静电场高斯定律在空间对称引力场中的应用

PB01207092 严寒

摘要

高斯定律是静电场的一条基本定律，其成立源于静电场的保守性.本文依据引力场同样具备的保守性，探讨高斯定律在非相对论引力场中的类比应用，以简化具空间对称性的引力场的相关计算.

引 言

在静电场中有我们熟知的高斯定律[1]成立：

$$\phi_e = \oint\!\!\oint_s \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{0\text{int}}$$

利用此定律可方便解出空间对称状况下的E，或反过来由E求出相应的q_0或ρ_0．仔细研究可知代表电场强度的E的有源性——或保守性——正是高斯定律成立的理由；电场线由q_0发出（或终止），因而ρ_0与电场线通量密度，即电场强度E的散度之间存在明显的对应关系．事实上，若用电位移通量D代替E，则此一关系更可简单表示为[2]：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_0$$

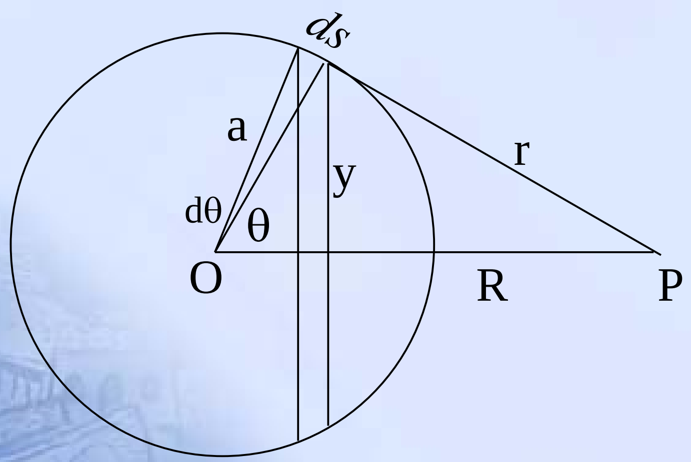
上市即有介质情况下的高斯定律微分形式.运用数学上的高斯定律，此式可还原为积分形式：

$$\phi_e = \oint\!\!\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \boldsymbol{D}) dV = \iiint_V \rho_0 dV = \sum q_{0\text{int}}$$

这表明，根据静电场在数学上的保守性和对E的定义即可导出高斯定律．

引力场情况：

设有一只薄球壳，半径为a，质量为m，现求距球心R处的一个质量为m的质点所受的力.



由势能求保守力[3]，得：

$R \geq a:$

$$F = -\frac{dU}{dR} = -G\frac{mm'}{R^2}$$

$R < a:$

$$F = 0$$

以上为牛顿力学的处理方法.

将高斯定律应用于引力场：

定义引力场强度E_g为单位质元m在引力场中某点所受之引力：

$$\boldsymbol{E}_g = \frac{\boldsymbol{F}_g}{m} = \boldsymbol{a}$$

(下标g表示gravitation，引力)

E_g的方向为引力方向.将这些方向以假想线表示，并以疏密度表示E_g的大小，即为引力线.引力线指向被研究的物体.

在球壳问题中，引力线终止于球壳表面.

对球壳问题应用高斯定律：

（k为比例常数）

$$\oiint \boldsymbol{E}_g \cdot d\boldsymbol{S} = k\sum m$$

$R > a$:

$$-E_g \cdot 4\pi R^2 = km$$

$$E_g = -\frac{km}{4\pi R^2} = \frac{F_g}{m'} = -G\frac{mm'}{R^2 m'} = -\frac{Gm}{R^2}$$

$$k = 4\pi G$$

$$\oiint \boldsymbol{E}_g \cdot d\boldsymbol{S} = 4\pi G\sum m$$

$R < a$:

$$-E_g \cdot 4\pi R^2 = 4\pi G \cdot 0$$

$$E_g = 0$$

（与牛顿力学计算一致）

一个均匀球状分布的星系[4]，总质量为M，半径为R_0. 距星系中心为r处有一质量为M_1的星体.求M_1所受的引力.

$$\oiint \boldsymbol{E}_g \cdot \boldsymbol{dS} = 4\pi G \sum m$$

$$-E_g \cdot 4\pi r^2 = 4\pi GM \frac{r^3}{R_0^3}$$

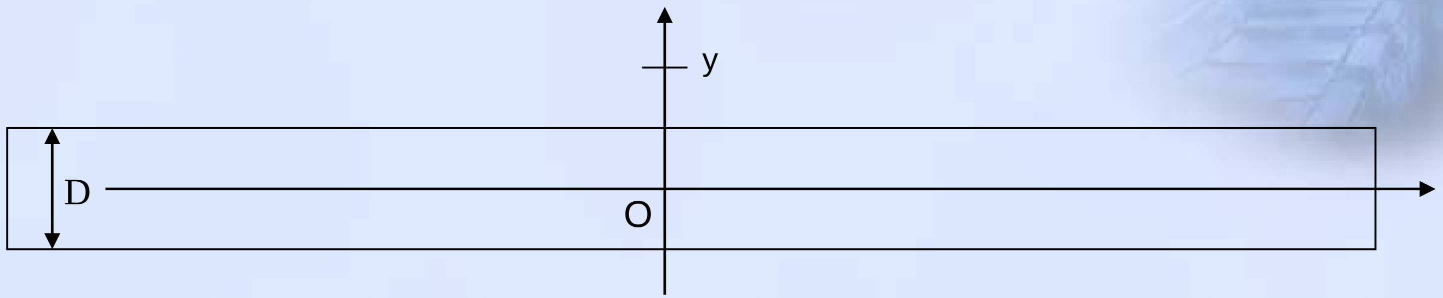
$$E_g = -\frac{GMr}{R_0^3}, \quad F_g = mE_g$$

$$F_g = -\frac{GMM_1 r}{R_0^3}$$

与牛顿力学[5]的计算结果相同.

设有一无限大平板，厚为D，

求到其中心平面距离为y的某质点（质量为m’）所受的力.



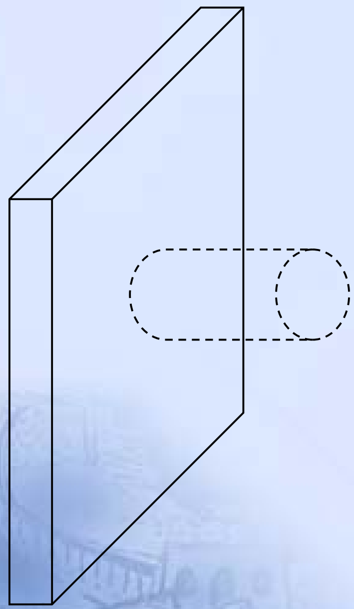
按力学解法，需用极坐标进行面积分，求出势能，

再由势能求导计算保守力.结果为[6]：

$$y \geq \frac{D}{2}: \qquad a_y = \frac{f_y}{m'} = -2\pi G\rho D, \quad f_y = -2\pi G\rho D m'$$

$$y < \frac{D}{2}: \qquad f_y = -4\pi G\rho y m'$$

以高斯定律解：



$$y \geq \frac{D}{2}:$$

$$\oiint \boldsymbol{E}_g \cdot \boldsymbol{dS} = 4\pi G \sum m$$

$$-2E_g \cdot \Delta S = 4\pi G \cdot \rho \Delta S D$$

$$E_g = -2\pi G \rho D = a_y$$

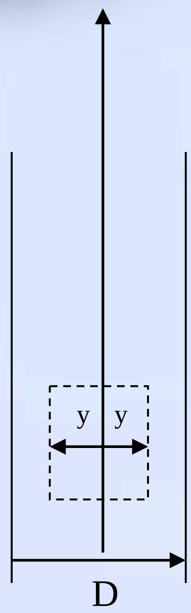
$$F = m' E_g = -2\pi G \rho D m'$$

$$y < \frac{D}{2}:$$

$$-2E_g \cdot \Delta S = 4\pi G \cdot \rho \cdot \Delta S \cdot 2y$$

$$E_g = -2\pi G \rho \cdot 2y = -4\pi G \rho y$$

$$F = -4\pi G \rho y m'$$



与力学计算结果相同.

结 论

以上计算及分析结果说明，用高斯定律计算空间对称引力场的问题，是简便而可靠的.我们并由理论导出比例常数$k=4\pi G$.如果在若干年后引力与电磁力能得到统一，则$4\pi G$这个常数将有可能以特定的地位出现在其过程中.而在目前尚未统一的状况下，使用高斯定律也可以省去很多繁杂的计算.

- **参考文献**

[1] P29，大学物理学 第3册，电磁学/张三慧 主编. -2版. -北京：清华大学出版社，1999. 12.

[2] P113，电磁学/张玉民，戚伯云编. -北京：科学出版社；合肥：中国科学技术大学出版社，2000. 8.

[3] P131-132，力学/程稼夫编. -北京：科学出版社；合肥：中国科学技术大学出版社，2000.

[4][5] 同上，P111-112. 4.9(a)

[6] 同上，P147. 5.18 (a) (r = 0)

致 谢

感谢魏谓老师对作者写作本文的鼓励与支持！