§1-5 高斯定理

一、 电力线

1. 电力线

若已知电荷分布，则空间各点的场强原则上都可求出。为了形象化地把客观存在的电场表示出来，常引人电场线这一辅助工具。

（1）电力线的定义

- **电力线上每一点的切线的方向与相应点场强的方向一致。**
- **电力线的数密度与该点的场强的大小成正比。**

$$\Delta N = E \Delta S_{\perp}$$

则这样定义的电力线既可以表示场强的方向，又可以表示场强的大小。

所谓电场线的数密度，就是通过垂直于场强方向的单位面积的电场线的条数。这样，凡是电场线密集的地方，场强就大，电场线稀疏的地方，场强就小。

（2）电力线的性质

- **电力线起自正电荷或无限远，终止于负电荷或无限远；**
- **若体系正负电荷一样多，则正电荷发出的电力线全部终止于负电荷；**
- **两条电力线不会相交；**
- **静电场中的电力线不会形成闭合曲线。**

电力线之所以具有这些基本性质，是由静电场的基本性质和场的单值性决定的。可用静电场的基本性质方程加以证明。

（3）一些典型电荷分布的电力线

- **点电荷的电力线：**

正点电荷的电力线是各个方向均匀地射出N根，同一球面相同面积的ΔS_1、ΔS_2有相同根数的电力线穿过。如图电力线的密度为：

$$\frac{N}{4\pi r^2}$$

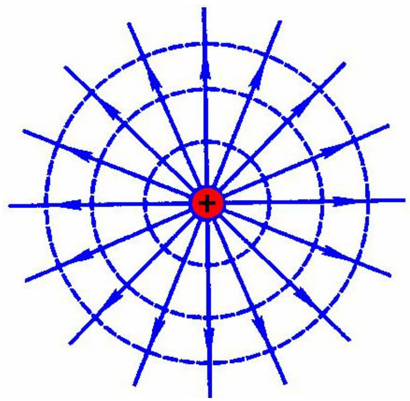

图 1-34 正点电荷电场的电场线（实线）

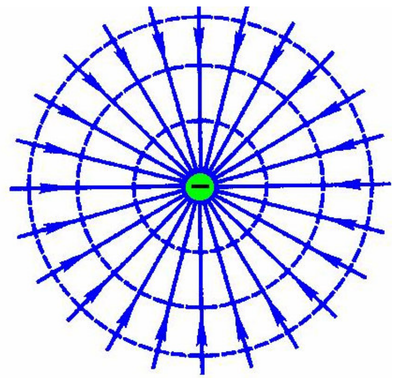

图 1-35 负点电荷电场的电场线（实线）

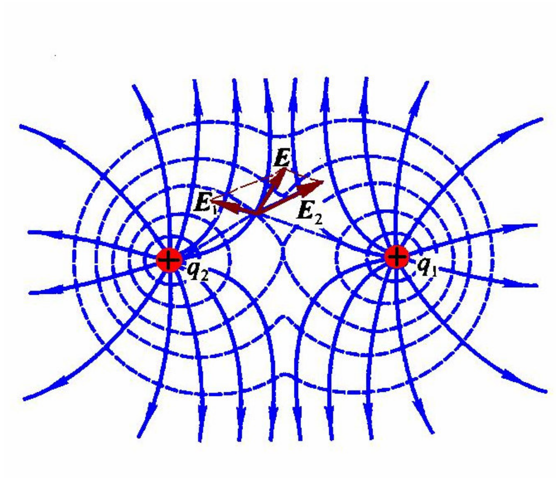

图 1-36 两等量正点电荷电场的电场线（实线）

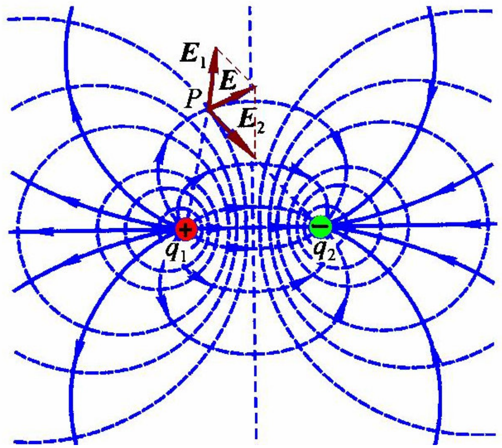

图 1-37 两等量异号点电荷电场的电场线（实线）

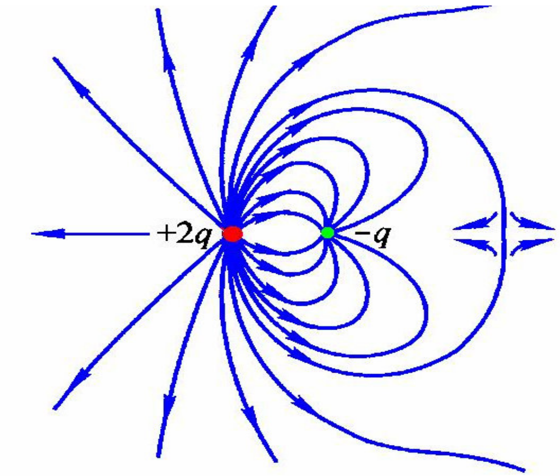

图 1-38 两不等量异号点电荷电场的电场线

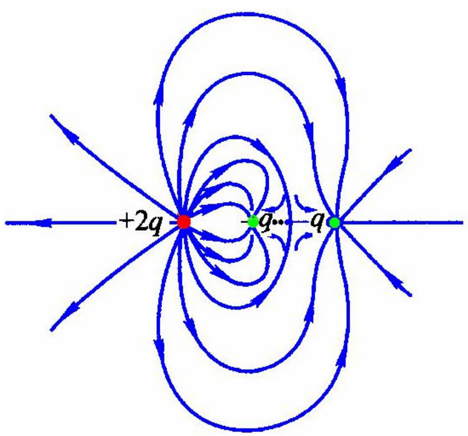

图 1-39 2q，-q，-q 三点电荷电场的电场线

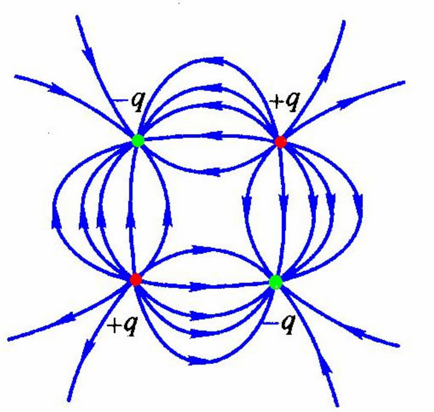

图 1-40 位于正方形四角上的四个点电荷电场的电场线

2. 电通量

（1）电力线的根数

电力线的密度为 $E \propto \Delta N / \Delta S_{\perp}$

取比例系数为 1，则 $\Delta N = E \cdot \Delta S_{\perp}$

当 E 与ΔS 不垂直时，ΔS 的法线与 E 不平行，则有：

$$\Delta N = E \cdot \Delta S$$

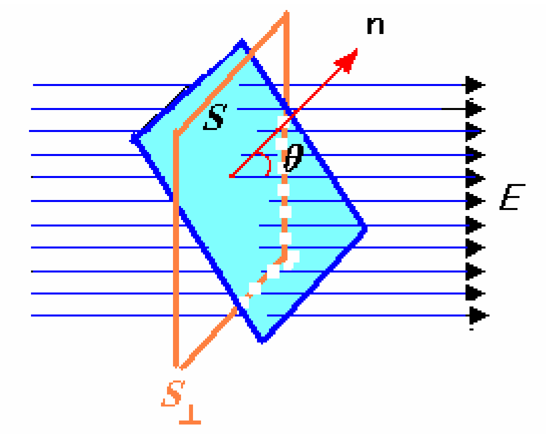

图 1-41 穿过某一截面的电力线和电通量

（2）电通量

- **电通量的定义**

$$\varDelta\varPhi = E \cdot \varDelta S = E\varDelta S\cos\theta$$

电通量的正负取决于电力线与曲面的法线方向的夹角θ。

对电力线不均匀或曲面不规则时，电通量可以由积分计算：

$$\varPhi = \iint_s E\cos\theta dS = \iint_s E \cdot dS$$

曲面法线方向的规定：

开曲面：凸侧一方的方向的外法线方向为正；

闭曲面：外法线方向为正，内法线方向为负。

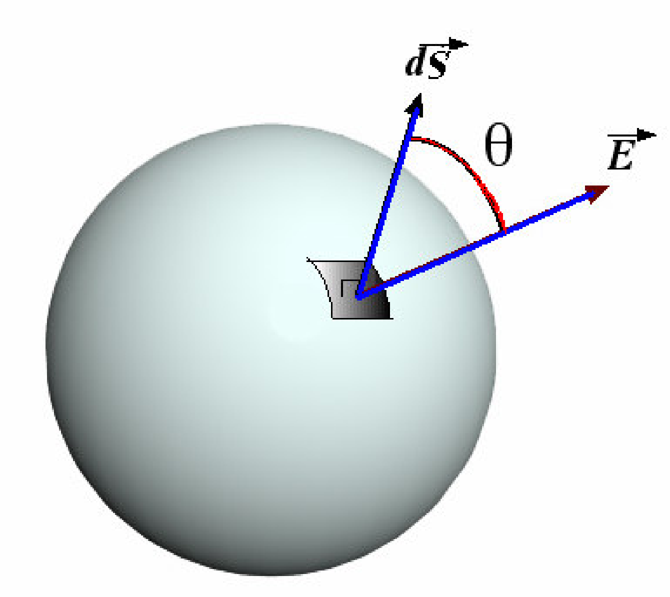

图 1-42 曲面的法线方向与电场方向

- **电通量的特点**
  - ✧ 由电场的叠加原理可推出电通量也满足叠加原理：

$$\Phi = \iint E \cdot dS = \iint \sum E_i \cdot dS = \sum_i \iint E_i \cdot dS = \sum_i \Phi_i$$

  - ✧ 电通量是标量

- **通过闭合曲面的电通量**

通过闭合曲面的电通量是通过该闭合曲面电通量的净电力线数目。如果闭合曲面内无电荷，则通过闭合曲面的电通量是零。

[例]求在均匀电场通过一矩形闭合曲面的电通量。

[解]通过矩形闭合曲面的电通量由通过六个面的电通量之和，根据对称性，有：

$$\Phi_{total} = \Phi_{Fr} + \Phi_{Bk} + \Phi_{Lf} + \Phi_{Rt} + \Phi_{Tp} + \Phi_{Bt} = 0$$

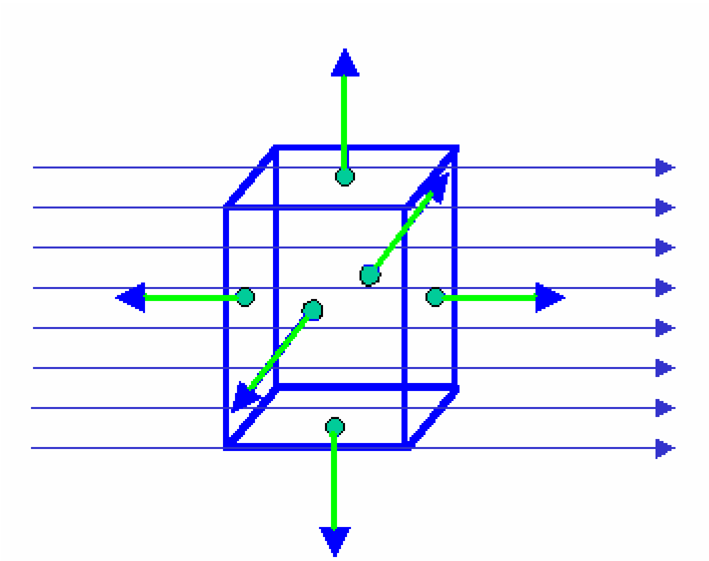

图 1-43 矩形闭合曲面的电通量

二、 高斯定理

1．数学家和物理学家高斯

图 1-44 数学家和物理学家高斯（1777-1855）

高斯是德国数学家 ，也是物理雪茄家，他和牛顿、阿基米德，被誉为有史以来的三大数学家。高斯是近代数学奠基者之一，在历史上影响之大，可以和阿基米德、牛顿、欧拉并列，有“数学王子”之称。

高斯的数学研究几乎遍及所有领域，在数论、代数学、非欧几何、复变函数和微分几何等方面都做出了开创性的贡献。由于高斯在数学、天文学、大地测量学和物理学中的杰出研究成果，他被选为许多科学院和学术团体的成员。“数学之王”的称号是对他一生恰如其分的赞颂。

2．高斯定理

（1）对任意曲面的电通量

假定电场由一电量为 q 的点电荷产生，dS 是曲面上的任一面元，它的位置由径矢 r 表示，r 的起点取在点电荷上．电场对 dS 的通量为：

$$d\Phi = E \cdot dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e_r dS}{r^2}$$

若以 q 所在处为中心、r 为半径作一球面，则 e_r.dS 就是面元 dS 在球面上的投影 dS_0，dS_0 / r^2 为 dS_0 对球心所张的立体角 dΩ，如图所示，

$$d\Omega = \frac{dS_0}{r^2} = \frac{e_r \cdot dS}{r^2}$$

dΩ正负由 dS 与 r 的交角而定，所以，点电荷的通量为：

$$\Phi = \iint_S E \cdot dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S d\Omega$$

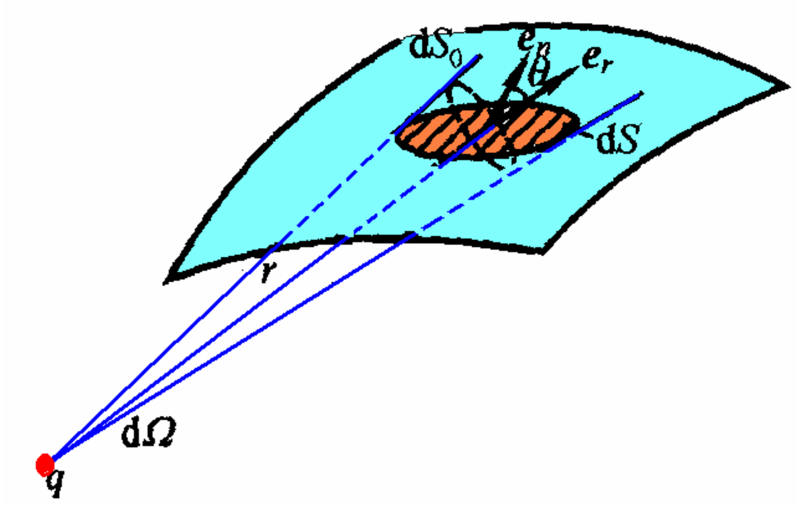

图 1-45 点电荷 q 的场对 dS 的通量

积分的值取决于点电荷在封闭曲面内部还是外部。

（2）点电荷在曲面内部

若点电荷在封闭曲面内部，如图所示，则因封闭曲面对曲面内任意一点张的立体角和单位园对 q 张的立体角相同，均为 4π，故

$$\Phi = \oiint_S E \cdot dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

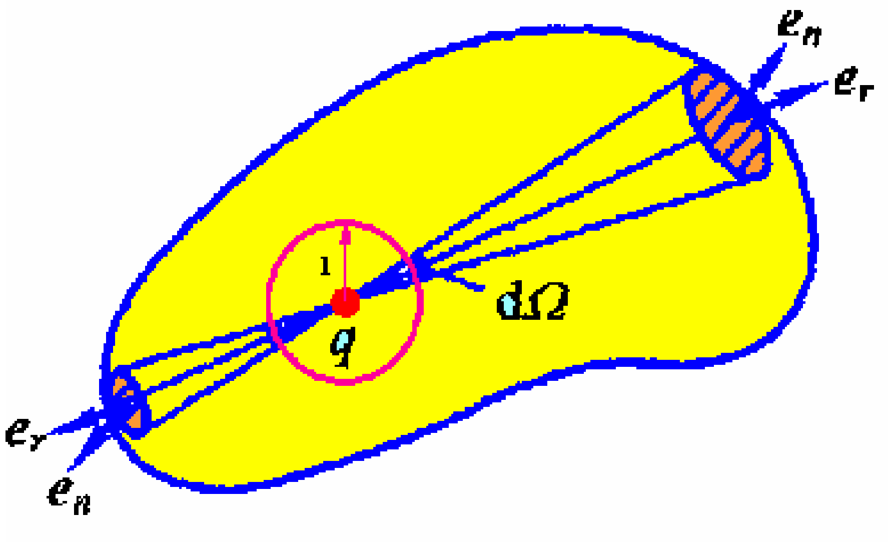

图 1-46 当 q 在封闭曲面内，曲面对 dS 对 q 张的立体角为 4π

若曲面的形状如图所示，点电荷在曲面的内部，从电荷 q 发出的电力线将在 A 区域穿过曲面三次，三次穿进穿出对应的面元对 q 点张的立体角值相同，穿出为正，穿入为负，故净穿出一次。在 B 区域只穿过曲面一次。只要电荷在曲面内部，穿进穿出的次数总是奇数次。该曲面 q 点张的立体角与单位园相同，为 4π。

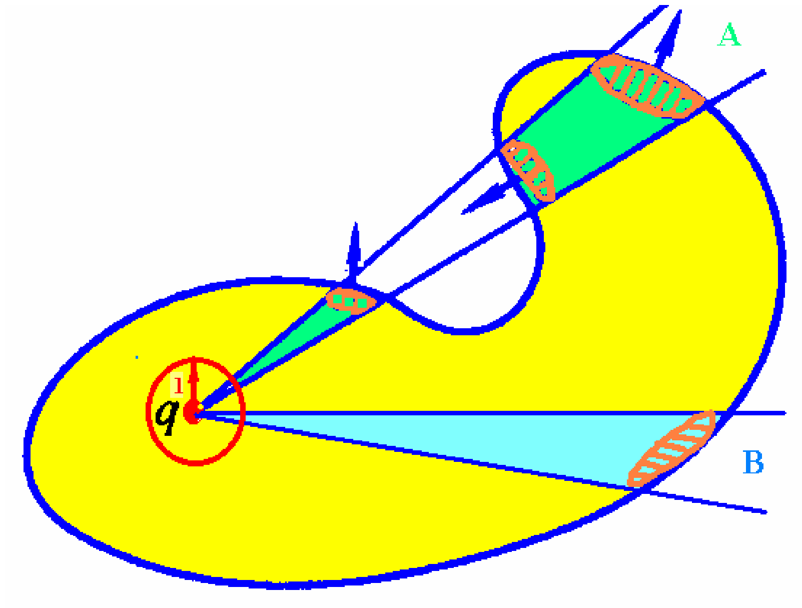

图 1-47 点电荷在曲面的内部，穿进穿出的次数总是奇数次

（3）点电荷在曲面外部

若点电荷在封闭曲面外部，如图所示，则任一面元 dS_1 对 q 所张的立体角必与另一面元 dS_2 对 q 张的立体角大小相等。

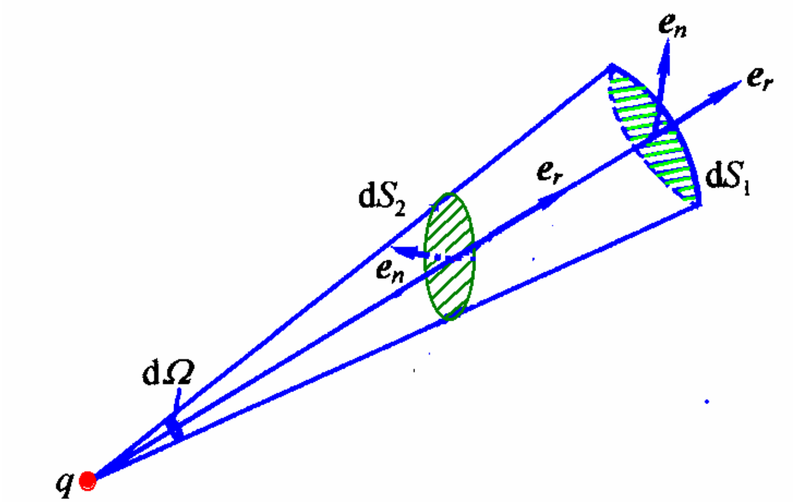

图 1-48 面元对点电荷所张的立体角

$$\frac{e_r \cdot dS_1}{r_1^2} = \frac{e_r \cdot dS_2}{r_2^2}$$

对任一闭合曲面，由于规定外法线方向为正，因此，dS_1 和 dS_2 对 q 张的立体角不仅大小相等，而且正负相反。因而两面元对 q 张的立体角之和为零。

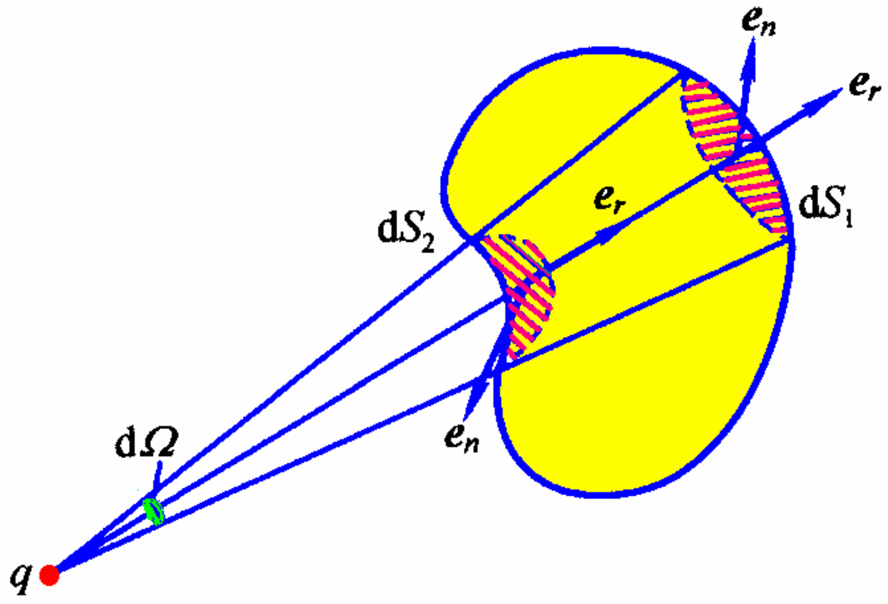

图 1-479 电荷在曲面的外面，穿进穿出的两曲面对 q 所张的立体角相互抵消

故：

$$\Phi = \oiint_S E \cdot dS = 0$$

因此封闭曲面总是由一一对应的一组面元构成，每一组面元对点 q 张的立体角都为零，因此，整个闭合曲面对曲面外任一点张的立体角为零。

当曲面如图所示，电力线重复穿进穿出曲面多次，但只要电荷在曲面的外面，穿进穿出的次数总是偶数，每穿进和穿出一次，其立体角的净贡献为零，这样总立体角贡献亦为零。上面的结论仍然成立。

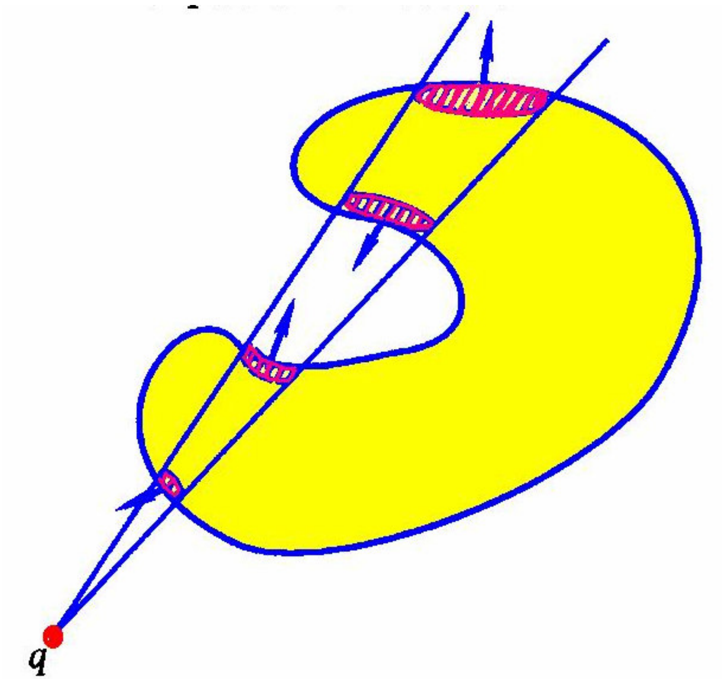

图 1-50 电荷在曲面的外面，穿进穿出的次数总是偶数

（4）高斯定理

综上所述，对一个点电荷的电场，所取的曲面包含点电荷时，曲面对电荷所张的立体角为 4π，曲面不包含电荷时，曲面对电荷所张的立体角为 0。

若电场由一组点电荷 q_1，q_2，q_3，…，q_N 共同产生，用 E_1，E_2，E_3，…，E_N 分别代表各点电荷单独产生的电场的场强。设有一任意形状的封闭曲面 S，它把 q_1，q_2，q_3，…，q_i 包围在内部，把 q_{i+1}，…，q_N 包围在外部，则由叠加原理，总电场 E 对封

闭曲面的电通量为

$$\oint_S E\cdot dS=\oint_S\sum_{i=1}^{N}E_i\cdot dS=\sum_{i=1}^{N}\oint_{S_i}E_i\cdot dS_i=\sum_{i=1}^{i}\oint_{S_i}E_i\cdot dS_i$$

或者：

$$\oint_S E\cdot dS=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{内}q_i$$

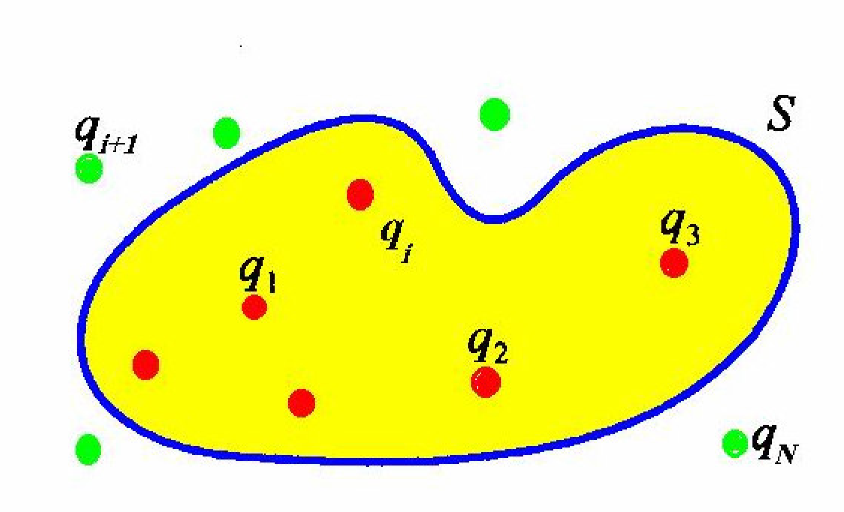

图 1-51 电场对封闭曲面的通量只与曲面所包的电荷有关

电场对任意封闭曲面的电通量只决定于被包围在封闭曲面内部的电荷，且等于包围在封闭曲面内电量代数和除以ε_0，与封闭曲面外的电荷无关。这一结论就是静电场的高斯（Gauss）定理。

若包围在 S 面内的电荷具有一定的体分布，电荷体密度为ρ，则高斯定理可写成：

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho dV$$

式中 V 是 S 所包围的体积。

3. 高斯定理的讨论

（1）高斯定理表明是静电场是有源场

高斯定理给出了场和场源的一种联系，这种联系是场强对封闭曲面的通量与场源间的联系，并非场强本身与源的联系。电荷是静电场的源。

（2）高斯面上的电荷问题

高斯面把电荷区分为内外两种，是否存在一种点电荷正好在高斯面上？这是不存在的，因为只有点电荷的线度要远小于 q 与高斯面间的距离，才能视为点电荷。

（3）高斯定理中的 E 问题

高斯定理中的 E 是全部电荷所产生的 E，而不管这电荷是在曲面内部或在曲面外部。同一高斯面的 E 可能相同，也可能不同，因为高斯面是任意选取的。

（4）高斯定理表明的只是电通量和电荷的关系

如果在高斯面内部或外部电荷分布发生改变，则空间电场分布将发生变化，高斯面上的电场也会发生变化，但只要内部总电荷数不变，高斯定理指出，电场对该封闭曲面的电通量并无变化。

（5）高斯定理的微分形式

由场论中知识，高斯定理可以写成微分形式：

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

表明电力线不会在没有电荷的空间产生或消失。

三、高斯定理与库仑定律的关系

1．高斯定理来源于库仑定理

高斯定理是静电场的一条重要基本定理，它是从库仑定律导出来的。它主要反映了库仑定律的平方反比律，即 $1/r^2$。如果库仑定律不服从平方反比律，我们就不可能得到高斯定理.

若：

$$f \propto \frac{1}{r^{2+\delta}}, \quad \Rightarrow \quad E \propto f \propto \frac{1}{r^{2+\delta}}$$

则：

$$\Phi = \oiint_S E \cdot dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oiint \frac{1}{r^{\delta}} d\Omega$$

亦即：

$$\Phi = \Phi(r)$$

高斯定理不成立。

因此证明高斯定理的正确性是证明库仑定律中平方反比律的一种间接方法，直接用扭秤法证明平方反比律的精度是非常低的，通过高斯定理证明平方反比律可获得非常高的精度。

2．高斯定理比库仑定理更普遍

高斯定理是库仑定律为基础导出的，但其使用范围远远超出静电场。库仑定律决定静电场具有平方反比律、径向性和球对称性，加上叠加原理可以推广到任意的静电场。

运动点电荷由于在运动方向上的特殊性，破坏了球对称性，匀速运动的点电荷的场为：

$$E=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}e_r$$

但仍满足高斯定理。

变化的磁场产生的涡旋电场，在涡旋场中任取一闭合曲面 S，显然

$$\oiint E_{涡}\cdot dS=0$$

也满足高斯定理，但涡旋电场不具有径向性和球对称性。

认为高斯定理与库仑定律完全等价，或认为从高斯定理出发可以导出库仑定律的看法是欠妥的，因为高斯定理并没有反映静电场是有心力场这一特性。

实际上，不增添附加条件如点电荷的电场方向沿径向并具有球面对称性等，并不能从高斯定理导出库仑定律。库仑定律不但说明电荷间的相互作用力服从平方反比律，而且说明电荷间的作用力是有心力。因此，在静电范围内，库仑定律比高斯定理包含更多的信息。

四、高斯定理举例

高斯定理也是静电场的基本定理之一，它给出了场与源的联系，但并没有给出场分布与产生电场的源电荷之间的直接联系。因此在一般情况下，已知电荷分布，并不能直接从高斯定理求得场强分布。这也是高斯定理没有包括库仑定律全部信息的反映。

但是在电荷分布具有某种对称性，从而使场分布也具有某种对称性（注意这些信息并非来自高斯定理）时，我们可以直接用高斯定理通过电荷分布找到场的分布。

[例]求均匀带电球面产生的电场。已知球面的半径为 R，电量为 Q。

[解]根据球对称性可以判定，不论在球内还是在球外，场强的方向必定沿球的半径，

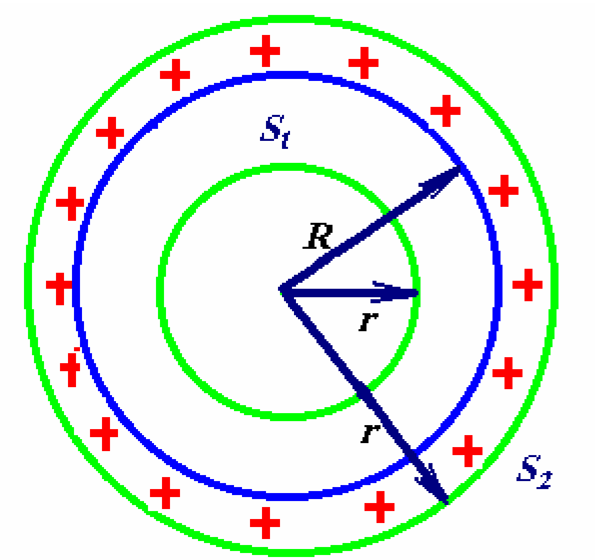

图 1-52 均匀带电球面产生的电场

与球心等距离的各点的场强大小应相等。作如图所示的高斯面，当 r<R 时，有：

$$\oint_S E \cdot dS = E\oint_{S_1} dS = E4\pi r r^2 = 0$$

$$E = 0, \qquad (r < R)$$

当 r>R 时，作 S_2 的高斯面，有：

$$\oint_{S_2} E \cdot dS = E\oint_{S_2} dS = E4\pi r r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

由此得到：

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}, \qquad (r > R)$$

[例]求无限大均匀带电平面的电场。

[解]根据对称性，可以判定无限大带电平面的电场应指向两侧，离平面等距离处电场强度相同，作一矩形高斯面，周围四个面无电通量，只有上下两面有电通量。因而可得：

$$E = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma$$

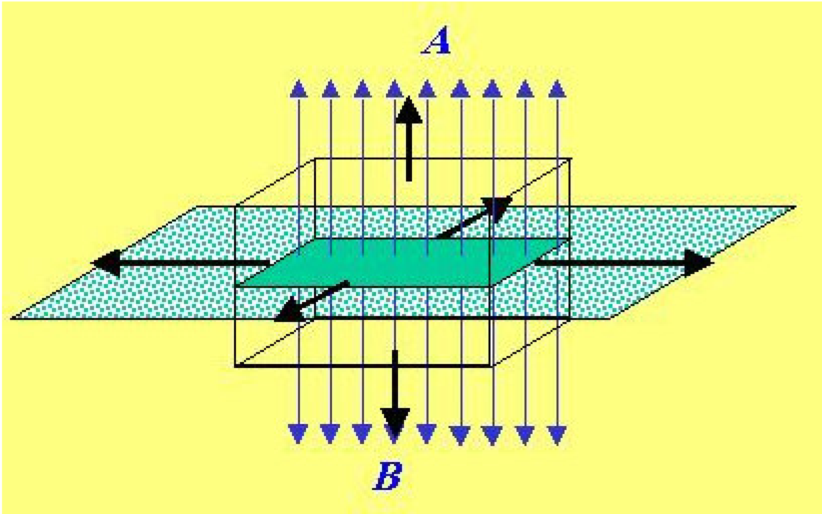

图 1-53 无限大均匀带电平面的电场

[例]求均匀带电球体中所挖出的球形空腔中的电场强度。球体电荷密度为ρ，球体球心到空腔中心的距离为 a。

[解]将空腔看作是同时填满+ρ和-ρ的电荷，腔内任一点的电场强度就由一个实心大球电荷密度为+ρ和一个实心小球电荷密度为-ρ的叠加而成，如图所示：

$$\oint E_+ \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r^3$$

得：

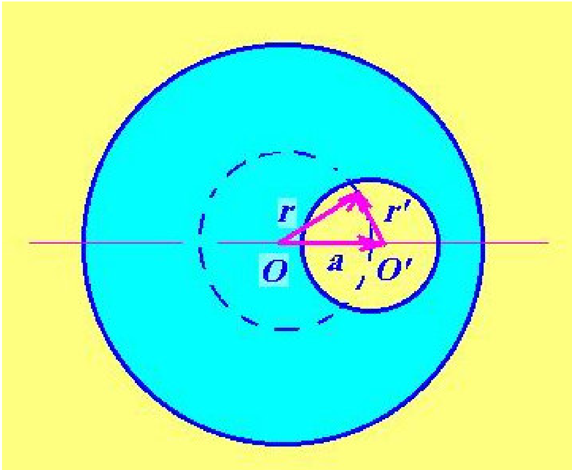

图 1-54　球体中的球形空腔的电场

$$E_+ = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

同理可得：

$$E_- = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

所以，

$$E = E_+ + E_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} a$$

a 为矢量，方向由 O 指向 O’。可见空腔内电场强度是均匀的。