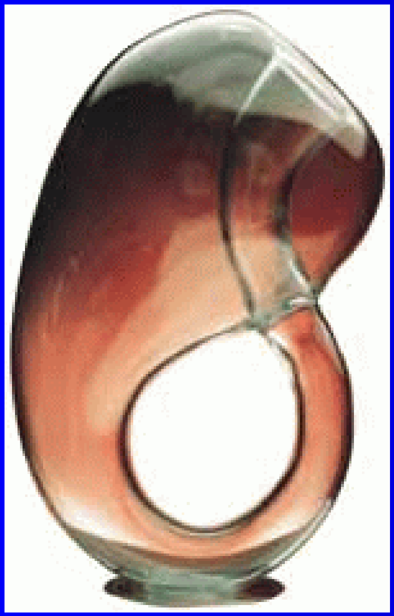
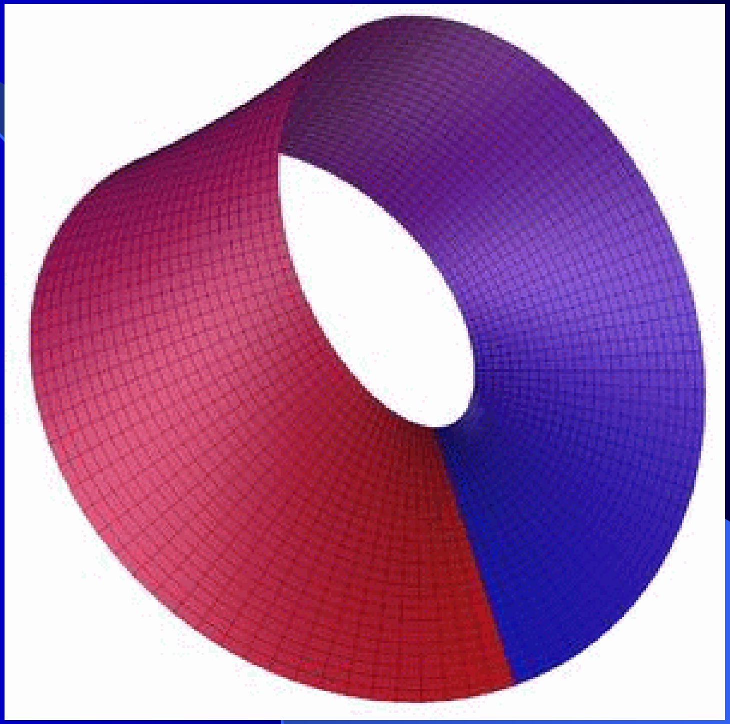
奇异曲面高斯通量的讨论

物理一班 野仕伟

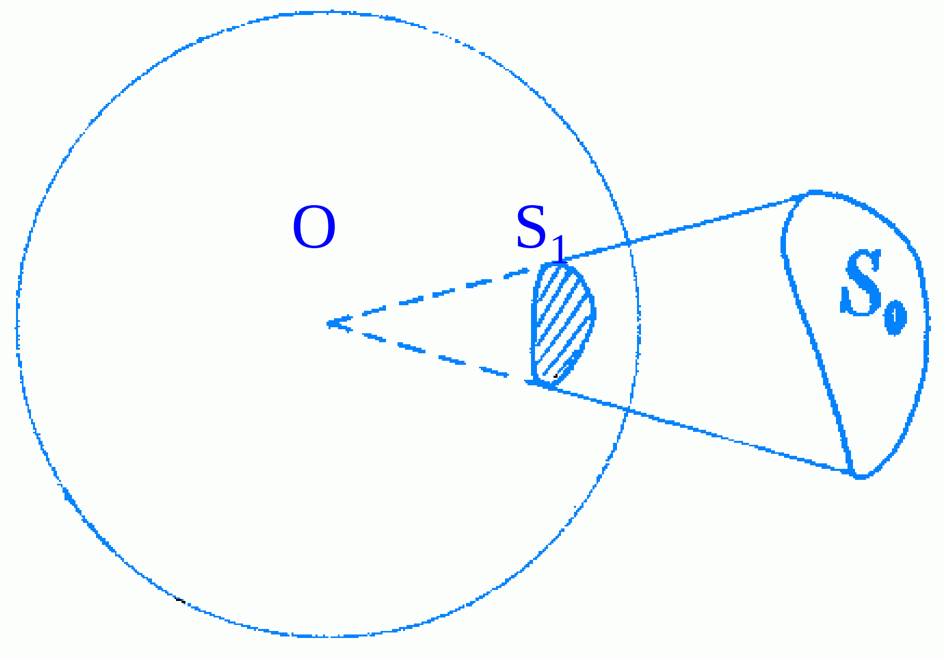




1.非封闭曲面的通量计算—投影法

平方反比场$\mathbf{E}=A\ \mathbf{r}/r^3$ 有一特殊性质，即对两面元dS_1，dS_2,若对场源O张有相同立体角$d\Omega$,则dS_1,dS_2的通量相等。

从而，任意曲面S_0，对O张Ω的立体角，投影到以场源为球心的单位球面，成为S_1，则



$$\Phi_{S0}=\Phi_{S1}=\Omega A$$

此即非封闭双侧曲面的通量计算式。

对静电场，$A=q/4\pi\varepsilon$(q为场源电荷), 从而

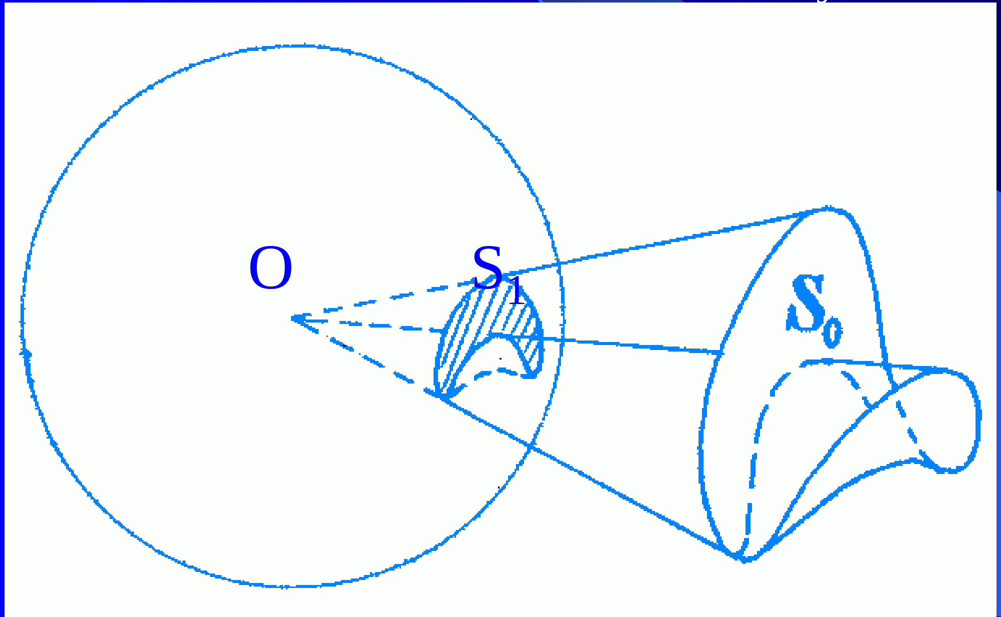
$$\Phi_{(q)\,S\,0}=\Omega q\,/\,4\pi\varepsilon.$$

下面定义一种新的通量计算方法：

力场$\mathbf{E}$=A r/r^3　　场源为O，

取S_0上一点P，当射线OP穿过S_0奇数次时，p的投影点p′为有效区，记入S_1;当OP射线穿过S_0偶数次时，p′为无效点，不记入S_1。

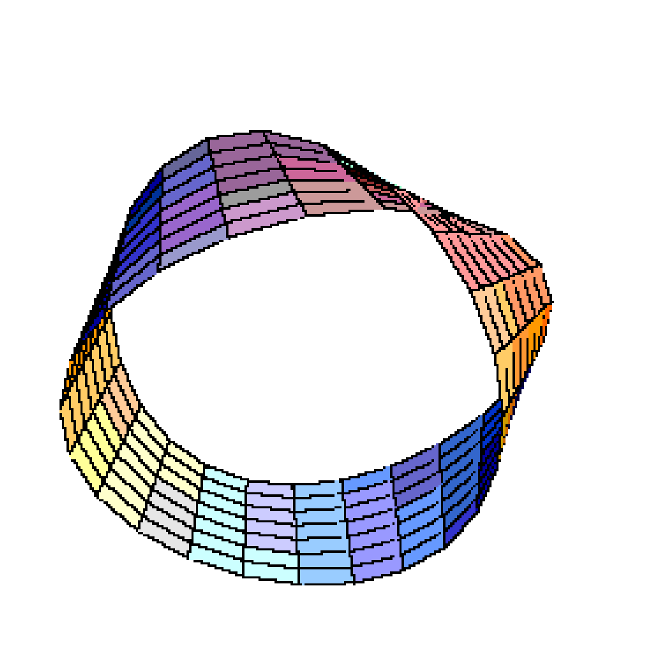
由于通量只是一个数值，在单位球面上面积$S_1=\Omega$，球面上各处F大小都相等，则通量$\varphi_y=S_1A$.



2.非封闭单侧曲面（Mobius单侧面）的高斯通量

按法向量定义的通量$d\Phi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}$，首先要求连续曲面上各点有唯一确定的连续法向量。

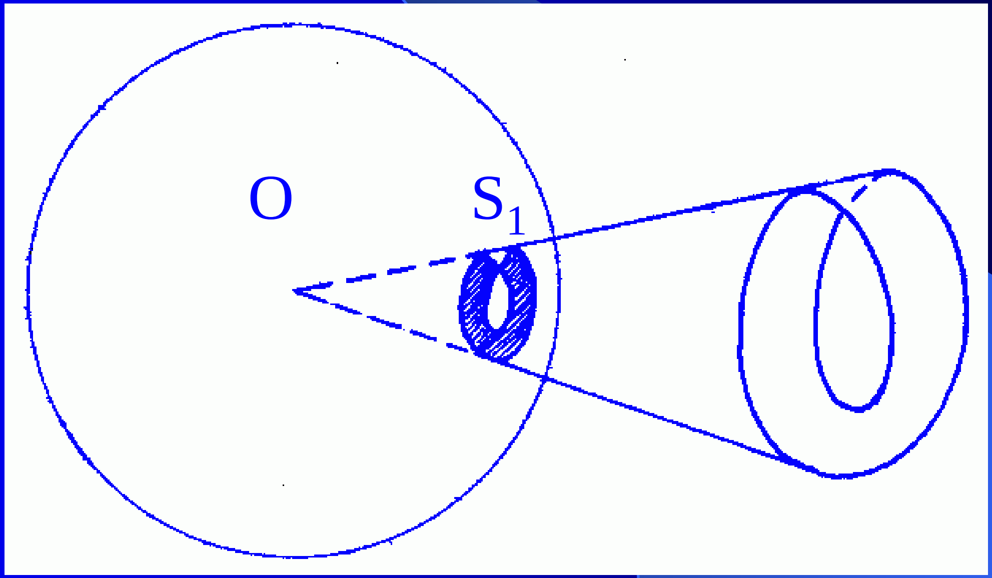
而单侧曲面不满足此条件，如Mobius面。故不能由法向量定义其通量。



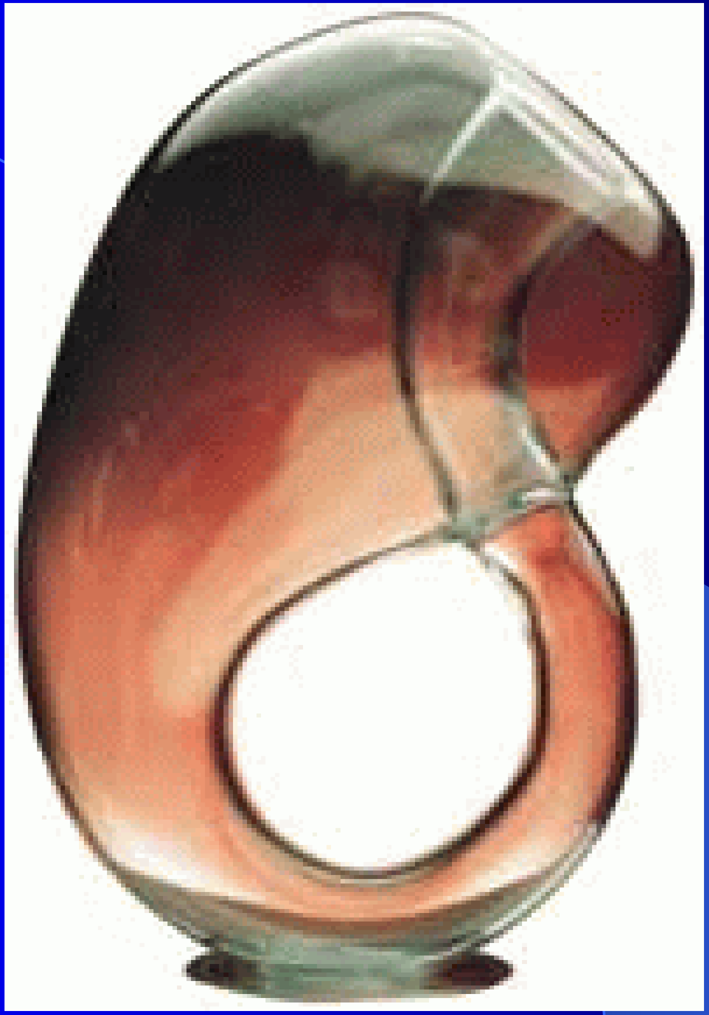
但用投影的方法，可将Mobius面唯一地映射在单位球面域S_1上，通量$\Phi_y=AS_1$.

可以看出，投影法对单，双侧曲面都适用，故可作为通量的定义。

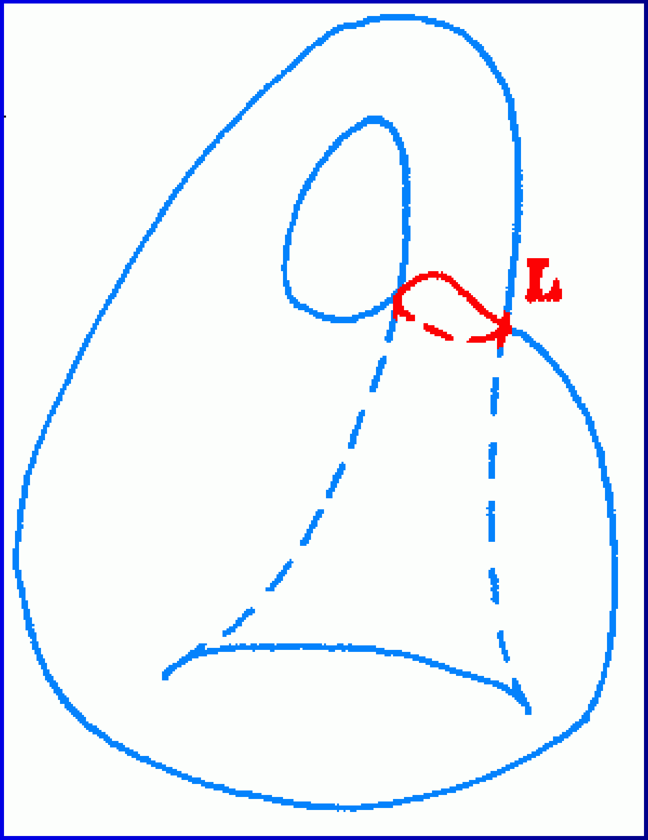
下面将证明，此定义对克莱因瓶也适用，并可求出唯一的通量。



3. Klein瓶的高斯通量

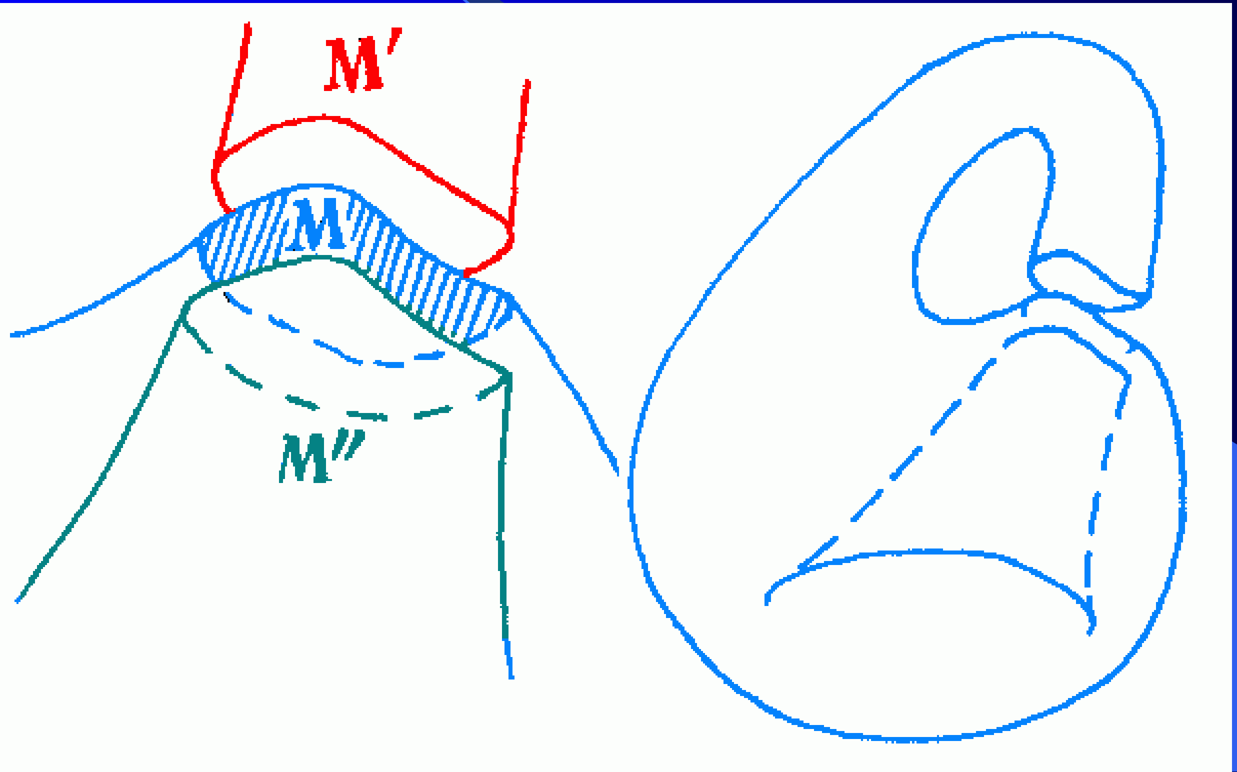


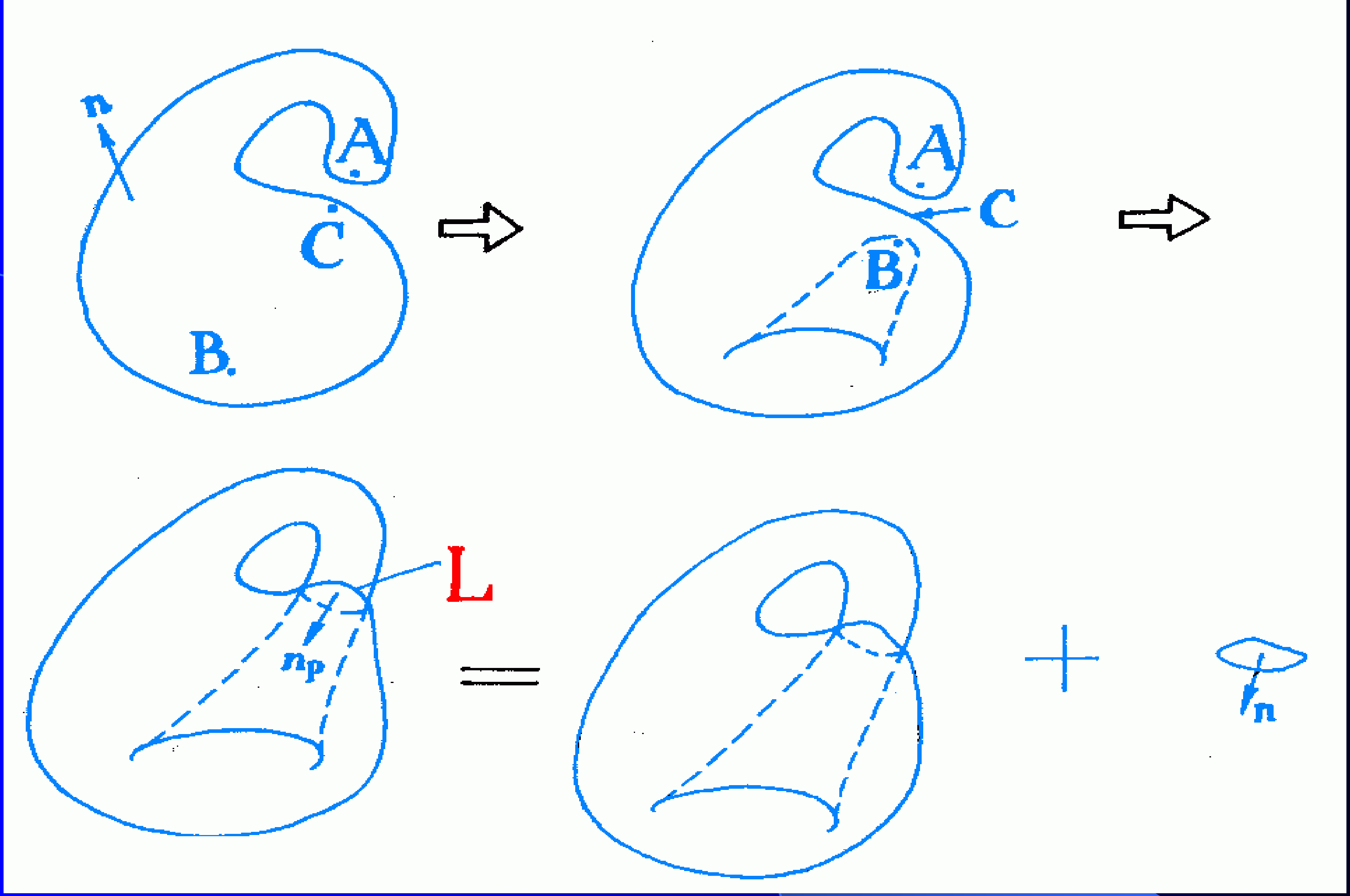
- 克莱因瓶为一单侧曲面，其上有一曲线L，L为三面交汇处。
- 现考虑其对平方反比场源O的通量。



以L为边界，作一曲面M，将M平移一小段距离dx，变为M′，再反向平移dx，变为M"。

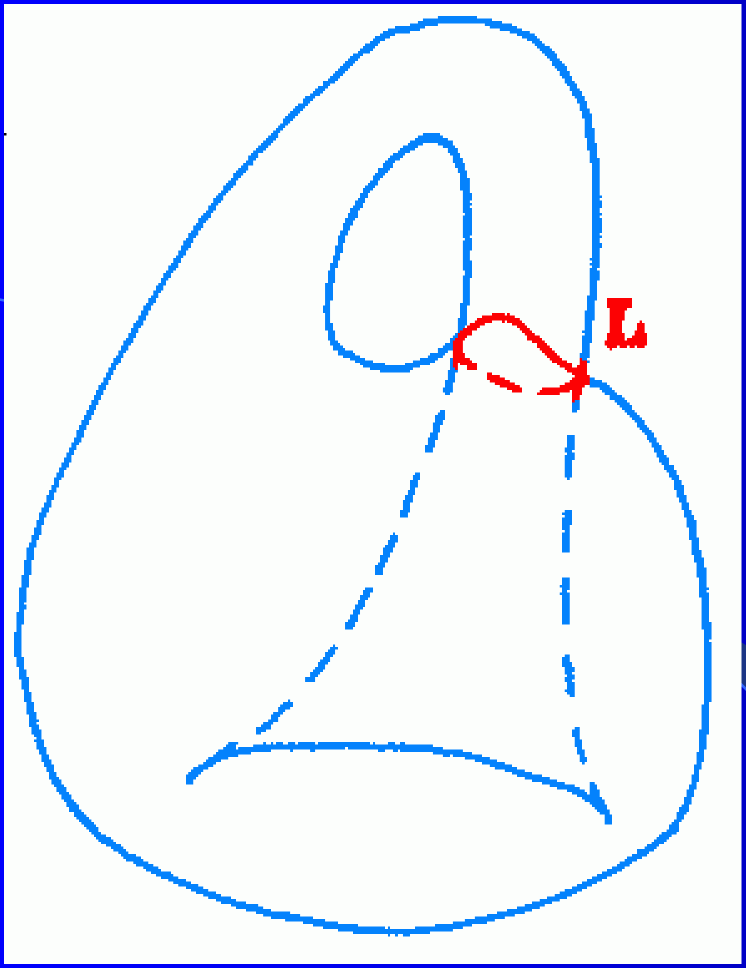
让原三面分别只与M，M`，M"之一相连，则得一新曲面，为一封闭曲面。其通量为0或4πA(由O位置决定)。

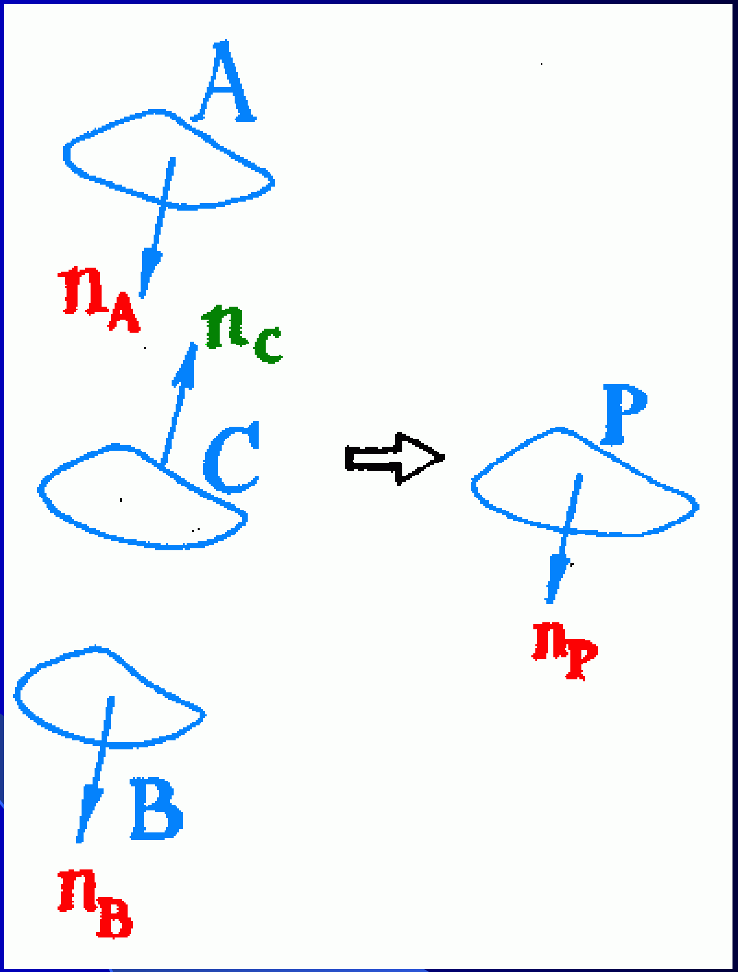




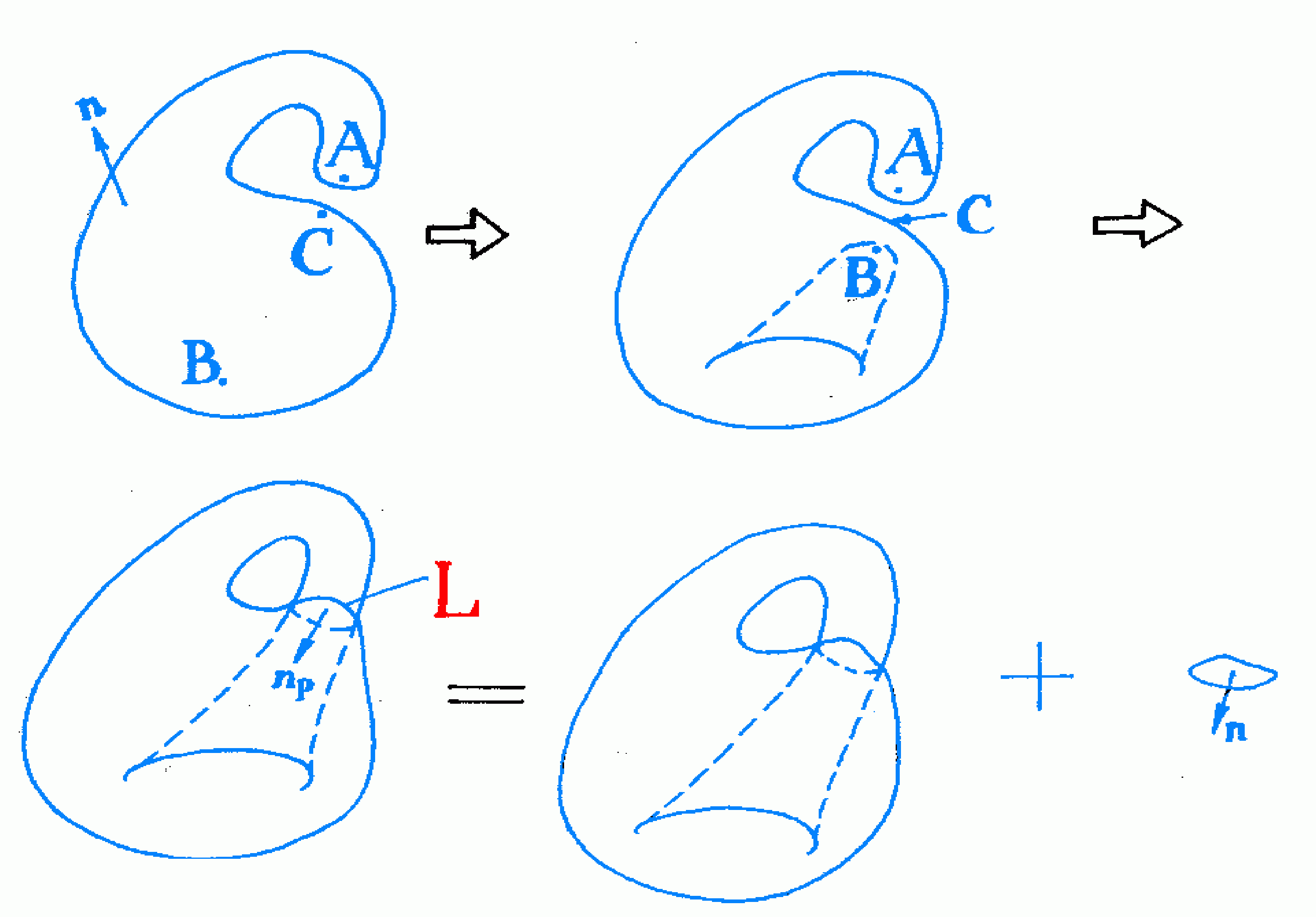
逆向想象，如图。法向量向外。

注意，通量一直连续变化。

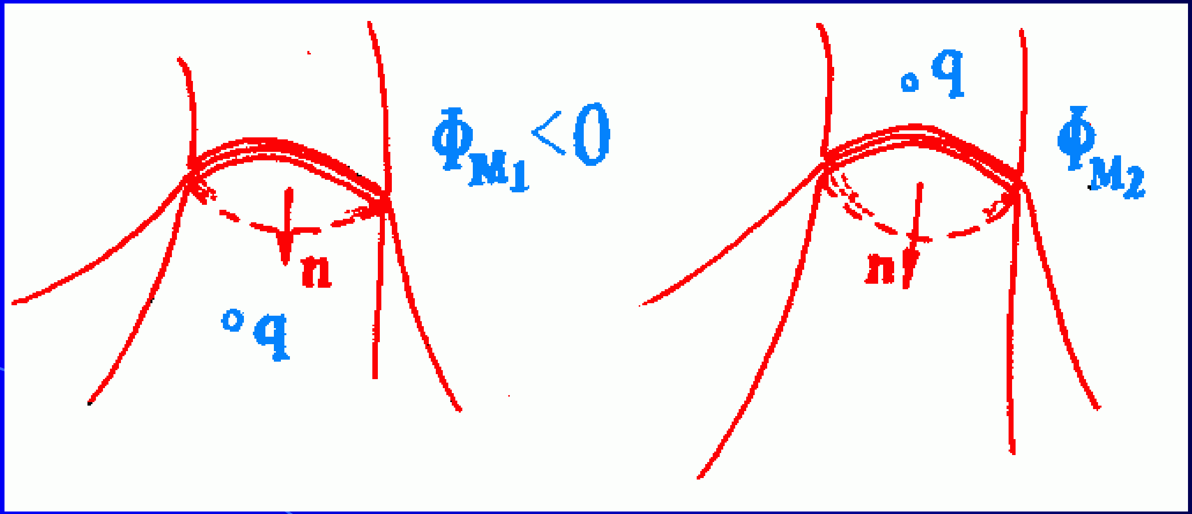




被捏合的部分法向量为原先三部分法向量的和。P处方向与A，B同，与C相反。



4的通量应为3的通量减去5的通量。



有一个问题：以L为边的曲面有无限个，那末上述方法未必得出唯一结果。做一分析：

M$_1$使q在外，M$_2$使q在内，有下列各式

$\mathbf{\Phi_{M2}=4\pi A+\Phi_{M1}}$

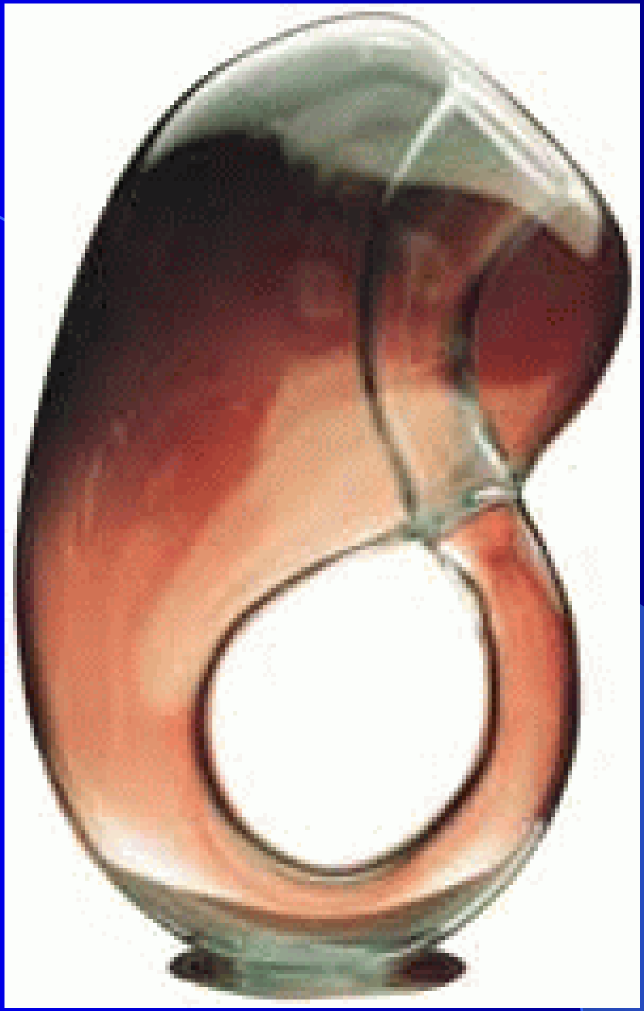
$\mathbf{\Phi_{P1}=0;}$ $\mathbf{\Phi_{P2}=4\pi A;}$

$\mathbf{\Phi_1=\Phi_{P1}-\Phi_{M1}=-\Phi_{M1};}$

$\mathbf{\Phi_2=\Phi_{P2}-\Phi_{M2}=4\pi A-(4\pi A+\Phi_{M1})=-\Phi_{M1}=\Phi_1}$

显然，与q和M的相对位置关系无关。

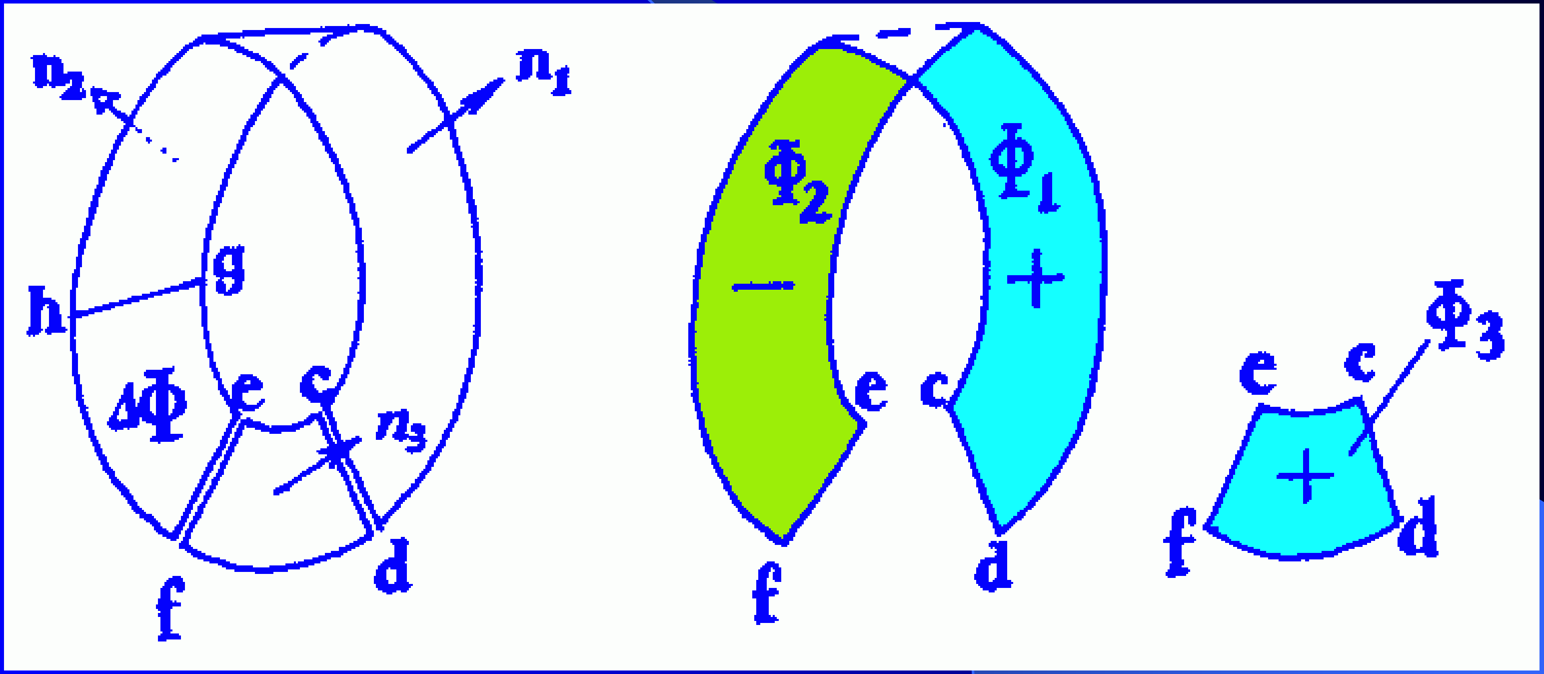
即可计算出的Klein瓶的通量唯一。



4.粘合法与投影法比较(Mobius面)

将A剪成两部分，显然二者皆为双侧曲面。按法向量定义的通量计算方法：

如图 $\Sigma\Phi=|\Phi_1|-|\Phi_2|+|\Phi_3|.$

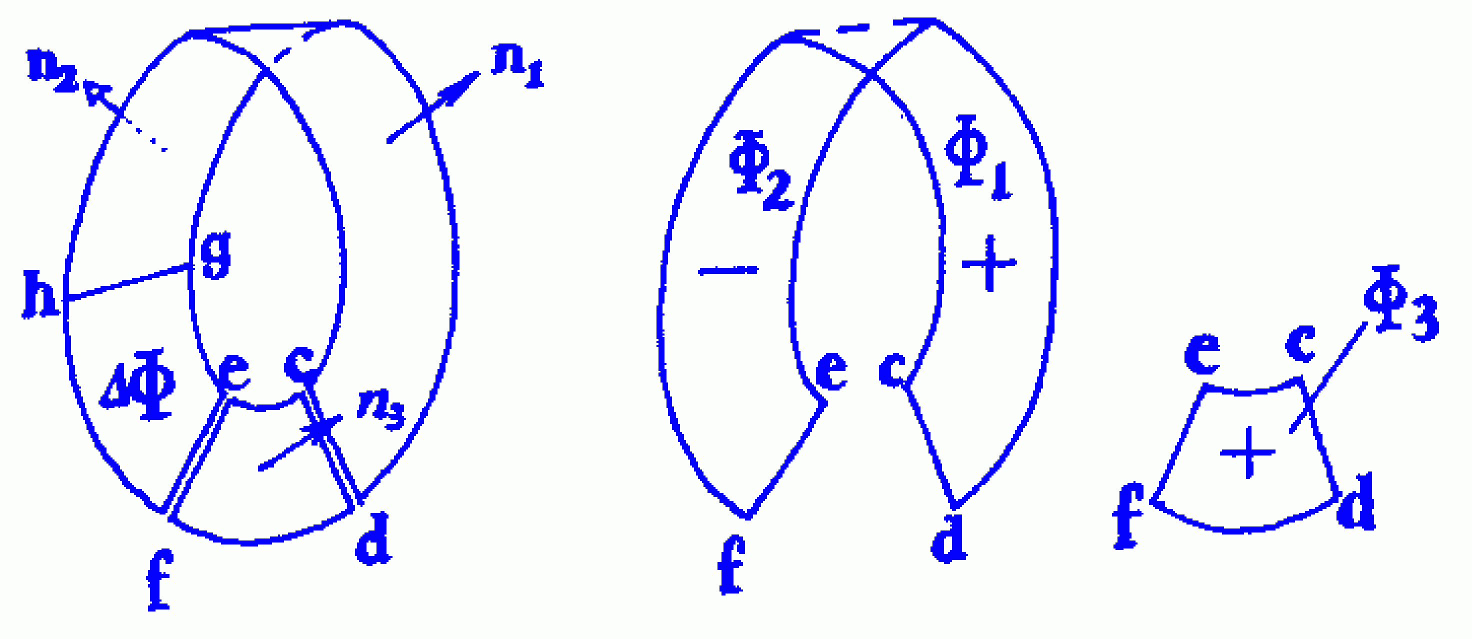


由剪的方式不唯一，当cdef变为cdhg时：

$|\Phi_3'|=|\Phi_3|+|\Delta\Phi|$ ； $|\Phi_2'|=|\Phi_2|-|\Delta\Phi|$;

故 $\Sigma\Phi'=\Sigma\Phi+2|\Delta\Phi|$.

即其通量无意义。



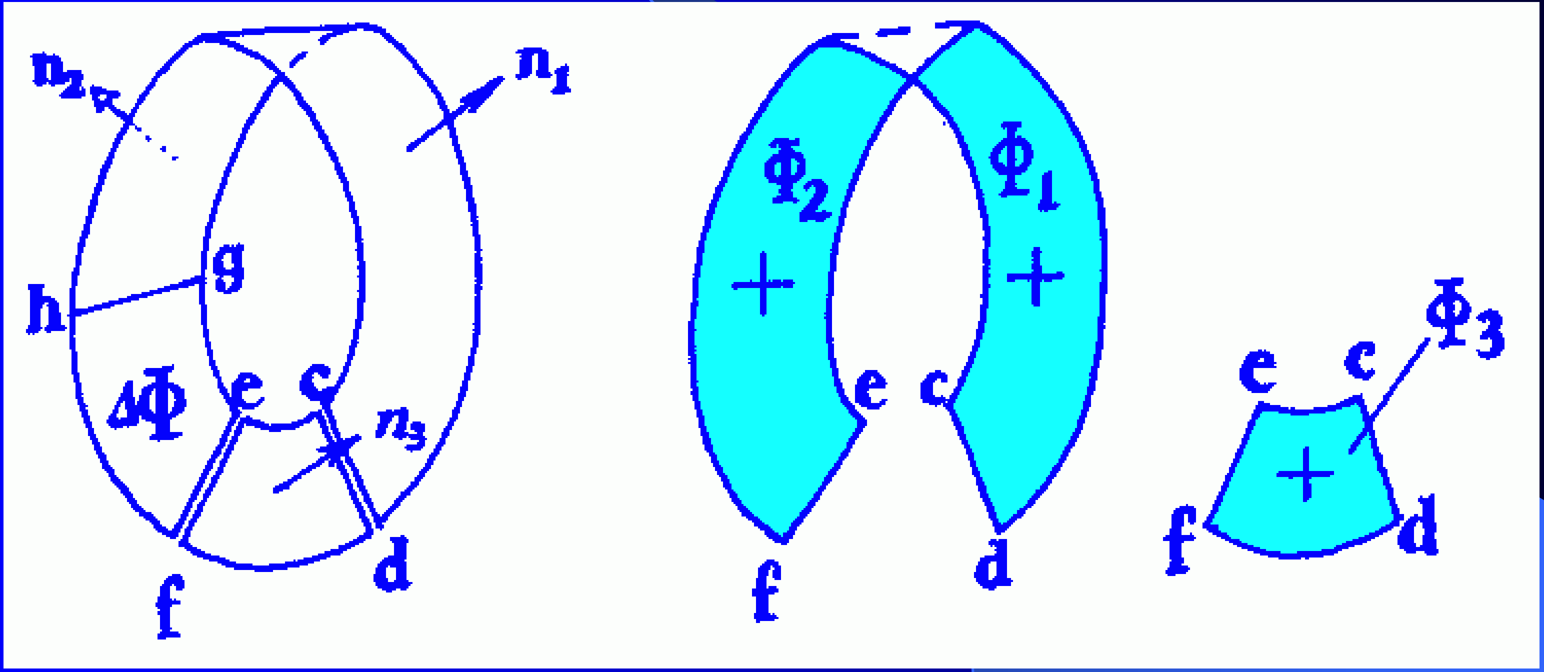
但如用投影法所得区域：

$\Sigma\Phi_y=|\Phi_1|+|\Phi_2|+|\Phi_3|$,

$\Sigma\Phi_y'=|\Phi_1|+(|\Phi_2|-|\Delta\Phi|)$

$+(|\Phi_3|+|\Delta\Phi|)=\Sigma\Phi_y$

给出了相同的值。



结　论

可见，由于定义不同，粘合法应用在单侧曲面法向量时是自相矛盾（多值）的，但投影法给出相同的值。

其根本原因在于投影法只有正值情况。不难证明，高斯定理对两种通量定义方法皆正确：对投影法，O在封闭面S_0内则S_1=**4π**，**Φ_y=4πA**；当O在封闭面外S0的投影为无面积的封闭曲线，**S_0=0**，**Φ_y=0**。

但在处理非封闭曲面时，**Φ**，**Φ_y**给出不同的值。

这就是我对高斯通量计算的扩充和新理解.

谢　谢!