§1-7 电势

一、 电势差与电势

1. 静电场是保守力场

由静电场的环路定理，即电场力作功与路径无关的性质，可知静电场是保守力场。

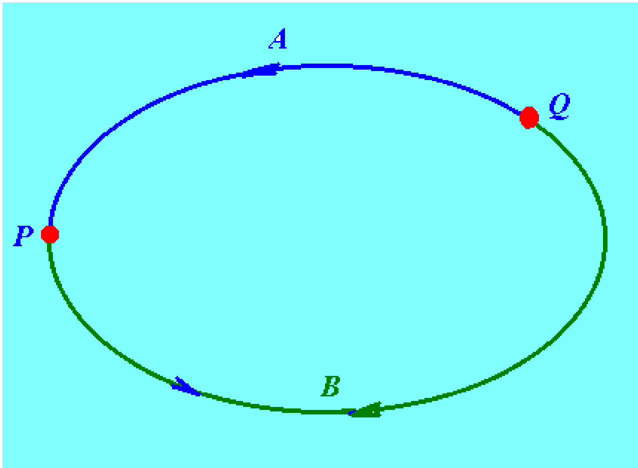

图 1-57 电场力作功与路径无关

试探点电荷 q_0 沿 QAPBQ 一周作的功为零，即

$$q_0 \oint_{QAPBQ} E \cdot dl = 0$$

由此可得：

$$\int_{QAP} E \cdot dl = \int_{QBP} E \cdot dl$$

即沿闭合环路的积分为零，与积分与路径无关等价。

2．静电场是有势场

保守力场必是有势场。我们可以引进电势差和电势的概念。

（1） 电势能

静电场可以与引力场类比，两者都是做功与路径无关的矢量场，即保守力场，都可以引进势能的概念。在引力场中，将质点从场中的点 P 移到点 Q 时，引力做功等于由 P 到 Q 点势能的减少。

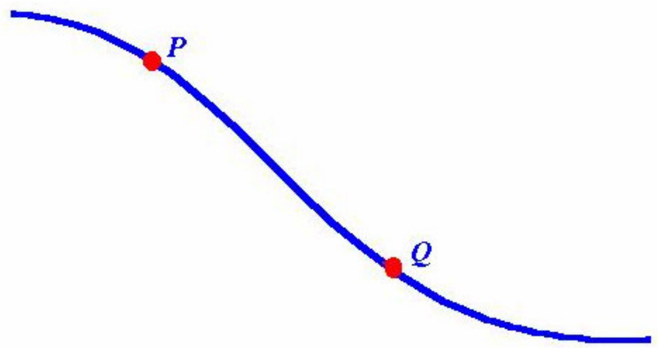

图 1-58 电场力作功，电势能减少

图 1-59 水流倾泻而下，水的势能也减少

类似地，在静电场中，当把试探电荷 P 移到点 Q 时，电场力作的功应当等于由 P 到 Q 试探电荷电势能的减少：

$$W_{PQ} = W_P - W_Q$$

或

$$W_{pQ} = A_{PQ} = q_0 \int_P^Q E \cdot dl$$

W_P 称电势能 P 点的电势能，通常把无限远处的电势能作为参考点，因为对于分布于有限空间范围内电荷产生的电场来说，可把无限远处的电势能作为零点， 即：

$$W_P = q_0 \int_P^{\infty} E \cdot dl$$

（2）电势与电势差

试探电荷 q_0 要克服电场力做功。但 W_{PQ}/q_0 与试探电荷无关，只与静电场的性质有关。

$$U_{PQ} = \frac{W_{PQ}}{q_0} = \int_P^Q E \cdot dl$$

称为电势差，通常取无穷远点电势为零，则可认为 q_0 在 P 的电势为：

$$U(P) = \int_P^{\infty} E \cdot dl = -\int_{\infty}^{P} E \cdot dl$$

那么，PQ 两点间的电势差为：

$$\int_P^Q E \cdot dl = \int_P^{\infty} E \cdot dl + \int_{\infty}^{Q} E \cdot dl = \int_P^{\infty} E \cdot dl - \int_Q^{\infty} E \cdot dl$$

或

$$U_{PQ} = U(P) - U(Q)$$

即与参考电势无关。

以上把电势能的零点选在无穷远处，相应电势的零点也选在无穷远处。在实际问题中，常以大地或电器外壳的电势为

零。改变零点的位置，各点的电势能和电势的数值将随着变化，但都改变一个相同量，以至不会影响两点间的电势能差以及两点间的电势差。

（3）电势的单位

电势能的单位与能量的单位相同，用焦耳（J）。而电势的单位与电势能完全不同，电势是纯粹描述电场性质的物理量，与电场中有没有电荷无关。

电势差和电势的单位均为焦耳 / 库仑，在 SI 中称为伏特，用英文 V 上式可写成如下关量形式：

$$1\text{伏特} = \frac{1\text{焦耳}}{1\text{库仑}},\quad \text{或},\quad 1V = \frac{1J}{1C}$$

二、电势的一般表达式

1．点电荷的电势

点电荷的电场强度为

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}e_r$$

由电势的定义可得：

$$U(r) = \int_r^\infty E\cdot dl = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{e_r\cdot dl}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

2．电势叠加原理

对点电荷系，有电场的叠加原理，有：

$$U(r)=\int_r^{\infty}E\cdot dl=\int_r^{\infty}(\sum_i E_i)\cdot dl=\sum_i\int_r^{\infty}E_i\cdot dl=\sum_i U_i(r)$$

此式表明，点电荷组的电势等各个电荷单独存在时电势的代数和。

3．点电荷组的电势

N 个点电荷组成的体系，q_1, q_2, q_3， … , q_N,分别位于 $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_N$ 处，位于 r_i 处 q_i 单独在 r 处产生的电势为：

$$U_i(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{|r-r_i|}$$

由电势叠加原理，N 个电荷在 r 处产生的总电势为：

$$U(r)=\sum_i^N U_i(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i^N\frac{q_i}{|r-r_i|}$$

4．带电体的电势

对连续分布的带电体产生的电势时，先把带电体分割成许许多多的点电荷，位于 r'处点电荷的电量为 dq，由电势的叠加原理，连续带电体在 r 处产生的总电势为：

$$U(r)=\int\frac{dq}{4\pi\varepsilon\,|r-r'|}$$

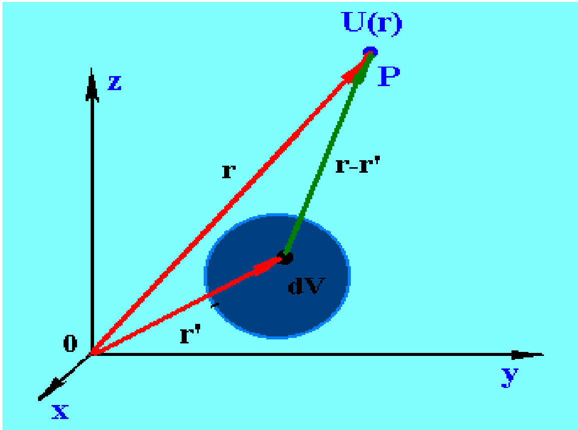

图 1-60 带电体的电势

对体带电体、面带电体和线带电体，若其电荷密度分别为ρ（r’），σ（r’）和λ（r’），则：

$$U(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\frac{\rho(r')}{|r-r'|}dV'$$

$$U(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S'}\frac{\sigma(r')}{|r-r'|}dS'$$

$$U(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{L'}\frac{\lambda(r')}{|r-r'|}dl'$$

三、等势面

1．等势面

从上述电势的定义及其一般表达式可知，电势为空间坐标的标量函数，是标量场。标量场常用等值面来进行形象的几何描述电势的等值面称为等势面，在同一等势面上，电势处处相等。

图中对应的正负点电荷系统的等势面（实线）的示意图。图中还用虚线画出了电场线的分布。图给出了电偶极子的等势面。

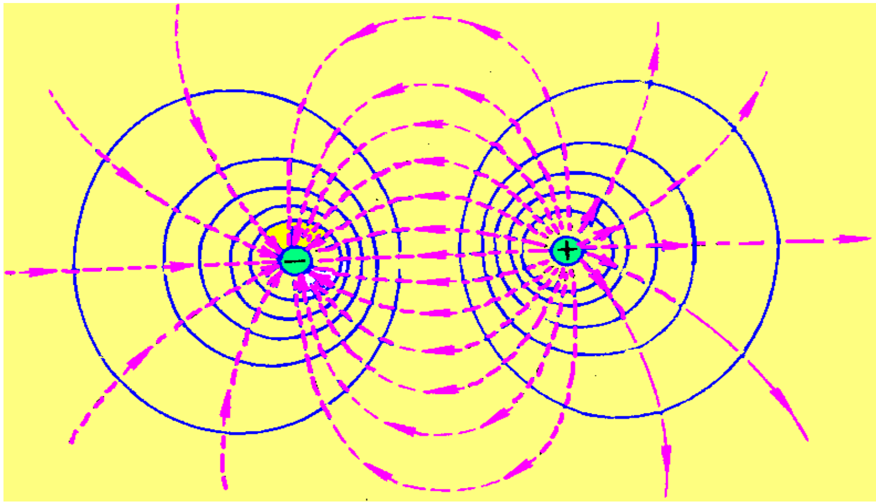

图 1-61 正负点电荷的等势面

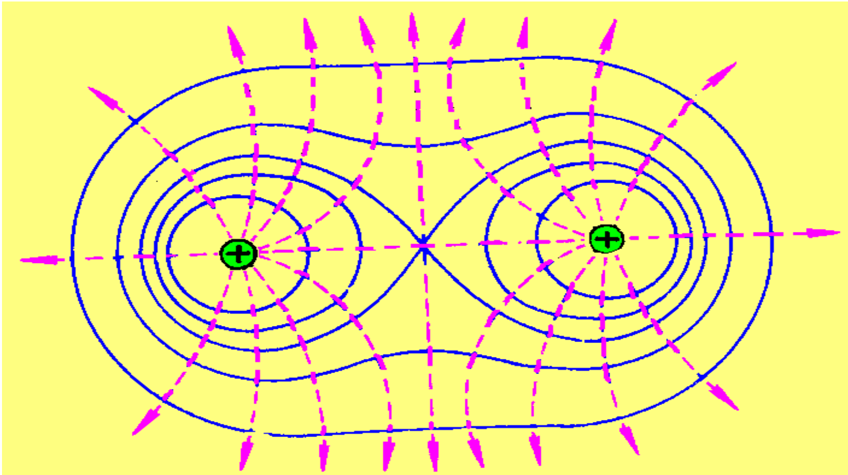

图 1-62 两个正电荷的等势面

2. 等势面的特性

（1） 一根电场线不可能与同一等势面相交两次或多次

（2） 空间共点的电场强度应与该处的等势面垂直

用反证法来证明。设该结论不真，即电场强度不垂直等势面，这时电场强度可分解为沿等势面的法向和切向的两个分量，且切向分量却不为 0。再由电势的公式，等势面上位于该切向方向的两点之间将存在电势差，以至与等势面的定义发生矛盾，所以原结论成立。由这个结论可知，电场线和等势面之间将处处正交。

（3）电场强度的大小也可用等势面的疏密程度来量度

为此可设备相邻等势面的电势差都一样，那末将单位正电荷沿法线方向从一个等势面移到与其相邻的等势面上，电场所作的功的大小也会一样。这功的大小为电场强度与相邻等势面间距离的乘积。因此，等势面间距越小，电场就越大。等势面间距的大小正反映了等势面的疏密程度。所以，电场的大小可用等势面的疏密程度来量度。

四、E 与 U 的关系

电势是标量，从电荷分布计算电势比计算场强方便．若能从电势分布求出场强，这显然是非常有意义的。

1. 电势梯度

三个非常靠近的等势面 A，B 和 C，它们的电势值分别为：

$$U-\Delta U,\quad U,\quad U+\Delta U$$

单位点电荷从 B 移至 C，电场力做的功等于电势能的减少，即：

$$E\cdot\Delta l=-\Delta U$$

或：

$$\Delta U=-E_l\Delta l$$

亦即：

$$E_l=-\frac{\Delta U}{\Delta l}$$

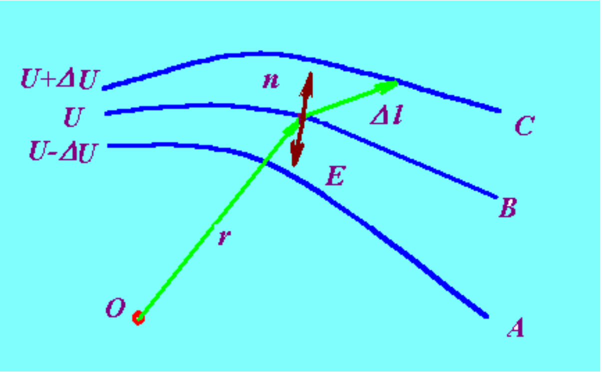

图 1-63　　电势的方向导数

可见，改变同样的ΔU，沿不同的方向，由于Δl 的长度不同，E_l的改变并不相同。

在数学中，对于任何一个标量场中，可定义其梯度，它是矢量，大小等于该标量函 数沿其等值面的法线方向的方向导数，方向沿等值面的法线方向，并用 grad 表示梯度，于是:

$$gradU = \nabla U = -\frac{\partial U}{\partial n} n$$

2. 电场强度与 U 的关系

当 l 取法线方向时，电势在该方向的变化率最大，亦即电势的梯度最大，根据矢量的定义，矢量绝对值最大的分量就是矢量本身，所以我们得到电场强度的大小为：

$$E = \left|E_n\right| = \left|-\frac{\Delta U}{\Delta n}\right| = \frac{\Delta U}{\Delta n}$$

当Δn 趋于零时，有：

$$E = \lim_{n\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta n} = \frac{\partial U}{\partial n}$$

由电势的梯度和上式，我们有：

$$E = -gradU$$

即静电场中任何一点的电场强度的大小在数值上等于该点电势梯度的大小，方向与电势梯度的方向相反，指向电势降落的方向。

在 Oxy 直角坐标系中，场强 E 可用该坐标系中的各分量来表示，即

$$
\begin{aligned}
E &= E_x e_x + E_y e_y + E_z e_z \\
&= -\frac{\partial U}{\partial x} e_x - \frac{\partial U}{\partial y} e_y - \frac{\partial U}{\partial z} e_z \\
&= -\nabla U
\end{aligned}
$$

引人微商运算符“∇”，在直角坐标系中：

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} e_x + \frac{\partial}{\partial y} e_y + \frac{\partial}{\partial z} e_z$$

在球坐标系中：

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} e_\varphi$$

已知电势的值，就可求得电场强度的值。

3．讨论

（1） 电势 U（x，y，z）是标量，只有一个分量，但场强是矢量，有三个分量，为何由 $E=-\nabla U$ 能给出三个函数 E_x、E_y 和 E_z 呢？其实，静电场并非一个完全任意的矢量场，它必须满足环路定理，因而 E 的三个分量并不是独立的。能用一个标量函数 U 来描写静电场，并由之得到一个矢量场（场强），是由静电场是保守场的性质决定的。

（2） 静电场的环路定理是从库仑定律导出的，因为库仑定律已概括了静电场是有心力场这一特性，凡是有心力场，其环流都恒为零。能够用一个标量势函数描写静电场的前提是静电场为有心力场，而且只要求静电场是有心力场就足够了。至于势函数的具体形式，还取决于有心力的具体形式，即需借助于高斯定理。由电荷分布所确定的电势函数公式，已

包括了电荷间相互作用的平方反比律这一内容，即已包含了库仑定律的全部信息。描写静电场的两个方程是：

$$\nabla \cdot E = \rho / \varepsilon \,, \qquad \nabla \times E = 0$$

由环路定理可得到 E 和 U 的关系，即 E=-∇U，代入到高斯定理就有：

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

称泊松方程，在直角坐标系中，可写成：

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

已知电荷分布，通过求解该方程，亦可得到电势分布。

（3） 电势函数的值与电势的零参考点的选择有关，而电势零参考点的选择有很大的任意性，电场中任何一点都可以作为电势的零点。把电势的零点取在无穷远处是因为分布在有限区域中的电荷产生的电场在远离电荷处的场强按 $1/r^2$ 减少，故无限远处任意两点的电势差为零，无限远处是电势的等势区域，因而我们可以把电势的零点取在这个区域中。

但是，当电荷分布在无限大区域中时，无限远处并不是等势区域。在这种情况下，虽然可以取远处某一确定点作为电势的零点，但却不能把无限远处作为电势的零参考点（无限远处是一个区域）。

五、 应用举例

[例] 求电偶极子的电势及电场的分布。

[解] 取电偶极子的中点为坐标原点 O，r》l， 则：

$$U(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|r - r_+|} - \frac{1}{|r - r_-|}\right)$$

由数学的级数展开，近似可以得到：

$$|r-r_+| \approx r\sqrt{1-\frac{l}{r}\cos\theta}$$

$$|r-r_-| \approx r\sqrt{1+\frac{l}{r}\cos\theta}$$

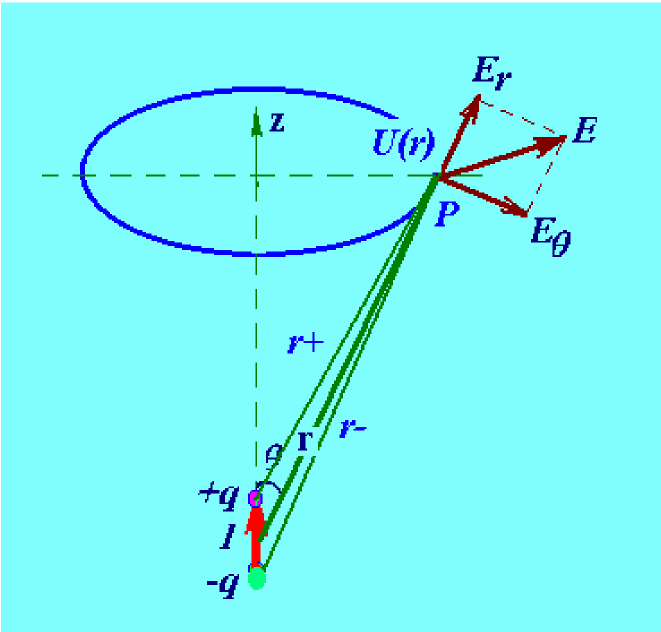

图 1-64　　电偶极子的电势及电场的分布

把上两式代入，并忽略 2 次以上高阶项，有

$$U(r)=\frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

考虑到电偶极子的方向，P 点的电势为

$$U(r)=\frac{p\cdot r}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

由该式和电场强度与电势的关系式可求得电场强度

$$\begin{aligned}
E&=-\nabla U=-\frac{\partial U}{\partial r}e_r-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}e_\theta-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}e_\varphi\\
&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3}e_r+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}e_\theta\\
&=E_re_r+E_\theta e_\theta
\end{aligned}$$

有

$$\begin{cases}
E_r=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p\cos\theta}{r^3}\\
E_\theta=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p\sin\theta}{r^3}\\
E_\varphi=0
\end{cases}$$

在电偶极子的延长线上，θ=0， 有

$$E = E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}$$

在电偶极子的中垂面上，θ=π/2，有

$$E = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}$$

电偶极子的电场强度也可写成：

$$E = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{3(p\cdot r)r}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$$

[例] 求面电荷密度为σ的均匀带电薄圆盘轴线上的电势与电场分布，圆盘半径为 R。
[解] 作图，轴线上任一点 Z 的电势为：

$$U(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma dS}{|r - r'|}$$

这里，$dS=rd\phi dr$，$|r-r'|=(z^2+r^2)^{1/2}$，故

$$U(z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R dr\int_0^{2\pi}\frac{\sigma r d\varphi}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{rdr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2}-|z|\right]$$

$$=\begin{cases}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2}-z\right], & Z>0\\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2}+z\right] & Z<0\end{cases}$$

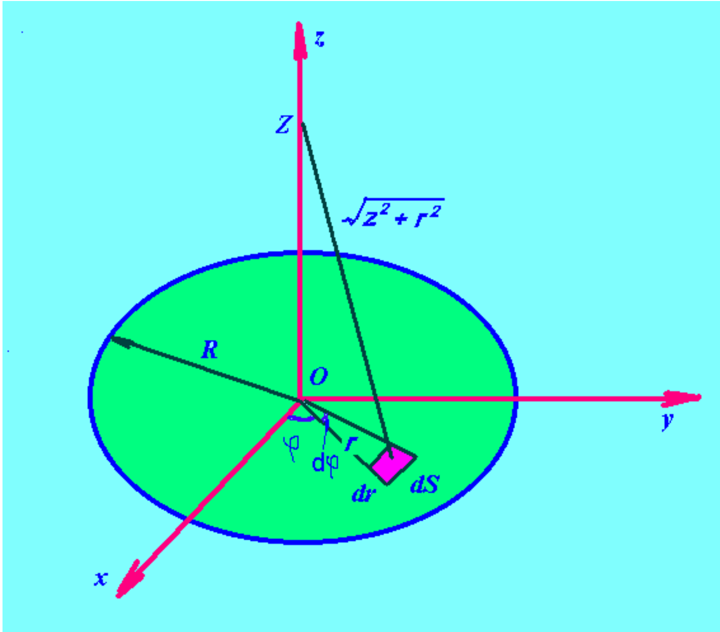

图 1-65 均匀带电圆盘轴线上的电势和电场强度

所以，电场强度 E 为：

$$E=-\nabla U=-\frac{\partial U}{\partial z}e_z$$

故：

$$E=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]e_z & Z>0\\[2ex] \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1+\dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]e_z & Z<0\end{cases},$$

当 R→∞时，即得到无限大均匀带电平面的电场强度为：

$$E=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}e_z & Z>0\\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}e_z & Z<0\end{cases}$$

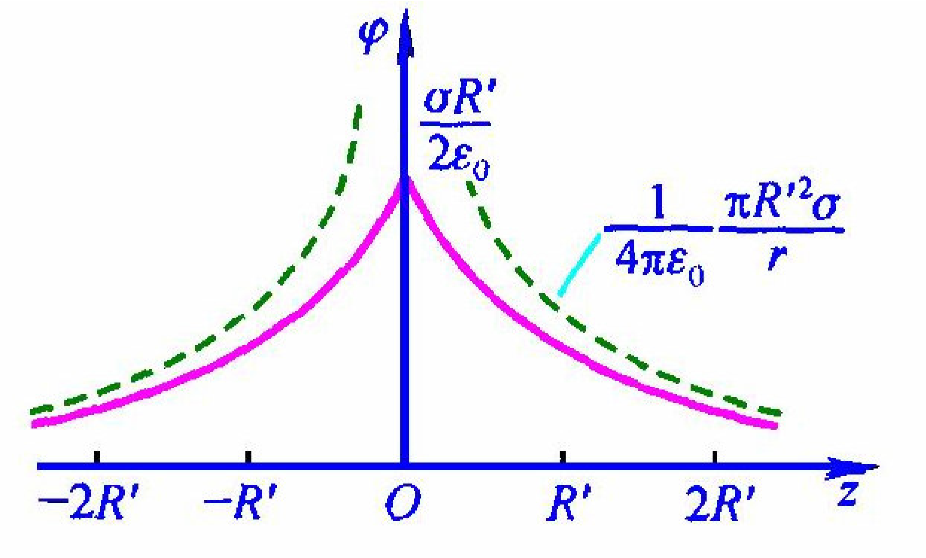

图 1-66 园盘轴上的电势与 Z 的关系

[例] 均匀带电，密度为ρ，内外半径分别为 R_1 和 R_2 的球壳，求其电场和电势分布。

[解] 如图所示，用高斯定理先求出电场分布，再求电势分布。

将空间分成三个区间，作半径为 r 的高斯面，则：

$$E_1=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}e_r=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(R_2^3-R_1^3)\frac{e_r}{r^2},\quad (r\geq R_2)$$

$$E_2=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(r-\frac{R_1^3}{r^2})e_r,\quad (R_1\leq r\leq R_2)$$

$$E_3=0,\ (r\leq R_1)$$

根据 U（r）和 E 的关系，可以由积分得到 U（r）：

$$U_1(r)=-\int_{\infty}^{r}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(R_2^2-R_1^2)\frac{r\cdot dl}{r^3}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(R_2^3-R_1^3)\frac{1}{r},\quad (r\geq R_2)$$

$$U_2(r)=-\int_{\infty}^{R_2}E\cdot dl-\int_{R_2}^{r}E\cdot dl=U_1(R_2)-\int_{R_2}^{r}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(1-\frac{R_1^3}{r^3})r\cdot dl$$

$$=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\frac{3}{2}R_2^2-\frac{R_1^3}{r}-\frac{r^2}{2}),\quad (R_1\leq r\leq R_2)$$

$$U_3(r) = -\int_{\infty}^{R_2} E \cdot dl - \int_{R_2}^{R_1} E \cdot dl - \int_{R_1}^{r} E \cdot dl$$

$$= U_2(R_1) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2 - R_1^2), \quad (r \le R_1)$$

讨论：U_3 与 r 的关系可知，球壳内空腔是等势体，其电势与壳内表面相等。

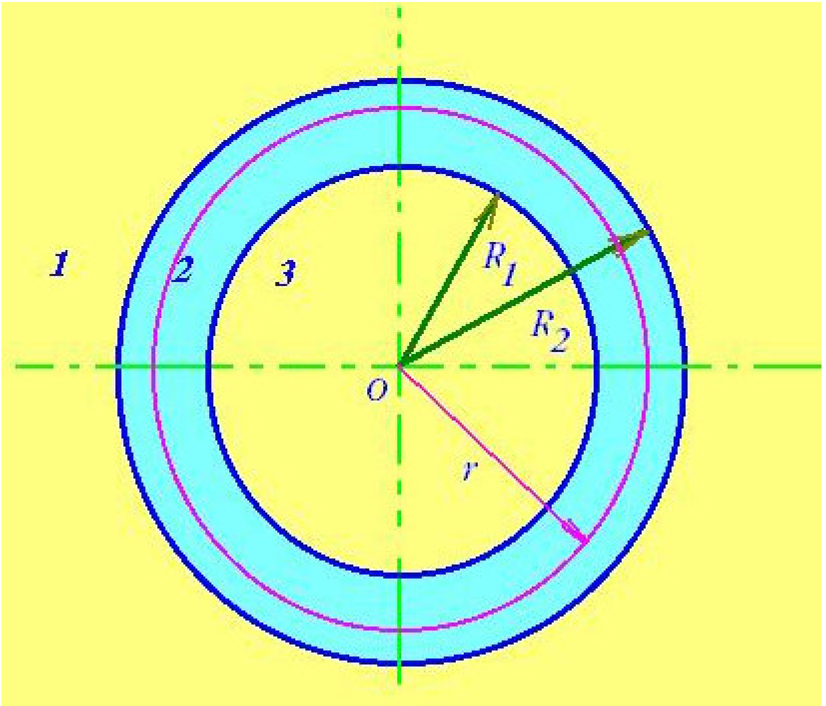

图 1-67 均匀带电球壳的电势和电场

小结一

1. 电荷守恒

处于带电状态的物体就带电体；自然界只有两种电荷：正电荷和负电荷。同种电荷相斥；异种电荷相吸。在自然界中，电荷总是以电子电荷的整数倍出现，电荷的这个特性叫做电荷的量子性。电荷既不能创生，也不能被消灭，只能从一个物体转移带另一个物体，在一个系统内，无论发生怎样的物理过程，则该系统内电荷的电量的代数和将保持不变。此外，电荷是一个相对论性不变量。

2. 库仑定律

库仑在实验中发现，两个静止点电荷间相互作用力大小正比于每个点电荷电量，反比于两点电荷之间距离的平方，并沿两点电荷的连线。

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}e_r$$

库仑定律表明电作用力是有心力。库仑定律的使用范围是静电荷和距离在 10^7m- 10^{-17} m 范围。

3. 叠加原理

不管一个体系中存在多少个点电荷，每一对点电荷之间的作用力都服从库仑定律；而任一点电荷所受到的力等于所有其他

点电荷单独作用于该点电荷的库仑力的矢量和，这一结论称为叠加原理。

$$F=\sum_i F_i$$

带电体之间的作用力可用叠加原理计算，如两体带电体之间的作用力为：

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V\iiint_{V'}\frac{\rho(r)\rho(r')}{\left|r-r'\right|^3}(r-r')dVdV'$$

4．电场强度

电荷之间的作用力是靠电场传递的；凡是有电荷的地方，周围就存在电场，即电荷在自己的周围产生电场或激发电场，电场对处在场内的其他电荷有力作用。电荷受到电场的作用力仅由该电荷所在处的电场决定，与其他地方的电场无关。静止电荷产生的电场称为静电场，它不随时间而变化。

用试探点电荷可以研究电场强度。电场内任意一点的电场强度在数值上等于一个单位电量的正电荷在该点受到的作用力，它方向与该点电荷受力的方向相同。电场强度是空间坐标的矢量函数，***E***=***E***（x，y，z），即矢量场，是带电体周围的一个具有特定性质的空间。它具有能量，是一种客观物质。点电荷的电场强度为：

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}e_r$$

电场强度同样满足电场的叠加原理。点电荷系和带电体产生的电场强度可用叠加原理求得，如带电体的电场强度为：

$$E=\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\iiint_{V'}\frac{\rho(r')}{\left|r-r'\right|^3}dV'$$

5．高斯定理

空间电场分布可以用电力线表示。电力线的切线的方向与相应点场强的方向一致，且它的数密度与该点的场强的大小成正比。凡是电场线密集的地方，场强就大，电场线稀疏的地方，场强就小。

电场对任意封闭曲面的电通量只决定于被包围在封闭曲面内部的电荷，且等于包围在封闭曲面内电量代数和除以ε_0，与封闭曲面外的电荷无关.

$$\oint_S E\cdot dS=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{内} q_i$$

高斯定理表明是静电场是有源场，如果在高斯面内部或外部电荷分布发生改变，则空间电场分布将发生变化，但只要高斯面内部总电荷数不变，高斯定理指出，电场对通过该封闭曲面的电通量并无变化。

用高斯定理可以计算具有几何对称形状的均匀带电体的电场强度。高斯定理是静电场的一条重要基本定理，它是从库仑定律导出来，但比库仑定律更普遍。

6．环路定理

静电场的环量表示静电场对沿该闭合路径移动的单位正电荷所作的功。静电场是无旋场，静电场作功与路径无关，只与起点与终点的位置有关；或静电场沿任何闭合环路作功为零。

$$\oint_L E\cdot dl=0$$

电场的这个性质来源于库仑力的有心力特性；而不是平方反比律。环路定理表明静电场电力线不可能是闭合曲线。

7．电势

静电场的环路定理，即电场力作功与路径无关的性质，可知静电场是保守力场。保守力场的特性是存在势函数。在静电场中，当把电荷在电场中运动时，电场力作的功应当等于电势能的减少。电势是电场的本身特性，它在数值上等于单位点电荷置于该点的电势能。或单位点电荷从无限远处经任意路径移到该点电场力所做的功。电势只具有相对意义，对有限分布的电荷，通常取无限远处为电势的参考点（零点）。

在静电场中，两点的电势差为：

$$U_{ab} = \int_a^b E \cdot dl$$

点电荷产生的电势为：

$$U(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

电势同样满足叠加原理，电荷组和带电体产生的电势可用叠加原理计算，如带电体的电势为：

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho(r')}{|r - r'|} dV'$$

电势为空间坐标的标量函数，电势的等值面称为等势面，在同一等势面上，电势处处相等。静电场中任何一点的电场强度的大小在数值上等于该点电势梯度的大小，方向与电势梯度的方向相反，指向电势降落的方向，

$$E = -gradU$$

已知电势 U，就可通过计算其梯度求得场强 E，同样已知电场强度 E，也可求得电势。