。将式 (8-2-10) 和 (8-2-11) 代入式 (8-2-12)，可得

$$\Omega = \frac{e}{2m_e} B. \quad (8-2-13)$$

可见，电子轨道面的进动角速度总与 B 平行，而与电子轨道取向及电子旋转方向、快慢无关。但电子荷负电，所以由进动产生的附加磁矩总反平行于 B 。

设电子轨道面各取向等几率，则电子在以 r 为半径的球面上等几率分布，形成一均匀球面电荷， $\sigma_e = -\frac{e}{4\pi r^2}$ 。各种轨道取向的电子以 Ω 进动的平均效应等效于球面电荷以 Ω 自转，其磁矩为（试计算之）

$$m = -\frac{er^2}{3} \Omega = -\frac{e^2 r^2}{6m_e} B. \quad (8-2-14)$$

设抗磁质分子数密度为 n_0 ，一个分子中有 Z 个电子，则磁化强度

$$M = n_0 Z \bar{m} = -\frac{n_0 z e^2 \bar{r}^2}{6m_e} B \approx -\frac{\mu_0 n_0 Z e^2 \bar{r}^2}{6m_e} H, \quad \text{其中 } \bar{r}^2 \text{ 为各种可能的电子轨道半径的方均根值。所以}$$

$$\chi_m = -\frac{\mu_0 n_0 Z e^2}{6m_e} \bar{r}^2, \quad (8-2-15)$$

与温度无关。

式 (8-2-15) 与实验相当符合。

§ 8-3 边值关系与唯一性定理

在求解包含不同磁介质的体系时，需要知道磁介质界面上磁场的边值关系。

8.3.1 磁感应强度 B

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (8-3-1)$$

即 B 的法向分量连续（证明见附件 3-1）。

8.3.2 磁化强度矢量 M

$$\mathbf{i}' = \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) \quad (8-3-2)$$

（证明见附件 3-2）。

8.3.3 磁场强度 H

类似于 M 边值关系的推导，由安培环路定理可得

$$\mathbf{i}_0 = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)。 \quad (8-3-3)$$

除了理想导体和超导体外，通常 $\mathbf{i}_0=0$ ，所以

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0, \quad (8-3-4)$$

即 H 的切向分量连续。(注意: H 的切向分量有两个分量, 边值关系要求各分量在边界上都要相等, 也即 H 的切向分量不但大小相同, 方向也相同。)

8.3.4 静磁场的唯一性定理阐述

1. 表述: 当磁场中有磁介质时, 事先难以确知磁化电流分布, 因而不便直接由毕-萨-拉定律计算磁场。唯一性定理保证, 由高斯定理、安培环路定理及 $B \sim H$ 关系, 加上必要的附加条件, 就可以唯一确定静磁场。该定理能确保猜解的正确性。

(详见本节后续内容及§8-7。)

2. 简单情形下的附加条件:

(1) 设磁场空间为一封闭曲面 S 包围。若 S 有限, 则给定 B_{Sn} , 且满足 $\iint_S B_{Sn} dS = 0$; 若 S 无限, 则要求 B_S 趋于 0。

(2) 磁介质各向同性, μ 已知, 但可以出现非均匀性和界面。

(3) 导体中的传导电流分布确知。

3. 证明: 若解不唯一, 不妨设为 B_1 、 H_1 和 B_2 、 H_2 。令 $B = B_1 - B_2$, $H = H_1 - H_2$, 则 B 和 H 对应传导电流为 0, 而 S 面上 $B_{Sn}=0$ 或 $B_S=0$ 。对有限 S , 由于 B 和 H 线不可能起、止于, 而只能在 S 内闭合, 所以 S 内必有传导电流, 与标下划线一句矛盾。对 S 无限情形, B 和 H 也不可能在 S 内闭合, 因而必起、止于无穷远, 则仍有 S 内传导电流非 0 的矛盾结果。可见, 必须 $B = 0$, $H = 0$, 也即 $B_1 = B_2$, $H_1 = H_2$ 。

8.3.5 分区均匀各向同性介质中的静磁场

1. 介质界面与磁感应线重合

由唯一性定理可证,

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}_0 / \mu_0, \quad (8-3-5)$$

其中 \mathbf{B}_0 是去掉介质时传导电流在真空中产生的磁感应强度 (证明见附件 3-3)。

当传导电流对称分布时, 由 $\oint \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_0$ 可直接计算 \mathbf{B}_0 , 而各介质中的磁场

$$\mathbf{B}_i = \mu_i \mu_0 \mathbf{H} = \mu_i \mathbf{B}_0. \quad (8-3-6)$$

2. 介质界面与磁感应线垂直

与 \mathbf{B} 线处处正交的曲面称“等磁势面”, 以其为分界, 填入不同的均匀各向同性介质。由唯一性定理, 只要在填入的过程中总电流分布形式不变, \mathbf{B} 线的几何位形必也保持不变, 即 $\mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}_0$, 其中 \mathbf{B}_0 是无介质时的磁感应强度 (证明见附件 3-4)。

求解步骤: 由

$$\alpha \sum_i \int_{L_i} \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_i \mu_0} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_0 \quad (8-3-7)$$

定出 α , 从而得到 \mathbf{B} 。特别地, 对一维对称情形, 可直接由

$$\oint_L \frac{\mathbf{B}}{\mu_i} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_0 \quad (8-3-8)$$

得到 \mathbf{B} , 而

$$\mathbf{H}_i = \frac{1}{\mu_i \mu_0} \mathbf{B}. \quad (8-3-9)$$

8.3.6 例子

例 8-3-1 一圆环状磁介质与一无穷长直导线共轴（图 8-3-1）。设磁介质磁导率为 μ ，直导线电流强度为 I ，求介质内外空间的电流。

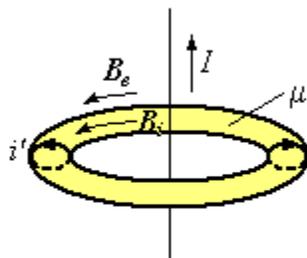


图 8-3-1 直线电流和磁介质圆环

线共轴（图 8-3-1）。设磁介质磁导率为 μ ，磁感应强度的分布和介质表面的磁化面

的情形。撤去磁介质时的磁场 $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ，

[解] 本题属于介质界面与磁感应线重合

由式 (8-3-6) 求得介质内外空间 $B_i = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}$ ， $B_e = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ 。

由式 (8-3-2)，结合式 (8-2-3) 和 (8-3-4)，求得界面磁化电流

$$i' = M_i - M_e = \frac{1}{\mu_0} (B_i - B_e) = \frac{(\mu - 1)I}{2\pi r}。$$

例 8-3-2 在一同轴电缆（内、外导体半的两种磁介质，各占一半空间，且介设通过电缆的电流强度为 I ，求介质中流分布。

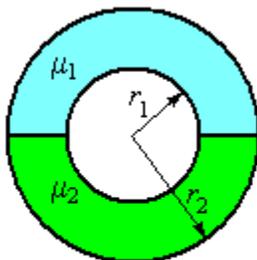


图 8-3-2 同轴电缆中的分区均匀介质

径分别为 r_1 、 r_2 ）中填满磁导率为 μ_1 和 μ_2 质平面为通过电缆轴的平面（图 8-3-2）。的磁场分布和介质—导体毗连面上的电

直的情况。

[解] 本题属于介质界面与磁感应线垂

取半径为 r ($r_1 < r < r_2$) 的圆形回路, 由一维对称性, $\frac{B}{\mu_1} \pi r + \frac{B}{\mu_2} \pi r = \mu_0 I$,

$$\therefore B = \frac{\mu_0 \mu_1 \mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu)r}, \quad \therefore H_1 = \frac{B}{\mu_0 \mu_1} = \frac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu)r}, \quad H_2 = \frac{\mu_1 I}{\pi(\mu_1 + \mu)r},$$

$$M_1 = \frac{B}{\mu_0} - H_1 = \frac{\mu_2(\mu_1 - 1)I}{\pi(\mu_1 + \mu)r}, \quad M_2 = \frac{\mu_1(\mu_2 - 1)I}{\pi(\mu_1 + \mu)r}.$$

在 $r < r_1$ 和 $r > r_2$ 区域, $B = H = M = 0$ 。

$$\text{在 } r=r_1 \text{ 处, } i'_1 = \begin{cases} M_1|_{r=r_1} = \frac{\mu_2(\mu_1 - 1)I}{\pi(\mu_1 + \mu)r_1}, & \text{介质1处,} \\ M_2|_{r=r_1} = \frac{\mu_1(\mu_2 - 1)I}{\pi(\mu_1 + \mu)r_1}, & \text{介质2处,} \end{cases}$$

$$\text{在 } r=r_2 \text{ 处, } i'_2 = \begin{cases} M_1|_{r=r_2} = \frac{\mu_2(\mu_1 - 1)I}{\pi(\mu_1 + \mu)r_2}, & \text{介质1处,} \\ M_2|_{r=r_2} = \frac{\mu_1(\mu_2 - 1)I}{\pi(\mu_1 + \mu)r_2}, & \text{介质2处.} \end{cases}$$

可见, 尽管传导面电流和磁化面电流去磁介质情形有相同的磁感应强度分布形式。

*附件 3-1 证明 B 的边值关系

如图 8-3-3, 设二介质界面为 S , 在 S 上取 ΔS , ΔS 为截面作一柱形高斯面, 其两底分别位于二介

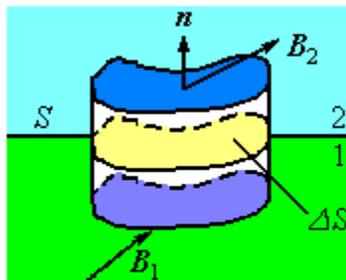


图8-3-3 B 的法向分量连续

分布不均, 但二者之和仍各向同性, 也即与撤

n 为由介质 1 指向 2 的法向单位矢量。以质中, 柱高趋于 0。由高斯定理

$$B_{1n}\Delta S - B_{2n}\Delta S = 0, \quad \therefore \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0.$$

*附件 3-2 证明 M 的边值关系

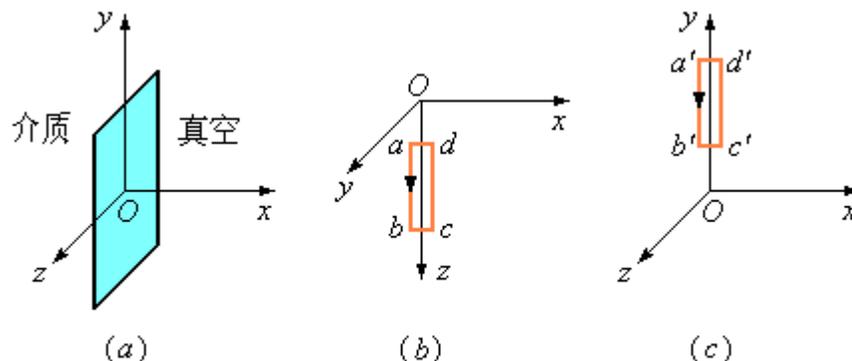


图8-3-4 磁化强度和磁化面电流的关系

如图 8-3-4, 在两介质界面上取任一面积元, 使之位于 $yo z$ 平面, x 轴平行于由介质 1 指向 2 的法线。在 xoz 平面作横跨 y 轴的矩形回路 $abcd$, 其中 ab 和 cd 分别在介质 1、2 内, 绕行方向与 y 轴满足右手定则, 且 $ad \ll ab$ 。由 $\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \sum I'$ 可得 $(M_{1z} - M_{2z})ab = i'_y ab$, 所以 $i'_y = M_{1z} - M_{2z}$ 。类似, 在 xoy 平面作横跨 y 轴的矩形回路 $a'b'c'd'$, 其中 $a'b'$ 和 $c'd'$ 分别在介质 1、2 内, 绕行方向与 y 轴满足右手定则, 且 $a'b' \ll c'd'$, 则 $-(M_{1y} - M_{2y})a'b' = i'_z a'b'$, 所以 $i'_z = M_{2y} - M_{1y}$ 。综上所述, 有 $\mathbf{i}' = \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)$ 。

*附件 3-3 证明介质界面与磁感应线重合时 $\mathbf{H} = \mathbf{B}_0 / \mu_0$

由唯一性定理可知, 只需证明 \mathbf{H} 和 \mathbf{B}_0 / μ_0 满足相同的安培环路定理和高斯定理即可。

由 $\oint \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_0$ ，可得 $\oint \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} d\mathbf{l} = \sum I_0$ ，可见 \mathbf{H} 和 \mathbf{B}_0/μ_0 确实满足相同的安培环路定理。

显然 $\oiint_S \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ，所以只需证明 $\oiint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 。

(1) 当 S 完全位于第 i 区介质内，则

(2) 若 S 跨若干介质区，如图 8-3-5，则该介质区与相邻介质区的边界构成

$\oiint_{S_i} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 。由于介质界面与 \mathbf{B} 线

线与 \mathbf{B} 线平行，所以界面上 \mathbf{H} 的通

$\oiint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \oiint_{S_i} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 。

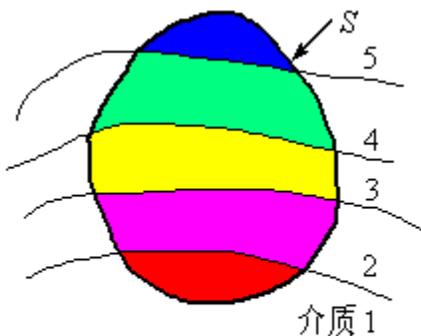


图8-3-5 分区均匀介质的高斯定理

$$\oiint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_i \mu_0} \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0。$$

S 中处于第 i 介质区的部分加上一闭合高斯面 S_i ，由(1)知，重合，而在各向同性介质中， \mathbf{H} 量为零。故而

*附件 3-4 证明介质界面与磁感应线垂直时 $\mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}_0$

设 \mathbf{B} 的位形不变，则 \mathbf{B} 垂直于介质界面，因而 \mathbf{M} 也与界面垂直，磁化电流不可能出现在介质界面上，而只能分布于介质和导体的界面。只要传导电流只分布在导体表面，而且能自由改变其分布，以致最终与磁化电流补偿，就可保证总电流分布形式不变，即 $\mathbf{I} = \alpha \mathbf{I}_0$ 。这一结果与所设的 $\mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}_0$ 自恰。

§ 8-4 磁路定理

8.4.1 磁路与电路的对比

1. 直流电路基本方程

(1) 稳恒条件

$$\oiint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (8-4-1)$$

(2) 欧姆定律

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}', \quad (8-4-2)$$

其中 $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{K}$,

(3) 电动势

$$= \oint \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}。 \quad (8-4-3)$$

2. 静磁场

(1) 高斯定理

$$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (8-4-4)$$

(2) 介质性能方程

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}, \quad (8-4-5)$$

(3) 安培环路定理

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_0 = m, \quad (8-4-6)$$

m 称为磁动势。

3. 对应关系

作如下对应: $j \leftrightarrow \mathbf{B}$, $E' \leftrightarrow \mathbf{H}$, $\sigma \leftrightarrow \mu\mu_0$, $\leftrightarrow m$, 则电路与磁路问题同构。可进一步推得:

(1) 电导率为 σ 的电流管与绝对磁导率为 $\mu\mu_0$ 的磁感应管相对应,

(2) 电流管的 $I=jS$ 与磁感应管的 $\Phi_B=BS$ 相对应,

(3) 一闭合电流管的电阻 $R = \oint \frac{dl}{\sigma S}$ 与一闭合磁感应管的磁阻

$$R_m = \oint \frac{dl}{\mu\mu_0 S} \quad (8-4-7)$$

相对应。仿照电流管称为电路, 磁感应管也称磁路。若 μ 和 S 沿磁路分段均匀, 则

$$R_m = \sum_i R_{mi}, \quad R_{mi} = \frac{l_i}{\mu_i \mu_0 S_i}。 \quad (8-4-8)$$

8.4.2 磁路定理

$$m = \Phi_B R_m = \Phi_B \sum_i R_{mi}, \quad (8-4-9)$$

其中 $\Phi_B R_{mi}$ 为第 i 段磁路的磁势降。即闭合磁路的磁动势等于各段磁路的磁势降之和。

(提示: $m = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}}{\mu\mu_0} = \Phi_B \oint \frac{dl}{\mu\mu_0 S} = \Phi_B R_m$)。

8.4.3 例子

例 8-4-1 日光灯镇流器可以等效为一带气隙的矩形磁路。设铁芯磁导率为 μ ，截面积为 S ，长度为 l ，线圈匝数为 N ，电流为 I_0 ，求量减至一半时的气隙厚度 d 。

[解] 无气隙时 $NI_0 = \Phi_B \frac{l}{\mu\mu_0 S}$ ，
 $\therefore \Phi_B = \frac{\mu\mu_0 S NI_0}{l}$ 。

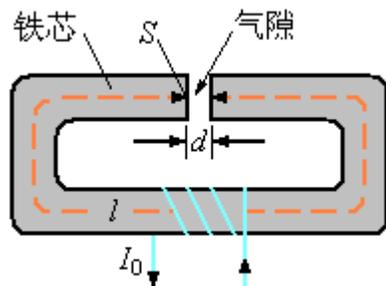


图8-4-1 带气隙的磁路

矩形磁路。设铁芯磁导率为 μ ，截面积无气隙时铁芯中的磁通量以及该磁通

当存在气隙，使磁通量减半时， $NI_0 = \frac{\Phi_B}{2} \left(\frac{l}{\mu\mu_0 S} + \frac{d}{\mu_0 S} \right)$ ， $\therefore d = l\mu$ 。

§ 8-5 电流系统的磁能与磁场的能量

8.5.1 N 个载流线圈系统的磁能

1. 元过程：

忽略所有线圈的电阻，各线圈 $I_i=0$ 时记为零能态，各线圈自感和彼此间的互感分别为 L_i 和 M_{ij} 。

当第 i 个线圈的电流由 0 渐增到 I_i 时，感应电动势为

$$e_i = -L_i \frac{dI_i}{dt} - \sum_{k \neq i}^N M_{ik} \frac{dI_k}{dt}, \quad (8-5-1)$$

电源反抗 i 做功

$$dA'_i = - \int I_i dt = L_i I_i dI_i + \sum_{k \neq i}^N M_{ik} I_i dI_k \circ \quad (8-5-2)$$

对 N 个线圈，电源作总元功

$$dA' = \sum_i^N L_i I_i dI_i + \sum_{\substack{i,k \\ k \neq i}}^N M_{ik} I_i dI_k \circ \quad (8-5-3)$$

$$\because M_{ik} = M_{ki}, \quad \therefore M_{ik} I_i dI_k + M_{ki} I_k dI_i = M_{ik} d(I_i I_k),$$

$$\therefore dA' = \sum_i^N L_i I_i dI_i + \sum_{i < k}^N M_{ik} d(I_i I_k) \circ \quad (8-5-4)$$

2. 系统静磁能

定义电源所作总功为系统的静磁能，则

$$W_m = A' = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k \\ i \neq k}}^N M_{ik} I_i I_k + \frac{1}{2} \sum_i^N L_i I_i^2, \quad (8-5-5)$$

其中首项是 N 个线圈的互感磁能，次项是自感磁能。

讨论：

- (1) 上式中指标 i 、 k 对称，可见 W_m 与各线圈电流的建立过程无关。
- (2) 若令 $W_m = L_i$ ，则形式更简洁：

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^N M_{ik} I_i I_k \circ \quad (8-5-6)$$

(3) 设 $\Phi_m = M_{ki}I_k = M_{ik}I_k$ 表示第 k 个线圈电流的磁场通过第 i 个线圈的磁通, 再令 $\Phi_i = \sum_k^N \Phi_{ki} = \sum_k^N M_{ik}I_k$ 表示所有线圈通过第 i 个线圈的总磁通, 则

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_i^N I_i \Phi_i. \quad (8-5-7)$$

8.5.2 载流线圈在外磁场中的磁能

1. 二载流线圈情形:

总磁能:

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2, \quad (8-5-8)$$

互能:

$$W_{12} = M_{12} I_1 I_2 = \Phi_{12} I_2 = I_2 \iint_{S_2} \vec{B}_1(\vec{r}_2) \cdot d\vec{S}. \quad (8-5-9)$$

其中互能表达式的第三式, 已将线圈 1 看作外磁场源。

2. 定义: 载流线圈在外磁场中的磁能, 定义为该线圈与产生外磁场的线圈之间的互能。
3. 均匀外磁场中载流线圈和非均匀外磁场中的小载流线圈的磁能:

$$W_{12} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} I_2 = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}. \quad (8-5-10)$$

(与电偶极子在外电场中的静电能 $W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ 相比, 差一负号, 为什么?)

4. N 个载流线圈在外磁场中的磁能:

$$W_m = \sum_k^N I_k \iint_{S_k} \mathbf{B}(\mathbf{r}_k) \cdot d\mathbf{S}。 \quad (8-5-11)$$

当外场均匀时，上式简化为

$$W_m = \mathbf{B} \cdot \left(\sum_k^N I_k \mathbf{S} \right) = \mathbf{m}_t \cdot \mathbf{B}， \quad (8-5-12)$$

其中 \mathbf{m}_t 是 N 个线圈的总磁矩。

8.5.3 磁场的能量与能量密度

1. 螺绕环磁能:

设螺绕环的横截面为 S ，体积为 V ，环内磁介质的磁导率为 μ ，线圈匝数为 N ，单位长度匝数为 n ，则环内 $B = \mu\mu_0 nI$ ，

$\Phi_m = NS\mu\mu_0 nI = \mu\mu_0 n^2 VI$ ，所以自感系数 $L = \mu\mu_0 n^2 V$ 。

螺绕环的磁能 $W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu\mu_0 n^2 I^2 V = \frac{1}{2} VBH$ ，磁能密度

$$w_m = \frac{1}{2} BH。 \quad (8-5-13)$$

2. 线性无损耗介质的一般情形:

$$W_m = \iiint_V w_m dV， \quad (8-5-14)$$

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}， \quad (8-5-15)$$

其中首项是宏观静磁能密度，次项是磁化能密度。

8.5.4 非线性介质的磁滞损耗

1. 螺绕环体系的元功分析

设在 dt 时间内环内磁场从 \mathbf{B} 变为 $\mathbf{B}+d\mathbf{B}$ ，则穿过线圈的总磁通 $d\psi = NSdB$ ，电源克服电动势所作元功 $da' = - Idt = Id\psi = NSIdB = VHdB$ ，单位体积元功

$$da' = HdB。 \quad (8-5-16)$$

2. 一般磁介质的元功：

$$da' = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}， \quad (8-5-17)$$

又 $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ ，所以

$$da' = d\left(\frac{\mu_0}{2} H^2\right) + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}。 \quad (8-5-18)$$

可见，类似于电介质情形，在一般磁介质中，电源所作功一部分用来增加宏观静磁能，一部分对介质作磁化功。

3. 磁化功与磁化能的关系

(1) 线性无损耗介质： $M_i = \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} H_j$ ， $\chi_{ij} = \chi_{ji}$ ，所以

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H} = d\left(\frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}\right)， \quad (8-5-19)$$

即磁化功完全转化为磁化能。

(2) 非线性磁介质，以铁磁体为例：当磁化状态沿磁滞回线（参考图 8-2-1）绕行一周时，电源对单位体积的铁磁体作功

$$a' = \oint da' = \oint \mu_0 H dM, \quad (8-5-20)$$

恰为磁滞回线的面积。由于绕行一周时磁化状态未变，磁化功完全转化为热量，称为磁滞损耗。

8.5.5 利用磁能求磁力

在一些情况下，利用安培公式求磁力不方便，可以考虑利用磁能求磁力。

1. 电流不变情形

(1) 考察 N 个载流线圈组成的系统，仿照由静电能求静电力的方法，假设某线圈有虚位移 $\delta \mathbf{r}$ ，则磁力做功

$$\delta A = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z. \quad (8-5-21)$$

若在虚过程中各线圈电流不变，外部电源需反抗感应电动势做功 $\delta A'$ 。磁力做功使系统磁能减少，电源做功是系统磁能增加，系统净磁能变化为

$$(\delta W_m)_I = \delta A' - \delta A. \quad (8-5-22)$$

(2) δA 与 δW_m 关系：设虚过程使第 i 个线圈的磁通变化 $\delta \Phi_i$ ，则

$\delta A'_i = - \int I_i dt = I_i \delta \Phi_i$ ，电源所作总功

$$A' = \sum_{i=1}^N \delta A'_i = \sum_{i=1}^N I_i \delta \Phi_i. \quad (8-5-23)$$

而由 $W_m = \frac{1}{2} \sum_i I_i \Phi_i$ ，可得

$$(\delta W_m)_I = \frac{1}{2} \sum_i I_i \delta \Phi_i = \frac{1}{2} \delta A' = \delta A. \quad (8-5-24)$$

即当所有载流线圈电流不变时，电源所作功恰为系统磁能变化的 2 倍，而磁力所作功等于系统磁能的增加。

(3) 磁力

$$\mathbf{F} = (\nabla W_m)_I, \quad F_x = \left(\frac{\partial W_m}{\partial x} \right)_I, \quad (8-5-25)$$

而磁力矩

$$L_\theta = \left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta} \right)_I. \quad (8-5-26)$$

2. 进一步讨论：

- (1) 对线性无损耗磁介质，上述诸式也成立，只是 W_m 中还包括介质磁化能；
- (2) 在研究载流导线在外磁场中所受磁力和磁力矩时，不必计入二者自能，只需考虑导线在外磁场中的静磁能；
- (3) 外磁场中载流线圈上的磁力和磁力矩：线圈的静磁能

$$W_m = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = mB \cos \theta, \quad (8-5-27)$$

电流不变即线圈的磁矩不变，所以

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})_m = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \quad (8-5-28)$$

(注意： $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ 。) 而

$$\mathbf{L}_\theta = \left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta} \right)_m \mathbf{e}_\theta = -mB \sin \theta \mathbf{e}_\theta = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (8-5-29)$$

(注意： \mathbf{e}_θ 为由 \mathbf{B} 到 \mathbf{m} 的右手螺旋方向，恰与 $\mathbf{m} \times \mathbf{B}$ 方向相反。)

3. 磁通量不变情形

若产生虚位移时各线圈 Φ_i 不变, 则在虚过程中无感应电动势, 电源不作功, $(\delta W_m)_{\Phi} = -\delta A$, 所以磁力和磁力矩分别为

$$F = -(\nabla W_m)_{\Phi}, \quad (8-5-30)$$

$$L_{\theta} = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta}\right)_{\Phi}. \quad (8-5-31)$$

8.5.6 例子

例 8-5-1 一同轴电缆, 中心是半径为 a 的圆柱形的导线, 外部是内半径为 b 、外半径为 c 的导体圆筒, 在内、外导体之间充满磁导率为 μ 的介质, 电流在内、外导体中的方向如图 8-5-1 所示。设电流沿截面均匀分布, 求这电缆单位长度的自感系数。

[解] 原来求自感的步骤是: $B \rightarrow \Phi \rightarrow L$,

不便按此法求解。

能量的观点: 由 $B, H \rightarrow w_m \rightarrow W_m \rightarrow L$ 。

考虑长 l 的一段电缆, 将其分为如图

I 区: $0 \leq r \leq a$, $\mu=1$ (一般导体 $\mu \sim 1$),

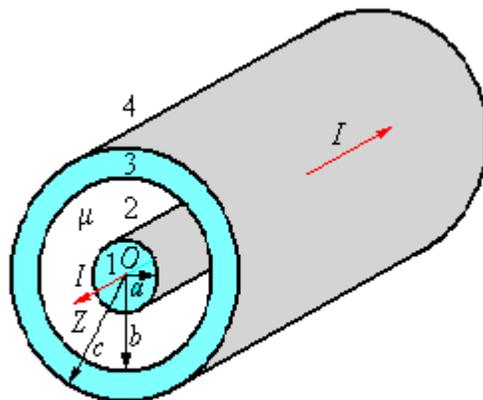


图 8-5-1 同轴电缆

此处不同区域的环路穿过的电流不同,

所示的四个区域, 则

$$H_1 = \frac{Ir}{2\pi a^2}, \quad B_1 = \mu_0 H_1,$$

$$w_{m1} = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4}, \quad W_{m1} = l \int_0^a \int_0^{2\pi} r d\phi dr w_{m1} = \frac{\mu_0 l I^2}{16\pi};$$

$$\text{II 区: } a \leq r \leq b, \quad H_2 = \frac{I}{2\pi r}, \quad B_2 = \mu\mu_0 H_2,$$

$$w_{m2} = \frac{\mu\mu_0 I^2}{6\pi r^2}, \quad W_{m2} = l \int_a^b \int_0^{2\pi} r d\phi dr w_{m2} = \frac{\mu\mu_0 l I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a};$$

$$\text{III 区: } b \leq r \leq c, \quad \sum I = I \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}, \quad H_3 = \frac{I}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}, \quad B_3 = \mu_0 H_3,$$

$$w_{m3} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2} \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right)^2, \quad W_{m3} = l \int_b^c \int_0^{2\pi} r d\phi dr w_{m3} = \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi(c^2 - b^2)} \left[c^4 \ln \frac{b}{a} - \frac{(c^2 - b^2)(3c^2 - b^2)}{4} \right];$$

$$\text{IV 区: } r \geq c, \quad \sum I = 0, \quad H_4 = 0, \quad B_4 = 0, \quad W_4 = 0.$$

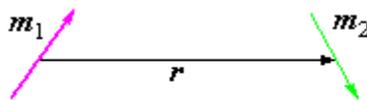
由 $\sum_{i=1}^4 W_{mi} = \frac{1}{2} l I^2$, 电缆单位长度自感系数

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\mu \ln \frac{b}{a} + \left(\frac{c^2}{c^2 - b^2} \right)^2 \ln \frac{c}{b} - \frac{c^2}{2(c^2 - b^2)} \right].$$

例 8-5-2 求相距 r 、磁矩为 m_1 和 m_2 的两磁偶极子

[解] 磁偶极子磁场

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \mathbf{m}_1 + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r,$$



子相互作用力。

图8-5-2 两磁偶极子的相互作用

$$\therefore W_m = \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{B}_1 = \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3}(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2) + \frac{3\mu_0}{4\pi r^3}(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{e}_r)(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{e}_r),$$

$$\therefore \mathbf{F}_{12} = (\nabla W_m)_m = \frac{3\mu_0}{4\pi r^4}(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 - 5m_{1r}m_{2r})\mathbf{e}_r + \frac{3\mu_0}{4\pi r^4}(m_{2r}\mathbf{m}_1 + m_{1r}\mathbf{m}_2).$$

可证： $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ ，但 \mathbf{F}_{12} 表达式的次项一般不沿二磁偶极子连线。可见，不但电流元之间的磁作用力不满足牛顿第三定律，二闭合电流间的静磁力也不完全满足该定律。其原因类似于电偶极子间的静电力情形。

例 8-5-3 具有恒定的高磁导率 μ 的马蹄形磁介质，与一磁导率相同的条形磁介质组成一磁路，它们的横截面为矩形，面积为 A ，长度为 l 。马蹄形磁介质上绕有 N 匝导线，通以恒定电流 I 。求马蹄形与条形磁介质之间的吸力。

[解] 设马蹄形与条形磁介质有小间隙 x ，

H_g 和 H_m ，由磁路定理， $H_m l + 2H_g x = NI$ ，

$H_g = \mu H_m$ 。

解得

$$H_m = \frac{NI}{l + 2\mu x}, \quad B_m = \frac{\mu\mu_0 NI}{l + 2\mu x},$$

$$\Psi = N\Phi = NB_m A = \frac{\mu\mu_0 AN^2 I}{l + 2\mu x},$$

$$W_m = \frac{1}{2} I\Psi = \frac{\mu\mu_0 AN^2 I^2}{2(l + 2\mu x)},$$

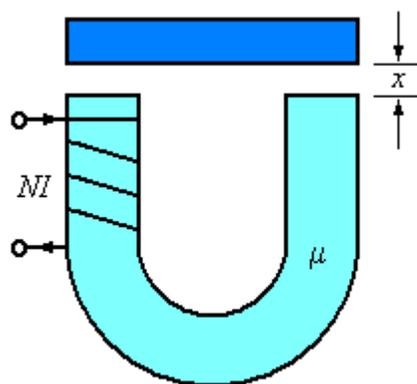


图 8-5-3 马蹄形与条形磁介质相互作用

匝导线，通以恒定电流 I 。求马蹄形

间隙和磁介质内的磁场强度分别为
由 B 连续，得 $\mu\mu_0 H_m = \mu_0 H_g$ ，即

$$\therefore F = \left(\frac{\partial W_m}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = -\mu^2 \mu_0 A \frac{N^2 I^2}{l^2} \quad (\text{吸引力})。$$

§ 8-6 磁荷法

目前，实验上尚未发现磁荷，因而与电流法相比，磁荷法并无真实的物理基础，但是作为一种解题方法，适用于无传导电流空间的静磁场问题。

8.6.1 磁荷观点下的静磁场规律

1. 点磁荷相互作用的库仑定律

(1) 令条形磁铁 N 极带正磁荷， S 极带负磁荷，当两磁极的尺寸远小于它们之间的距离时，可当作点磁荷，相互间磁作用力满足库仑定律

$$\mathbf{F} = \frac{q_{m0} q_m}{4\pi\mu_0 r^3} \mathbf{r}。 \quad (8-6-1)$$

由此式推得 q_m 的单位是 $\text{N}\cdot\text{m}/\text{A}$ 。

(2) 定义磁场强度 $\mathbf{H}=\mathbf{F}/q_{m0}$ ，对点磁荷有

$$\mathbf{H} = \frac{q_m}{4\pi\mu_0 r^3} \mathbf{r}。 \quad (8-6-2)$$

对连续磁荷分布，引入体磁荷密度 ρ_m 、面磁荷密度 σ_m 和线磁荷密度 λ_m ，由叠加原理，则磁场强度分别为

$$\mathbf{H} = \iiint_V \frac{\rho_m}{4\pi\mu_0 r^3} \mathbf{r} dV, \quad (8-6-3)$$

$$\mathbf{H} = \iint_S \frac{\sigma_m}{4\pi\mu_0 r^3} \mathbf{r} dS, \quad (8-6-4)$$

$$\mathbf{H} = \int_L \frac{\lambda_m}{4\pi\mu_0 r^3} \mathbf{r} dl. \quad (8-6-5)$$

2. 真空中静磁场的高斯定理和环路定理

仿照静电场的推导方法，由真空中的磁库仑定律，可得

$$\oiint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \sum q_m, \quad (8-6-6)$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (8-6-7)$$

由于环路积分为零，可引入“矢势” Φ_m ，定义为

$$\mathbf{H} = -\nabla\Phi_m. \quad (8-6-8)$$

3. 磁偶极子

定义为十分靠近的一对等量异号点磁荷：磁荷量 q_m ，相距 l ，则磁偶极矩大小 $p_m = q_m l$ ，方向由负磁荷指向正磁荷。

其磁场强度、在外磁场中的力矩和力分别为：

$$\mathbf{H} = -\frac{\mathbf{p}_m}{4\pi\mu_0 r^3} + \frac{3\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r}}{4\pi\mu_0 r^5} \mathbf{r}, \quad (8-6-9)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{H}, \quad (8-6-10)$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}_m \cdot \nabla) \mathbf{H} = \nabla(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{H}). \quad (8-6-11)$$

与磁矩为 m 的元电流环的有关公式

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 \mathbf{m}}{4\pi r^3} + \frac{3\mu_0 \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^5} \mathbf{r}, \quad (8-6-12)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \quad (8-6-13)$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \quad (8-6-14)$$

相比较可知，只要将磁荷法中的量与电流法的量作如下对应，

$$\mathbf{H} \leftrightarrow \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}, \quad \mathbf{p}_m \leftrightarrow \mu_0 \mathbf{m}, \quad (8-6-15)$$

则以上两组公式彼此等效。

4. 磁介质的“磁极化规律”

磁介质在外磁场中的“磁极化”，实质上仍是 §8-2 中的“磁化”。只是在磁荷观点下，外磁场对磁介质的作用类似于外电场对电介质的“电极化”作用。

由“磁极化”和“电极化”的相似性，定义磁极化强度为单位体积中全部分子磁偶极矩的矢量和，

$$\mathbf{J} = \frac{\sum \mathbf{p}_{m\text{分子}}}{\Delta V}, \quad (8-6-16)$$

则它与极化磁荷有关系

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\sum_{S\text{内}} q'_m, \quad (8-6-17)$$

$$\sigma'_m = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}. \quad (8-6-18)$$

磁极化规律为

$$\mathbf{J} = \chi_m \mu_0 \mathbf{H}, \quad (8-6-19)$$

其中 χ_m 是磁极化率，也即§8-2中的磁化率。

5. 磁介质中静磁场的高斯定理

引入磁感应强度

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J} \quad (8-6-20)$$

(此处 \mathbf{B} 是类似于电学中 \mathbf{D} 的辅助矢量)，由式(8-6-6)和(8-6-17)得

$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \sum (q_m - q'_m)$ 。由于不存在自由磁荷， $q_m = q'_m$ ，所以

$$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (8-6-21)$$

将式(8-6-19)代入式(8-6-20)得

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad (8-6-22)$$

其中 $\mu = 1 + \chi_m$ 是磁导率。

8.6.2 磁荷法与电流法的等效性

1. 等效条件

由 (8-6-15) 第二式、(8-6-16) 和 (8-1-1) 得 $\mathbf{J} = \mu_0 \mathbf{M}$ ，代入式 (8-6-19) 得

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}。 \quad (8-6-23)$$

此处的 \mathbf{H} 与电流法中的 \mathbf{H} 差别仅在于满足不同的环路定理：

磁荷法： $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$ ；电流法： $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_0$ 。

由此可知，对有传导电流的空间，磁荷法失效，而对不存在传导电流的单连通空间（见附件 8-6-1），两个环路定理完全一致，因而两种方法有相同解。

2. 被研究空间之外传导电流的处理

关键是设法找到该传导电流的等效磁荷分布。稳恒电流情形特别简单，因为闭合的稳恒电流总可等效为许多小电流环（见 § 3-3），小电流环又可等效为磁偶极子。

8.6.3 磁荷法的应用

1. 磁荷法解静磁场与电荷法解静电场可一一对应，如表 8-6-1 所示。这样，由一种问题的解可得到另一问题的解。

表 8-6-1 静磁量和静电量的替换关系

静磁量	\mathbf{H}	\mathbf{B}	\mathbf{J}	q_m	σ_m	\mathbf{p}_m	μ_0	μ	χ_m
静电量	\mathbf{E}	\mathbf{D}	\mathbf{P}	q	σ_e	\mathbf{p}	ε_0	ε	χ_e

2. 磁荷分布的磁场与等效传导电流分布的磁场等效。所以对磁化强度已知的磁介质，既可以求其磁化电流分布，用电流法求解磁场；也可以求其极化磁荷分布，用磁荷法求解磁场。视何法简便而定。

例子

例 8-6-1 一马蹄形永久磁铁，两磁极总面积的吸力。

[解] 马蹄形磁铁两极表面上极化面磁荷反号磁荷，磁铁和衔铁的吸力可由电容器

表 8-6-1 中的替换关系给出：

$S \rightarrow 2S$ 。

(将本题与例 8-5-3 相比较。)

例 8-6-2 求平行板电容器边缘附近的电场分布。设极板间距为 d ，面电荷密度为 $\pm\sigma_e$ 。计算中，设场点离电容器边缘的距离 r 远大于 d ，但远小于极板尺寸。

[解] 将电荷“换成”磁荷，则面积为 ΔS 的磁偶极子的磁偶极矩 $p_m = \sigma_m d \Delta S$ ，对应元电流环的磁矩 $m = p_m / \mu_0$ ，而磁矩定义式为 $m = I \Delta S$ ，所以 $I = \sigma_m d / \mu_0$ 。所有电流元可等效为四条沿电容器边缘的无穷长直导线电流 I ，但其中三条直电流离场点无穷

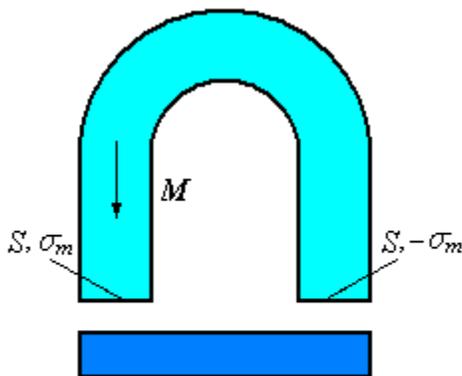


图 8-6-1 永久磁铁对衔铁的吸力

积为 $2S$ ，磁化强度为 M ，求它对衔铁

密度 $\sigma_m = J = \mu_0 M$ ，衔铁两端感应出等量

两极板间吸力表达式 $F_e = \frac{\sigma_e^2 S}{2\epsilon_0}$ ，以及

$$F_m = \frac{\sigma_m^2 S}{\mu_0} = \mu_0 M^2 S \quad (\text{注意：作替换时})$$

远，所以只需考虑离场点最近的直电流。

$$\text{易得 } H = \frac{I}{2\pi r} = \frac{\sigma_m d}{2\pi\mu_0 r}, \text{ 再回到原问题, 有 } E = \frac{I}{2\pi r} = \frac{\sigma_e d}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

(本题也可不用磁荷法，直接积分计算，试一试。)

例 8-6-3 如图 8-6-2，两无穷长圆弧片状带电导体 A 和 B 互相绝缘，两侧棱边在 y 轴上 $\pm b$ 处十分靠近，顶部则与 z 轴分别交于 a 和 c。已知 $a=0.4\text{cm}$ ， $b=0.5\text{cm}$ ， $c=0.8\text{cm}$ ， $z=b$ 处的电场强度为 $E_b=8000\text{V}\cdot\text{cm}^{-1}$ ，求导体 A 和 B 间的电势差。

[解] 先解相应的磁场问题。通过分析流的磁场位形，发现其等磁势面正好在 z 轴上的磁场

$$H_z = \frac{bI}{\pi(b^2 + z^2)} = \frac{2H_b}{1 + (z/b)^2}.$$

再回到原来的静电问题，则

$$E_z = \frac{2E_b}{1 + (z/b)^2},$$

$$\begin{aligned} V_{ab} &= \int_a^c \frac{2E_b}{1 + (z/b)^2} dz \\ &= 2bE_b \tan^{-1} \left[\frac{b(c-a)}{b^2 + ac} \right] \\ &= 2.7 \times 10^3 \text{ V}. \end{aligned}$$

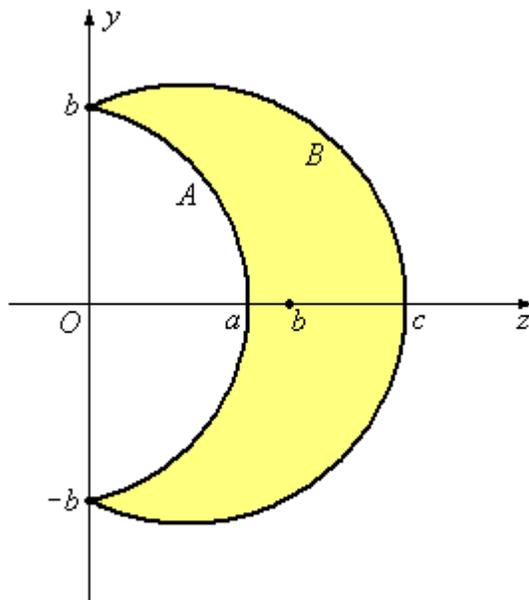


图8-6-2 无穷长圆弧导体片间的电场

位于 y 轴上 $\pm b$ 处两无穷长反向直线电是通过 $\pm b$ 的圆弧柱面 (证明之)，所以

例 8-6-4 用磁荷法求小载流线圈在非均匀外磁场中所受的力。

[解] 电偶极子在外电场中所受力为 $F=(p \cdot \nabla)E$,

所以磁偶极子所受力为 $F=(p_m \cdot \nabla)H=(m \cdot \nabla)B$ 。

附件 8-6-1 单连通空间

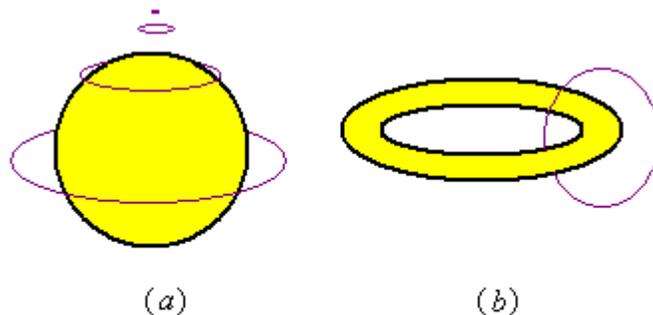


图8-6-3 单连通与非单连通空间

拓扑学中一基本概念, 在该空间中的任一闭合回路可无限缩小成一点。如: 闭合球面外的空间为单连通空间, 而闭合环面外的空间则不是。

§ 8-7 磁像法

磁荷观点下的磁像法与电像法完全类似, 不再赘述。电流观点下的磁像法, 关键是设法找到等效像电流, 以代替介质界面上的磁化电流或导体界面上的感应电流, 从而求得后者对考察区域磁场的贡献。此处只讨论两种特例。

8.7.1 介质界面为无限大平面

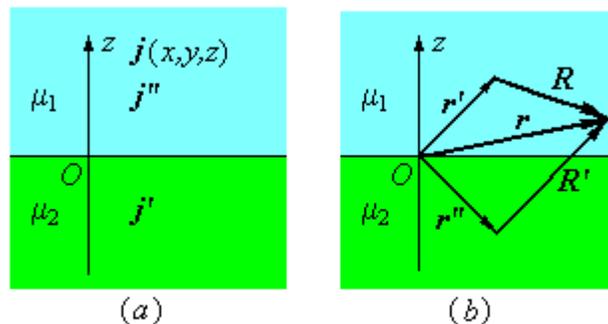


图8-7-1 无限介质平面的磁像法

1. 像电流:

设介质 1 中电流密度分布是

$$\mathbf{j}(x, y, z) = j_x(x, y, z)\hat{x} + j_y(x, y, z)\hat{y} + j_z(x, y, z)\hat{z}, \quad (8-7-1)$$

参照电像法的公式，可得上半空间像电流为

$$\left. \begin{aligned} j'_x(x, y, -z) &= -\frac{(\mu_1 - \mu_2)\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} j_x(x, y, z), \\ j'_y(x, y, -z) &= -\frac{(\mu_1 - \mu_2)\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} j_y(x, y, z), \\ j'_z(x, y, -z) &= \frac{(\mu_1 - \mu_2)\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} j_z(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (8-7-2)$$

下半空间像电流

$$\begin{aligned} j_x''(x, y, z) &= j_x'(x, y, -z), \quad j_y''(x, y, z) = j_y'(x, y, -z), \\ j_z''(x, y, z) &= -j_z'(x, y, -z). \end{aligned} \quad (8-7-3)$$

2. 磁场分布：由像电流分布可求得上半空间

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_1 \mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{j}(x', y', z') \times \mathbf{R}}{R^3} dx' dy' dz' \\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{j}'(x', y', -z') \times \mathbf{R}'}{R'^3} dx' dy' dz', \end{aligned} \quad (8-7-4)$$

下半空间

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint [\mu_1 \mathbf{j}(x', y', z') + \mathbf{j}''(x', y', z')] \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} dx' dy' dz', \quad (8-7-5)$$

上二式中 r 是场点位矢， r' 和 r'' 分别是源点和像点位矢， $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ， $\mathbf{R}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}''$ 。

（注意：含源电流 \mathbf{j} 的项有因子 μ_1 ，这反映了介质 1 的磁化效应；而含像电流的项无此因子。）

3. 检验：由磁场表达式，可证明（试证明之）

a) \mathbf{B} 自然满足高斯定理， \mathbf{H} 满足安培环路定理。

b) \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 分别满足边值关系 $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-) = 0$ ， $\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-) = 0$ 。

4. 理想抗磁质和理想导磁质

a) 理想抗磁质

当 $\mu_1 = \mu$ ， $\mu_2 = 0$ 时，式 (8-7-2) 简化为

$$\left. \begin{aligned} j'_x(x, y, -z) &= -\mu j_x(x, y, z), \\ j'_y(x, y, -z) &= -\mu j_y(x, y, z), \\ j'_z(x, y, -z) &= \mu j_z(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (8-7-6)$$

此时由 (8-7-3) 算出 $j'' = -\mu j$, 代入式 (8-7-5) 得 $B(z < 0) = 0$ 。

b) 理想导磁质

当 $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = \infty$ 时, 式 (8-7-2) 简化为

$$\left. \begin{aligned} j'_x(x, y, -z) &= \mu j_x(x, y, z), \\ j'_y(x, y, -z) &= \mu j_y(x, y, z), \\ j'_z(x, y, -z) &= -\mu j_z(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (8-7-7)$$

此时由 (8-7-3) 算出 $j'' = \mu j$ 。

8.7.2 介质界面为无限大柱面

设介质 1 为无穷长圆柱, 半径为 a 。直线电流与圆柱轴平行, 与轴相距 d 。如

1. 像电流

可证明, 介质 2 所对应的像电流分别

$$I' = \frac{\mu_2(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 + \mu_2} I,$$

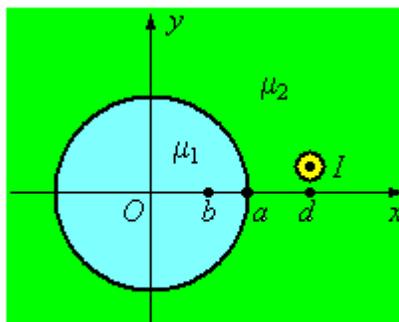


图8-7-2 无穷长圆柱界面的磁像法

其周围充满介质 2, 介质 2 中有一无穷长图 (8-7-3), 取 z 轴为圆柱轴, $b = a^2/d$ 。

位于 $x = b$ 和原点, 大小分别是

$$(8-7-8)$$

$$I'_0 = -I'。 \quad (8-7-9)$$

而介质 1 对应的像电流

$$I'' = I', \quad (8-7-10)$$

与 I 同位置。

2. 磁场分布

由源电流和像电流分布可得，介质 1、2 中的磁场分别为

$$B_{1x} = -\frac{\mu_0 y (\mu_2 I + I'')}{2\pi [(x-d)^2 + y^2]}, \quad B_{1y} = \frac{\mu_0 (x-d)(\mu_2 I + I'')}{2\pi [(x-d)^2 + y^2]}, \quad (8-7-11)$$

$$B_{2x} = -\frac{\mu_0 y}{2\pi} \left[\frac{\mu_2 I}{(x-d)^2 + y^2} + \frac{I'}{(x-b)^2 + y^2} + \frac{I'_0}{x^2 + y^2} \right], \quad (8-7-12)$$

$$B_{2y} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{\mu_2 (x-d)I}{(x-d)^2 + y^2} + \frac{(x-b)I'}{(x-b)^2 + y^2} + \frac{xI'_0}{x^2 + y^2} \right]。$$

3. 检验磁场满足边界条件

边界条件可变形为：在 $r=a$ 处 $B_1 \cdot r = B_2 \cdot r$ 和 $B_1 \times r / \mu_1 = B_2 \times r / \mu_2$ 。（为什么？）易证上述磁场表达式满足该边界条件。

8.7.3 例子

例 8-7-1 设下半空间 ($z < 0$) 充满磁导率为 μ 的磁介质，上半空间 ($z > 0$) 为真空，其中置入一无穷长直线电流 I ，它与界面平行，距离为 d 。求空间的磁场分布。

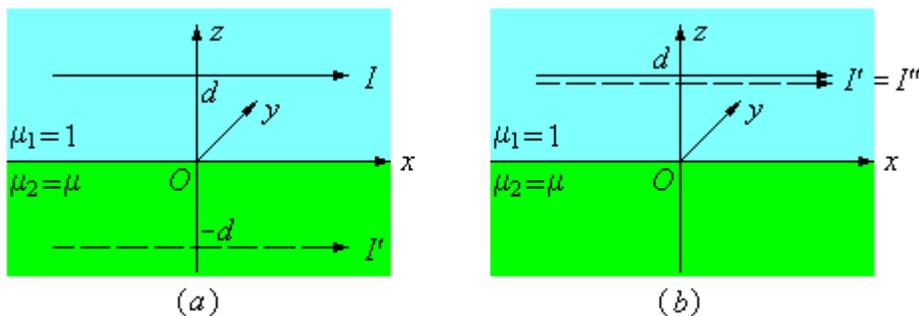


图8-7-3 真空-磁介质界面的磁像法

[解] 由式 (8-7-2), 取 $\mu_1=1$, $\mu_2=\mu$ 。

对于上半空间, 其像电流位于 $z=-d$, 方向同 I , $I' = \frac{\mu-1}{\mu+1}I$ 。

对于下半空间, 其像电流位置同 I , $I''=I'$ 。

取 I 方向为 x 轴正向, 由 (8-7-4) (使用环路定理更方便), 上半空间磁场为

$$B_{1y} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{z-d}{y^2 + (z-d)^2} + \frac{\mu-1}{\mu+1} \frac{z+d}{y^2 + (z+d)^2} \right],$$

$$B_{1z} = \frac{\mu_0 I y}{2\pi} \left[\frac{1}{y^2 + (z-d)^2} + \frac{\mu-1}{\mu+1} \frac{1}{y^2 + (z+d)^2} \right]。$$

特别地, 在界面上有 $B_{1y} = \frac{\mu_0 I d}{\pi(\mu+1)(y^2 + d^2)}$, $B_{1z} = \frac{\mu\mu_0 I y}{\pi(\mu+1)(y^2 + d^2)}$ 。

类似可得下半空间得磁场为

$$B_{2y} = -\frac{\mu\mu_0 I(z-d)}{\pi(\mu+1)[y^2+(z-d)^2]}, \quad B_{2z} = \frac{\mu\mu_0 Iy}{\pi(\mu+1)[y^2+(z-d)^2]}。$$

$$\text{特别地, 在界面上有 } B_{2y} = \frac{\mu\mu_0 Id}{\pi(\mu+1)(y^2+d^2)}, \quad B_{2z} = \frac{\mu\mu_0 Iy}{\pi(\mu+1)(y^2+d^2)}。$$

(可见, 界面上 B_z 连续, H_y 连续。)

例 8-7-2 一无限理想导体平面上方为真空, 其中有一无穷长直线电流 I 与界面平行, 距离为 d 。求理想导体表面上的感应电流。

[解] 将理想导体视为理想抗磁质(要求初始时刻导体中无磁场), 将 $\mu=0$ 代入例 8-7-1 的结果中, 可知在界面的真空侧($z=0_+$)

$$H_y = \frac{Id}{\pi(y^2+d^2)},$$

再由边值关系求得感应电流 $I_x = -H_y$ 。

小结八

本章介绍了磁场与物质的相互作用。

在 § 8-1 中首先引入描述磁化现象的磁化强度矢量及其性质; 然后分析了磁化强度与磁化电流的关系。

在 § 8-2 中首先导出一般磁介质中的高斯定理和安培环路定理; 接着介绍了各类磁介质的磁化规律; 阐述了顺磁质、抗磁质磁化规律的定量微观机制及铁磁质磁化规律的定性微观机制; 最后讨论了一维对称电流下均匀各向同性磁介质磁场

的求解。

在 § 8-3 中首先导出磁感应强度、磁化强度以及磁场强度所满足的边值关系；接着阐述并证明了静磁场的唯一性定理；最后，作为唯一性定理的应用，分别讨论了当介质界面与磁感应线重合时以及当介质界面与磁感应线垂直时磁场的求解。

在 § 8-4 中通过对比静磁场与直流电路的基本方程，发现只要将二体系中若干物理量相对应，则电路与磁路问题同构；进而得到磁路定理。

在 § 8-5 中首先给出 N 个载流线圈系统的磁能；并定义了载流线圈在外磁场中的磁能；随后引入线性无损耗介质的磁能和磁能密度；分析了线性无损耗介质以及非线性介质中磁化功与磁化能的关系；最后，作为一个应用，讨论了由磁能求解磁力和磁力矩问题。

在 § 8-6 中首先阐述了磁荷观点下的静磁场规律；接着分析了磁荷法与电流法的等效条件；最后，举例说明，可利用电流法 \leftrightarrow 磁荷法 \leftrightarrow 电荷法的对应关系，灵活求解静电场和静磁场问题。

在 § 8-7 中介绍了利用电流观点下的磁像法分别求解介质界面为无限大平面时以及介质界面为无限大柱面时的磁场问题。