

有限长螺线管串联等效电感的计算

芮雪

4系2001级

摘 要

✦ 对于长为 L ，体积为 V ，单位长度上匝数为 n 的螺线管，其自感：

$$L = \mu_0 n^2 SL$$

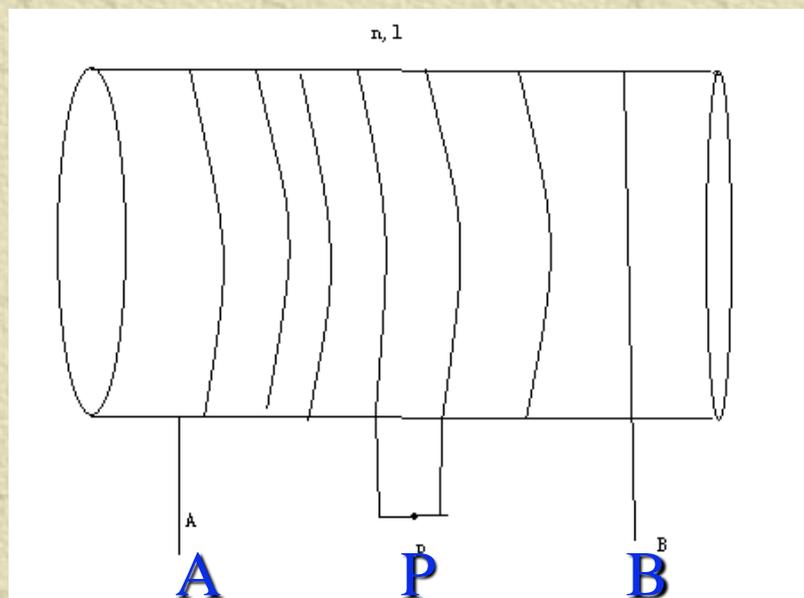
而两个顺接串联的螺线管 $L=L_1+L_2+2M$ ，其中 M 为两螺线管互感。这两式均已经证明，但若同时使用这两式进行计算时，将出现矛盾。经计算发现，其根本原因在于有限长螺线管内部磁场的计算方法上。本文将从有限长螺线管内部磁场的计算出发，根据磁场的叠加性原理，唯一性定理及铁磁性材料的特性，重新计算 M,L 的表达式，并证明 $L=L_1+L_2+2M$ 的正确性。

引言

✦ 考虑如图的螺线管，
其自感系数

$$L = \mu_0 n^2 V$$

若从P点剪断，再接
合。即视为AP，PB
两螺线管的串联，则



$$L_{AP} = \mu_0 n^2 s \overline{Ap}$$

$$L_{BP} = \mu_0 n^2 s \overline{Bp}$$

$$L = L_{AP} + L_{BP} + 2M$$

$$= \mu_0 n^2 s \overline{Ap} + \mu_0 n^2 s \overline{Bp} + 2M$$

$$= L + 2M$$

$$M = K \sqrt{L_{Ap} L_{Bp}}$$

K为耦合系数。若有铁芯，AP，PB应耦合的很好。即便没有铁芯，两螺线管靠的如此之近，M不应为零。则

$$L' \neq L$$

直观上理解，这是同一个螺线管应有 $L'=L$ 。这便出现了矛盾。

正文

✦ 准备工作

在本文中，讨论的螺线管参数如下：

L:螺线管长度

n:螺线管单位长度上匝数

I:线圈上电流强度

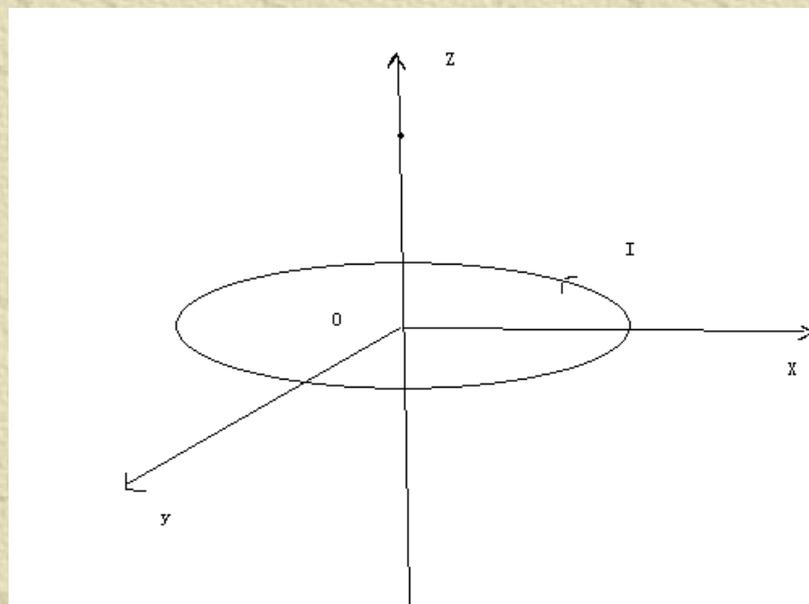
S:螺线管截面积

R:螺线管截面半径

1.圆线圈载流轴线上磁感应强度的大小

✦ 线圈半径为R，通以电流I，则其轴线上点Z处

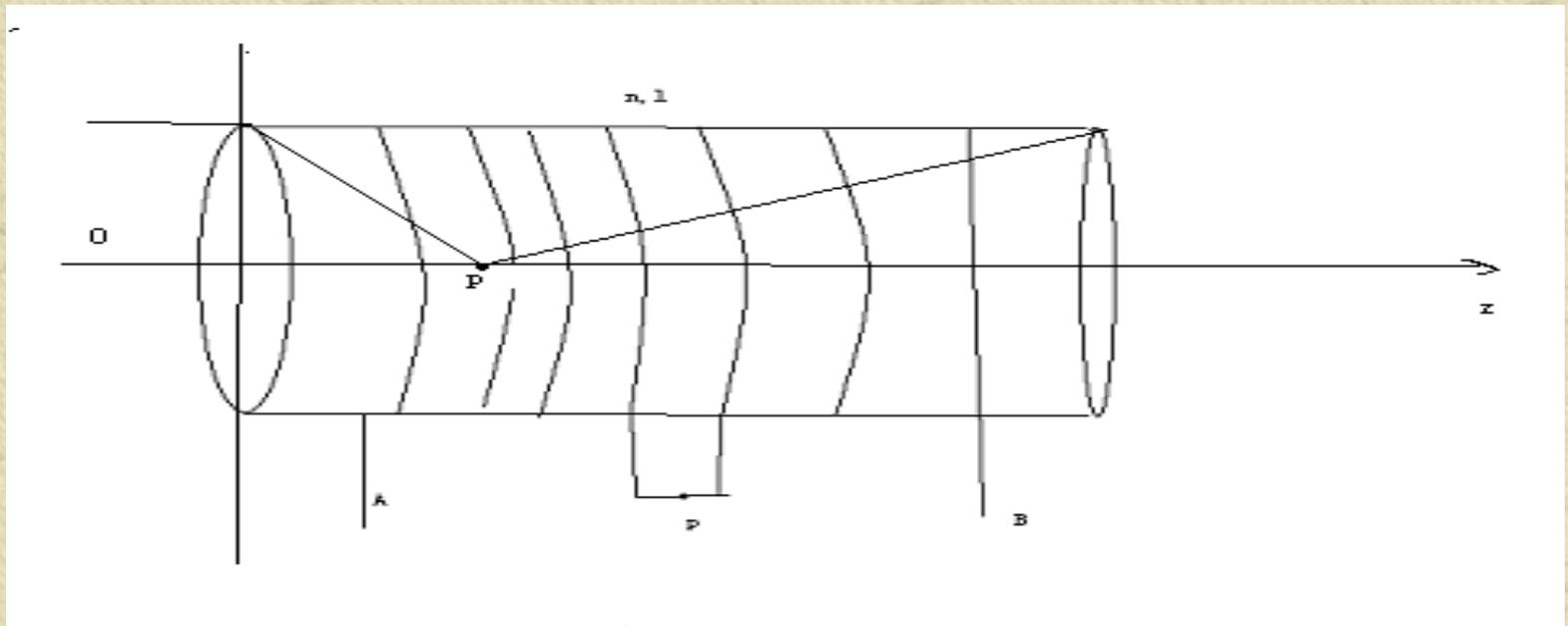
$$B_z = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}}$$



2. 没有铁芯时有限长密绕螺线管轴线上磁感应强度的大小.

✦ 没有铁芯时有限长密绕螺线管轴线上磁感应强度

$$B_p = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$



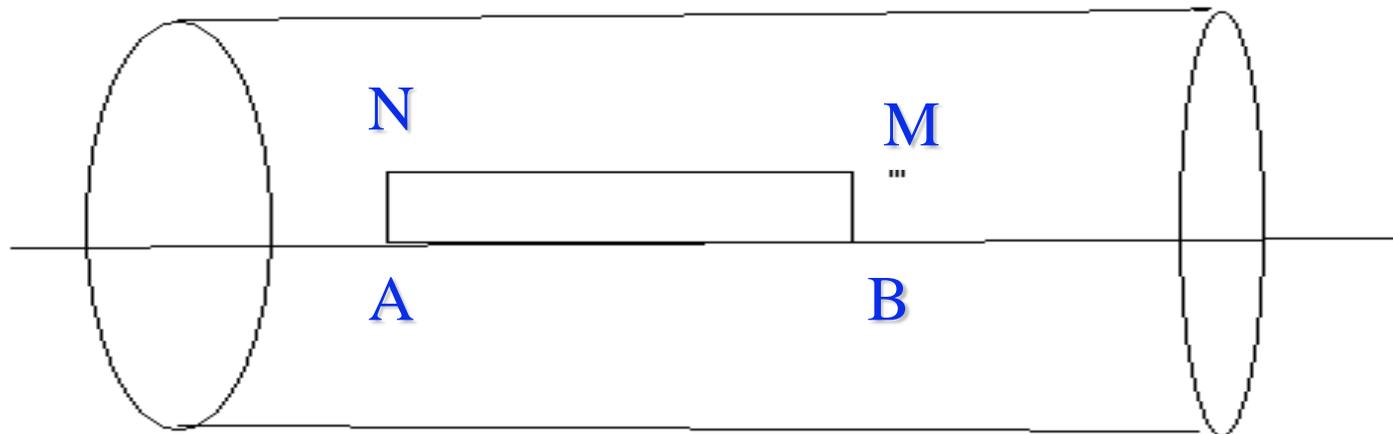
3.沿轴向均匀磁化的有限长磁棒轴线上磁感应强度的大小.

- ✦ 设介质磁化强度为 M ,磁化引起的附加磁感应强度计算如下:磁化宏观效果相当于在介质棒侧面引起环行磁化电流.单位长度电流 $i^{\prime}=M$,这也就相当于一个螺线管, i^{\prime} 相当于 nI .
所以对轴线上一点 P 有:

$$\begin{aligned} B_p &= \frac{\mu_0 i^{\prime}}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \\ &= \frac{\mu_0 M}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \end{aligned}$$

4. 一个假设

- ✦ 一般地说,对于螺线管, $L \gg R$,在 R 较小的情况下,在螺线管内取一小回路 $ABMN$,则:
 $BMNdl + BANdh + BABdl + BBMdh = 0$



$dh < R$, 且螺线管内部即使没有铁芯, 磁力线也比较平行, 垂直Z轴的分量很小, 所以:

$$B_{AN} dl \approx 0$$

$$B_{BM} dl \approx 0$$

$$B_{AN} \approx B_{BM}$$



对于有铁芯的情况更是这样.因此,在下面的计算中,将以轴线上一点处的磁感应强度近似代替这点处垂直Z轴的面上的磁感应强度.

螺线管没有铁芯时的情况

$$B_p = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

$$\cos \beta_2 = \frac{l - x}{\sqrt{(l - x)^2 + R^2}}$$

$$\cos \beta_1 = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$d\Phi = Bsndx$$

$$\Phi = \int d\Phi$$

$$= \int_0^l \frac{\mu_0 n^2 I s}{2} \left(\frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + R^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) dx$$

$$= n^2 \mu_0 I s \left(\sqrt{l^2 + R^2} - R \right)$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = n^2 \mu_0 s \left(\sqrt{l^2 + R^2} - R \right)$$

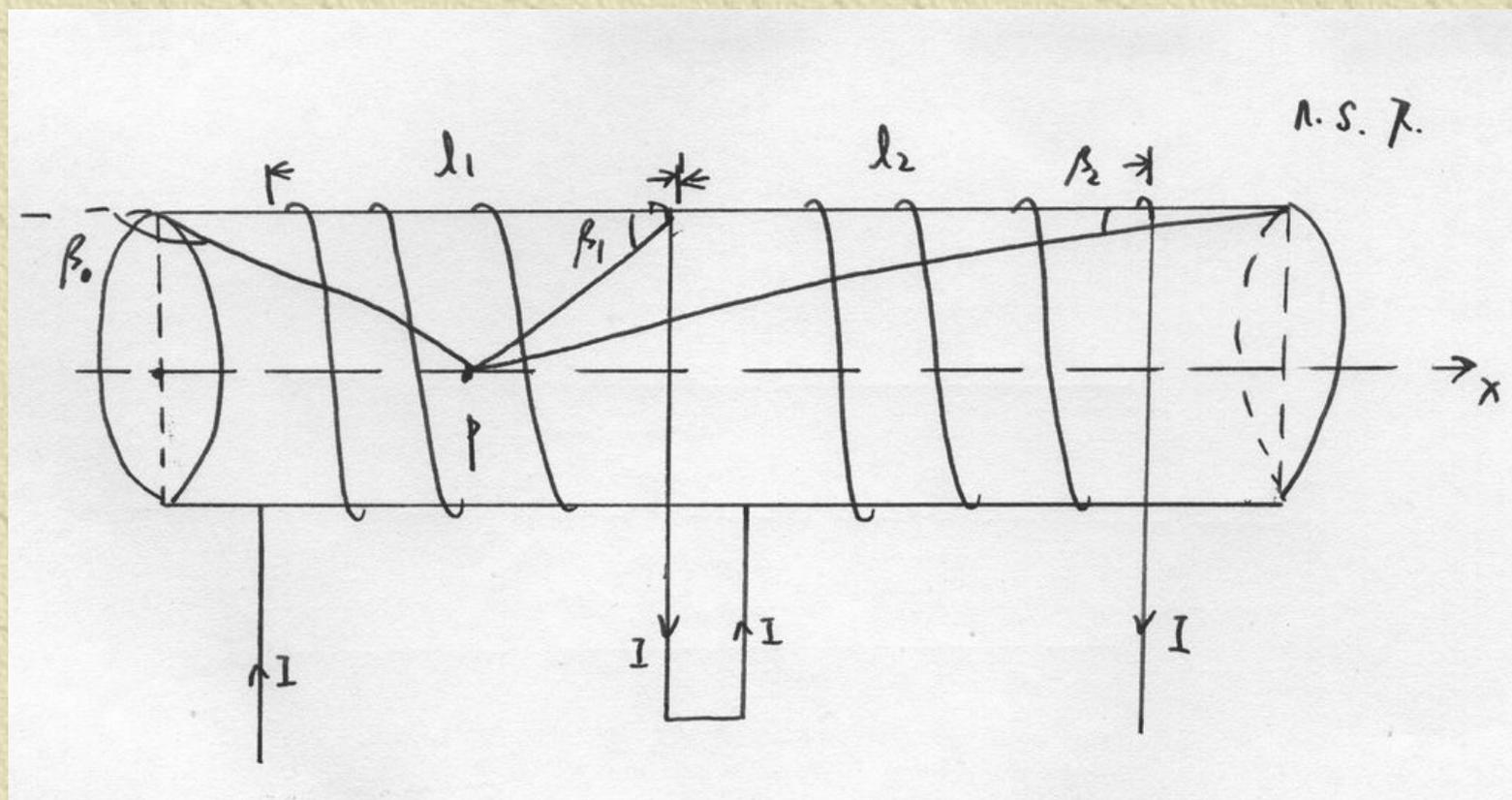
✦ 可见，当为无限长情况时

$$l \gg R$$

$$L \approx n^2 \mu_0 s l = n^2 \mu_0 V$$

对于有限长螺线管串联的情况

✦ 如图 $l = l_1 + l_2$





✦ 1. 对于L1管($x < l_1$)

$$B_p = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_1 - \cos \beta_0 + \cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$
$$= B_{P1} + B_{P2}$$

$$B_{p1} = \frac{n\mu_0 I}{2} (\cos \beta_1 - \cos \beta_0)$$

✦ 是I1在其自身处($x < l_1$)产生的B大小

$$B_{p2} = \frac{n\mu_0 I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

✦ 是I2在I1处($x < l_1$)产生的B大小

$$\cos \beta_2 = \frac{l - x}{\sqrt{(l - x)^2 + R^2}}$$

$$\cos \beta_0 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$\cos \beta_1 = \frac{l_1 - x}{\sqrt{(l_1 - x)^2 + R^2}}$$

$$d\Phi = Bsndx$$

$$\Phi = \int d\Phi$$

$$= \int_0^{l_1} \frac{\mu_0 n^2 I s}{2} \left[\frac{l_1 - x}{\sqrt{(l_1 - x)^2 + R^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right] dx$$

$$+ \left[\frac{l - x}{\sqrt{(l - x)^2 + R^2}} - \frac{l_1 - x}{\sqrt{(l_1 - x)^2 + R^2}} \right] dx$$

$$= \frac{n^2 \mu_0 I s}{2} \left[2 \left(\sqrt{l_1^2 + R^2} - R \right) + \right.$$

$$\left. \left(\sqrt{l^2 + R^2} - \sqrt{l_2^2 + R^2} - \sqrt{l_1^2 + R^2} - R \right) \right]$$

$$= \Phi_{l_1} + \Phi_{l_2}$$

$$\Phi_{l_1} = n^2 \mu_0 I s \left(\sqrt{l_1^2 + R^2} - R \right)$$

✦ 是11在自身处产生的磁通，则11自感L1为

$$L_1 = \frac{\Phi_1}{I} = n^2 \mu_0 s \left(\sqrt{l_1^2 + R^2} - R \right)$$

$$\Phi_{l_2} = \frac{n^2 \mu_0 I s}{2} \left(\sqrt{l^2 + R^2} - \sqrt{l_2^2 + R^2} - \sqrt{l_1^2 + R^2} - R \right)$$

✦ 为12在11处产生的磁通量,则互感M为:

$$M_{21} = \frac{n^2 \mu_0 s}{2} \left(\sqrt{l^2 + R^2} - \sqrt{l_2^2 + R^2} - \sqrt{l_1^2 + R^2} - R \right)$$

✦ 若为无限长螺线管, $l \gg R, l_1 \gg R, l_2 \gg R$

$$M_{21} \approx \frac{n^2 \mu_0 s}{2} (l - l_1 - l_2) = 0$$

✦ 2. 对于L2, 仿上计算

$$\begin{aligned} B_p &= \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_1 - \cos \beta_0 + \cos \beta_2 - \cos \beta_1) \\ &= B_{P1} + B_{P2} \end{aligned}$$

$$B_{p1} = \frac{n\mu_0 I}{2} (\cos \beta_1 - \cos \beta_0) \dots$$

✦ 为11在12处产生的B大小

$$B_{p2} = \frac{n\mu_0 I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

✦ 为12在自身处产生的B大小

$$\cos \beta_2 \doteq \frac{l - x}{\sqrt{(l - x)^2 + R^2}}$$

$$\cos \beta_0 \doteq -\frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$\cos \beta_1 \doteq \frac{l_1 - x}{\sqrt{(l_1 - x)^2 + R^2}}$$

$$d\Phi = Bsndx$$

$$\Phi = \int d\Phi$$

$$= \int_{l_1}^{l_2} \frac{\mu_0 n^2 I s}{2} \left[\frac{l_1 - x}{\sqrt{(l_1 - x)^2 + R^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right] dx$$

$$+ \left[\frac{l - x}{\sqrt{(l - x)^2 + R^2}} - \frac{l_1 - x}{\sqrt{(l_1 - x)^2 + R^2}} \right] dx]$$

$$= \frac{n^2 \mu_0 I s}{2} [2(\sqrt{l_2^2 + R^2} - R) +$$

$$(\sqrt{l^2 + R^2} - \sqrt{l_2^2 + R^2} - \sqrt{l_1^2 + R^2} - R)]$$

$$= \Phi_{l_1} + \Phi_{l_2}$$

$$\Phi_{l_2} = n^2 \mu_0 I s \left(\sqrt{l_2^2 + R^2} - R \right)$$

✦ 为 l_2 在自身处产生的磁通量，则其自感 L_2 为：

$$L_2 = n^2 \mu_0 s \left(\sqrt{l_2^2 + R^2} - R \right)$$

$$\Phi_{11} = \frac{n^2 \mu_0 I s}{2} \left(\sqrt{l^2 + R^2} - \sqrt{l_2^2 + R^2} - \sqrt{l_1^2 + R^2} - R \right)$$

✦ 为11在12处产生的磁通量，则互感M为：

$$M_{12} = \frac{n^2 \mu_0 s}{2} \left(\sqrt{l^2 + R^2} - \sqrt{l_2^2 + R^2} - \sqrt{l_1^2 + R^2} - R \right)$$

✦ 可见M12=M21

由顺接串联的螺线管等效自感计算公式

$$\begin{aligned} L' &= L_1 + L_2 + 2M \\ &= n^2 \mu_0 s \left(\sqrt{l_1^2 + R^2} - R \right) + n^2 \mu_0 s \left(\sqrt{l_2^2 + R^2} - R \right) \\ &\quad + 2 \frac{n^2 \mu_0 s}{2} \left(\sqrt{l^2 + R^2} - \sqrt{l_1^2 + R^2} - \sqrt{l_2^2 + R^2} - R \right) \\ &= n^2 \mu_0 s \left(\sqrt{l^2 + R^2} - R \right) \\ &= L \end{aligned}$$

两者完全吻合。

有铁芯的情况

✦ 铁磁性材料性质十分复杂，这儿只能做一个简单讨论。

螺线管内磁场变化较小，铁芯在其中可视作均匀磁化。于是，可按沿轴向均匀磁化的有限长磁棒计算其轴线上磁感应强度的大小。

假设M与H成线性关系，这在H较小时是可以的，或者，我们可以用H点对应的 μ_r 。

✦ 由介质磁化规律， $I = \mu_r I_0$ 。所以，有铁芯存在时，螺线管内 B' 近似等于没有铁芯时 B 的 μ_r 倍。与前文的计算完全相同，可以证明式子 $L = L_1 + L_2 + 2M$ 的正确性。

出现矛盾结果的原因及分析讨论

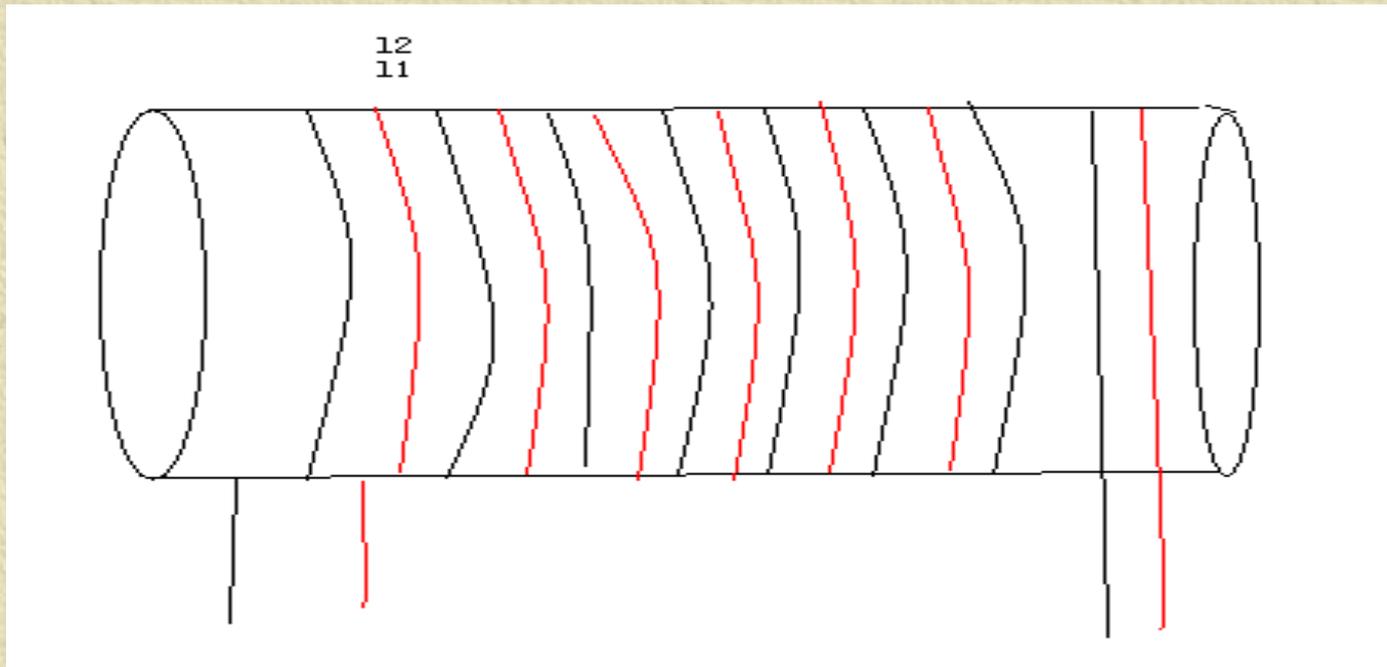
出现矛盾结果的原因我认为有4个方面：

✦ 1. 以无限长代替有限长的情况。

实际上，由于此时 V 已为无穷大，导致 L 也为无穷大，讨论已无意义。

✦ 2. 本文中所讨论的情况，即两螺线管串联时，其位形与两线圈叠绕不同，

$$M \neq \sqrt{L_1 L_2}$$



✦ 3. 磁介质对M, L的影响

考虑位于磁介质中的两线圈 L_1 , L_2 , 分别载有电流 I_1 , I_2 。由于磁介质的存在, I_1 在 I_2 处产生的磁场应是磁介质由于 I_1 存在引起的磁化电流及 I_1 共同在 I_2 处产生的磁场。而磁介质的磁化情况与 I_1 , I_2 都有关系。

✦ 就本文而言，由于使用的是铁芯，铁作为典型的铁磁性材料， M 与 H 已不是线性关系。

I_1 ， I_2 同时存在时磁介质的磁化情况已不是 I_1 ， I_2 单独存在情况的简单叠加。同时，不一样的 I_2 对磁介质影响不同，使 I_1 在 I_2 处引起的磁场也不同。这样一来，磁通量也不同，导致互感 M 与 I_2 也有了关系。

✦ **4. 铁磁性材料对磁力线束缚情况，这是最为主要的原因。**

铁磁性材料，理想情况下，它会将磁力线束于其内而几乎不穿出。但这有条件，条件就是磁路。

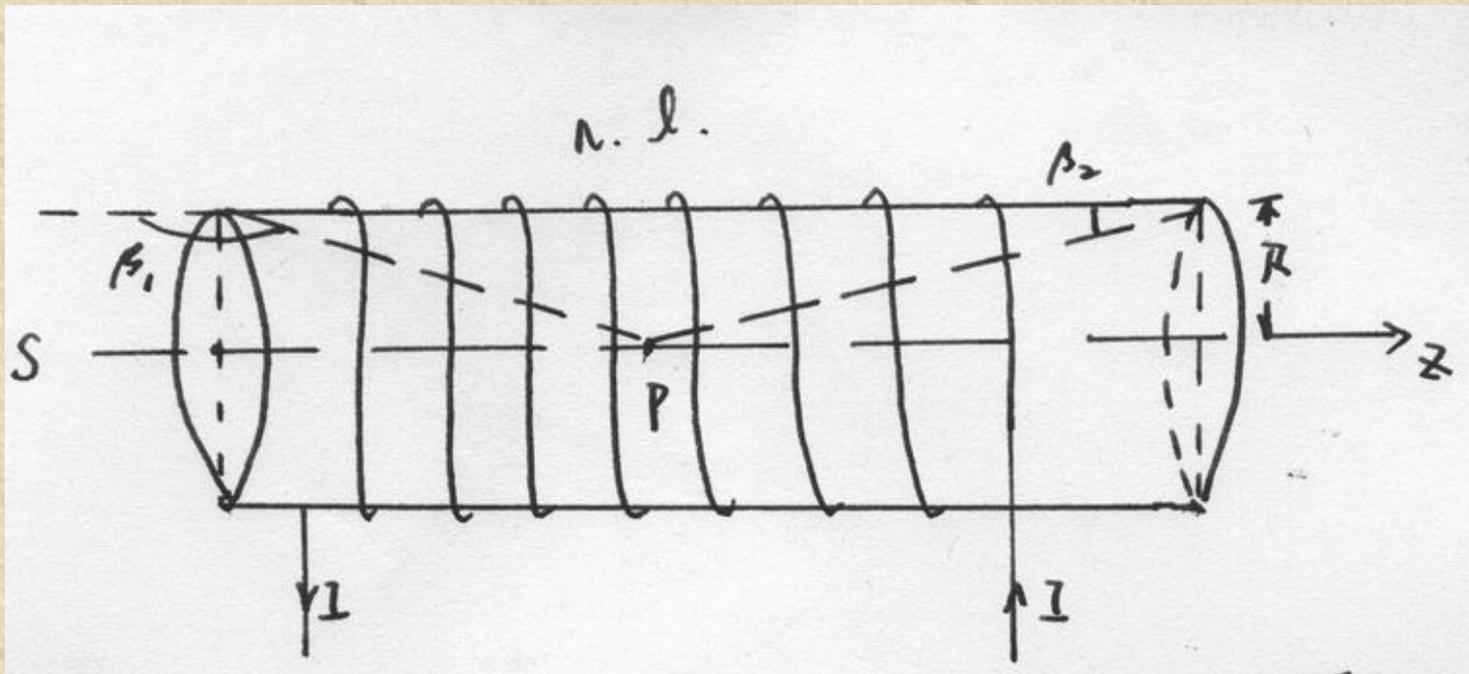
✦ 当铁芯的磁导率均匀且填满磁场的某个闭合的磁力线管（磁力线管指的是一束磁感应线组成的管状区域，其中的磁感应线与管壁平行。）时，由磁场的唯一性定理，合磁场的磁力线位形将与原外磁场完全一致。以至这样安排的闭合铁芯的确构成一个理想磁路。要构成一个磁路，首先铁芯必须闭合。

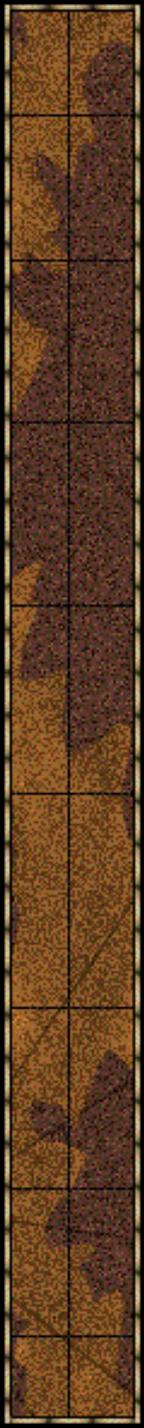
- ✦ 对于密绕的螺绕环。环管本身正好是磁力线管。当其内部为均匀圆环状铁芯填满时就构成理想磁路。此时 $B=n\mu_r I$ 。
- ✦ 无限长螺线管可视为半径为无穷大的螺绕环，因此其内 $B=n\mu_r I$ 。

- ✦ 气隙对磁路有很大影响。气隙的存在，即使是很小的气隙，都会使磁路中 B 大大下降。
- ✦ 对有限长螺线管而言，它就相当于一个有很大气隙的磁路，此时的漏磁已非常严重，不能视之为理想情况而将铁芯中 B 认为还是 $n\mu_r I$ ，是一匀强磁场。否则，将会出现下面的矛盾：

✦ 如图，绕在同一铁芯上的两组线圈M，N单位长度上的匝数均为n，长为l，若仍认为理想磁路 $B=n\mu_r I$ ，且理想束磁，M中 $B=n\mu_r I$ ，N中 $B=n\mu_r I$ ，

✦ 考虑M中一点P处，M在P处产生的B为 $B_m = n\mu r I$ ，N在自身处 $B = n\mu r I$ ，由于铁芯良好束磁， $B_n = B = n\mu r I$ ，则由磁场叠加原理， $B_p = B_n + B_m = 2n\mu r I$ ，但这实际上可视为一个长为 $2L$ ，单位长度上匝数为 n 的螺线管，从而 $B_p = n\mu r I$ 。这个矛盾也就是文中开头所提出的矛盾的根源。





✦ 可见，有限长的带铁芯螺线管，在这儿，必须按照磁介质的磁化规律，按部就班的计算，不能简单的视作理想情况处理。

从能量的角度出发考虑

✦ N个载流线圈系统磁能:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k \\ i \neq k}}^n M_{ik} I_i I_k + \frac{1}{2} \sum_i^n L_i I_i^2$$

✦ 对于两个顺接串联的螺线管

$$W_m = \frac{1}{2} (M_{12} I^2 + M_{21} I^2) + \frac{1}{2} (L_1 I^2 + L_2 I^2)$$

$M_{21} = M_{12} = M$, 则

$$W_m = MI^2 + \frac{1}{2} L_1 I^2 + \frac{1}{2} L_2 I^2 = \frac{1}{2} LI^2$$

✦ 同样可以得到

$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

结 论

✦ 实际上 $L=L_1+L_2+2M$ 这个式子的导出，基于的是磁通量的叠加性，而这又是基于 B 的叠加性，所以，这个式子不会有误。但是， L ， M 的计算，涉及到具体情况，必须从实际的 B 出发推导其表达式。这种计算往往涉及磁介质，边界条件，十分复杂。因此，在实际中， L ， M 的获得，一般是根据实验测量，而非理论计算。这也就是理想与实际的差别吧。



谢谢!