

第三章 真空中的静磁场

磁现象的研究与应用(即磁学)是一门古老而又年轻的学科。说她古老,是因为关于磁现象的发现和使用的历史悠久;说她年轻,是因为磁的应用目前越来越广泛,已形成了许多与磁学有关的边缘学科(图 3.1)。磁现象是一种普遍现象,即一切物质都具有磁性,任何空间都存在磁场。所以,我们可以毫不夸张地说,磁学犹如一棵根深叶茂的参天大树。

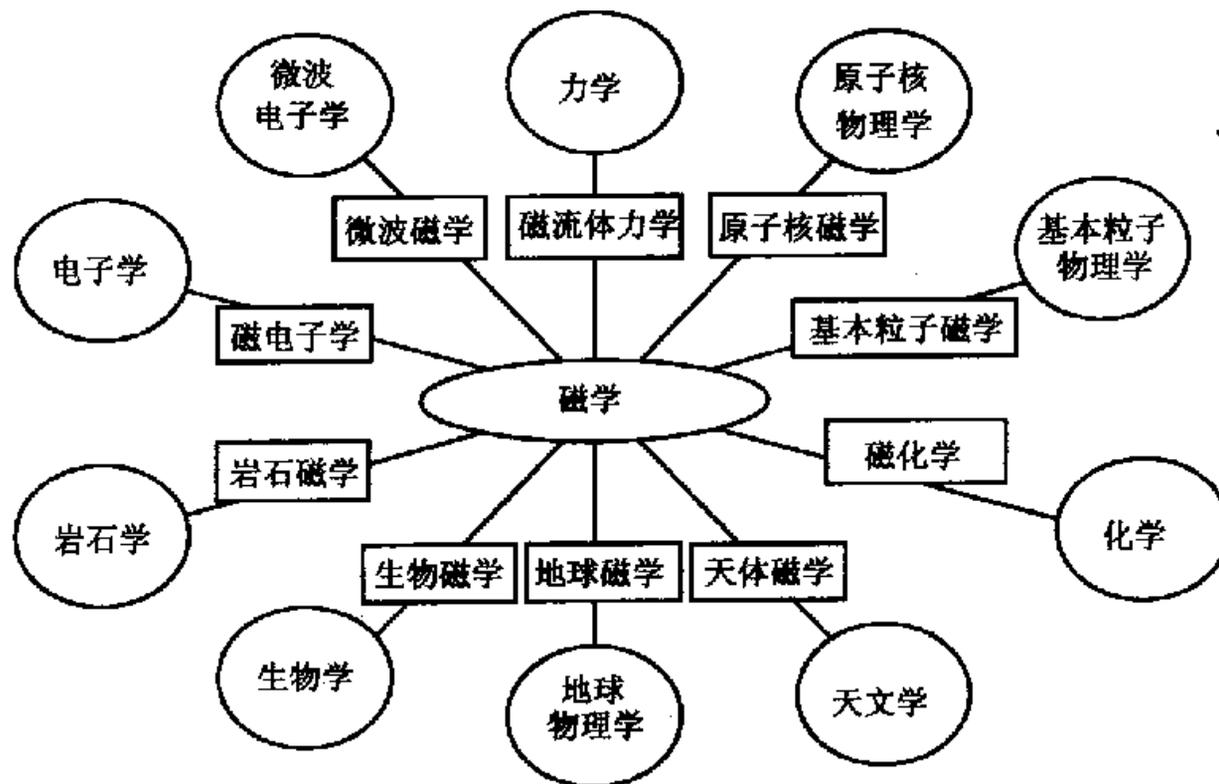
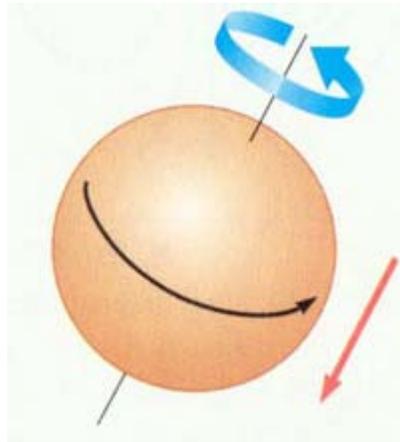


图 3.1 若干边缘(交叉)磁学

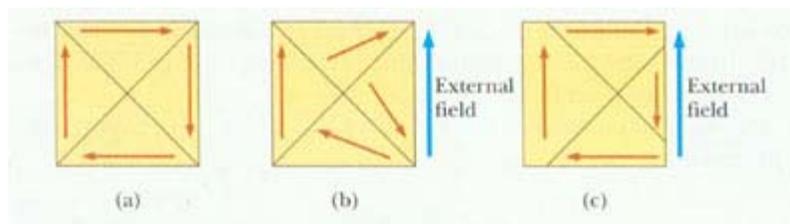
尽管人们对物质磁性的认识已有两千多年，但直至 19 世纪 20 年代才出现采用经典电磁理论解释物质磁性的代表——安培分子环流假说；而真正符合实际的物质磁性理论却是在 19 世纪末发现电子、20 世

纪初有了正确的原子结构模型和建立了量子力学以后才出现。

因此，在经典电磁学范围研究物质的磁性时，我们虽然采用传统的观念即安培分子环流假说和等效磁荷两种观点，但必须强调，我们要在原子结构模型和量子力学的基础上建立一个正确的概念，即物质的磁性来源于电子的轨道磁矩和自旋磁矩(图 3.2)。



只有这样，我们才能准确理解物质的抗磁性、顺磁性和铁磁性、尤其是磁畴结构在外磁场中的变化是铁磁性物质在外磁场中的磁化特点(图 3.3)。



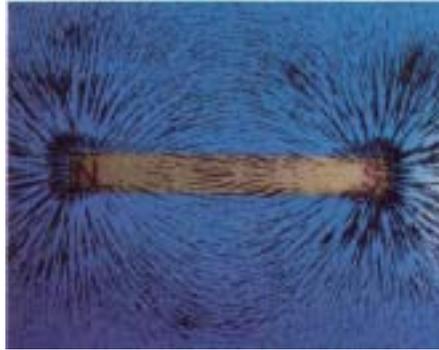
§ 3-1 磁现象与安培安律

一、基本磁现象

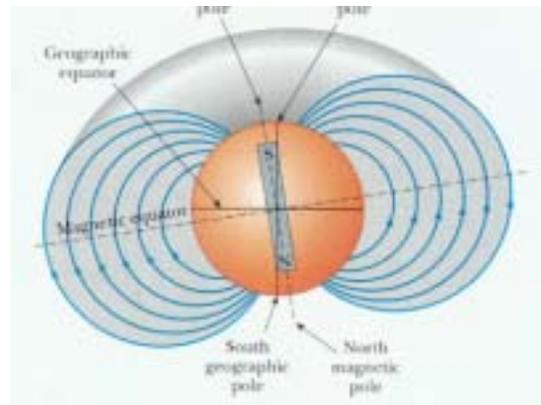
对基本磁现象的认识可以分成三个阶段：

1. 早期阶段（磁铁 \leftrightarrow 磁铁）

天然磁铁（吸铁石）能吸引铁、镍、钴等物质。条形磁铁的两端称作磁极，中部称作中性区(图 3.4)。

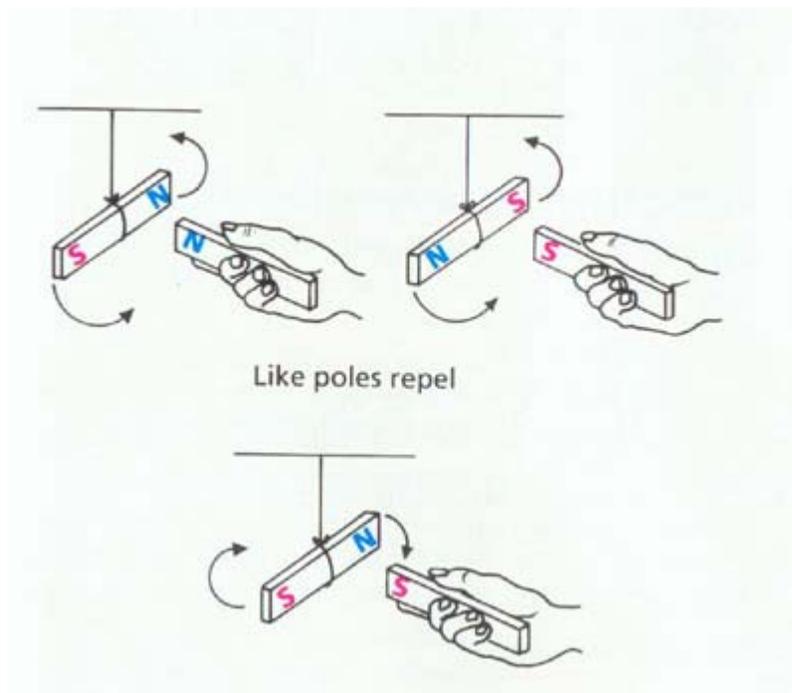


将条形磁铁的中心支撑或悬挂起来使它能够在水平面内运动，则两极总是指向南北方向分别称作 S 极和 N 极。这是因为地球本身是一个磁场(图 3.5)，所以条形磁铁(指南针)可以与地磁场发生相互作用。

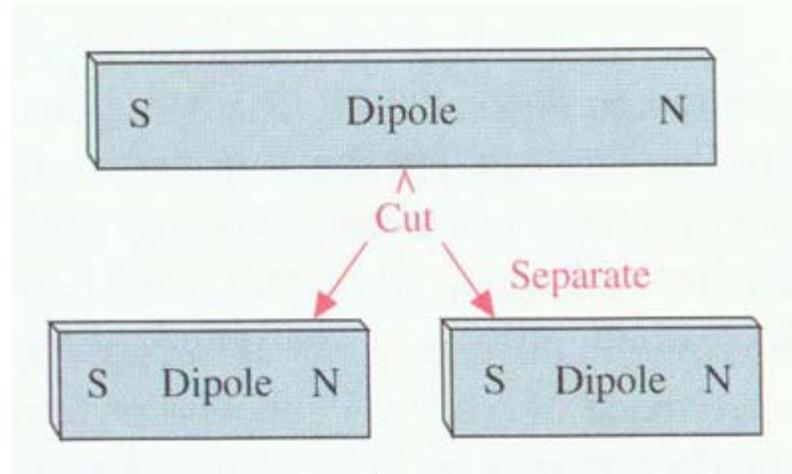


条形磁铁与地球磁场之间以及条形磁铁之间的相互作用(图 3.6)说明同号磁极相互排斥, 异号磁极相互

吸引。

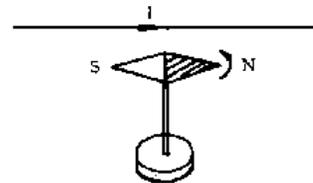


进一步分析发现，将一磁铁可以一直细分成很小很小的磁铁，而每一个小磁铁都具有 N、S 极(图 3.7)。自然界中有独立存在的正电荷或负电荷，但迄今却未发现独立的 N、S 极，尽管在近代理论中有人认为可能存在磁单极子。



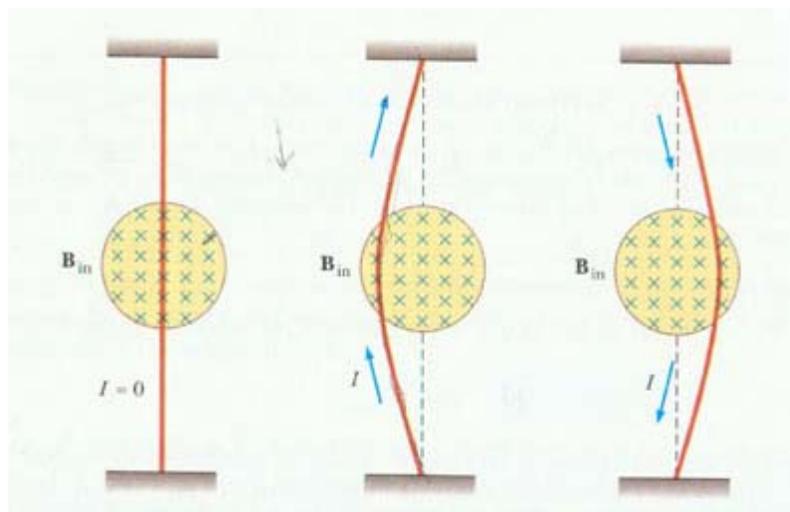
2. 电流 \Leftrightarrow 磁铁 电流 \Leftrightarrow 电流

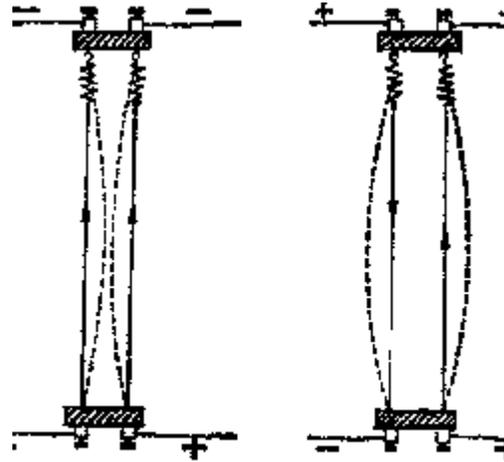
1820年7月21日，奥斯特实验(图 3.8)打破了长期以来电学与磁学彼此独立发展和研究的界限，使人们开始认识到电与磁有着不可分割的联系。



奥斯特实验

由图 3.8 可以看出电流对磁铁的作用；由图 3.9 可以看出磁铁对电流的作用；电流和电流之间也有相互作用(图 3.10)；



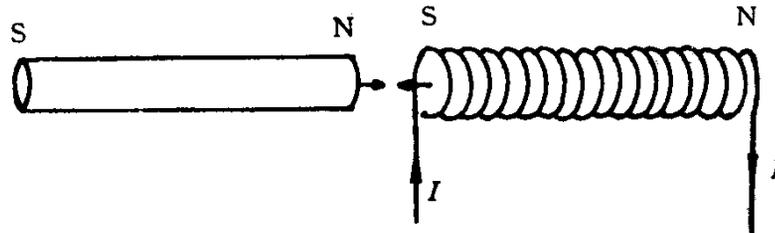


a 同向相吸

b 反向相斥

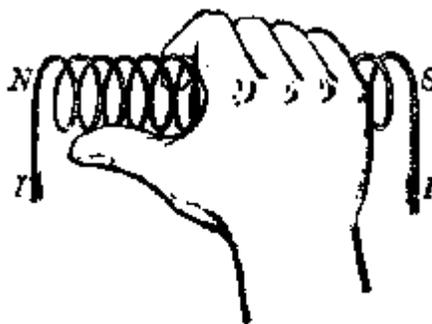
平行电流之间相互作用的演示

进一步发现一个载流螺线管的行为很像一根磁棒(图 3.11),



螺线管与磁棒的等效性

由此我们可以用右手定则来判断载流线圈的极性(图 3.12)。



确定载流螺线管极性的
右手定则

3. 电流 \leftrightarrow 磁场 \leftrightarrow 电流

类似于静止电荷之间的相互作用力是通过电场来传递的,上述的各种相互作用都是通过磁场来传递的。1822 年安培提出了一个假说:组成磁铁的最小单元(磁分子)就是环形电流,这些分子环流定向地排列起来在宏观上就会显示出 N、S 极来(图 3.13)。



当时人们并不了解原子的结构，因此不能解释物质内部的分子环流是如何形成的。现在大家都知道，原子是由带正电的原子核和绕核旋转的负电子组成。电子不仅能绕核旋转，而且具有自旋。在分子、原子等微观粒子内电子的这些运动形成了分子环流，这就是物质磁性的基本来源的经典解释。

小结：无论是导线中的电流(传导电流)产生的磁场，还是磁铁(分子环流)产生的磁场，本源都只有一个即电荷的运动。也就是说，前面介绍的各种实验中出现的现象，都可以归结为运动着的电荷(即电流)之间的相互作用，这种相互作用是通过磁场来传递的。

注意：电荷之间的磁相互作用与电(库仑)相互作用的区别在于，无论电荷是静止的还是运动的，它们之间都存在着库仑相互作用；但是只有运动的电荷才存在着磁相互作用。

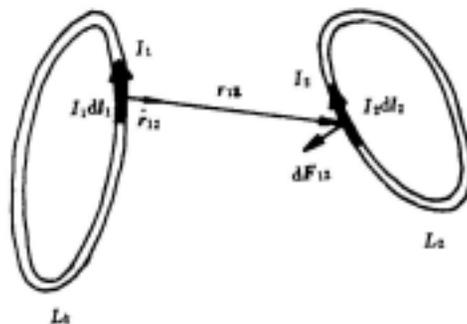
二、安培定律

这一节主要研究电流与电流之间的磁相互作用的规律。正如点电荷之间的相互作用的规律——库仑定律是静电场的基本规律一样，电流之间的相互作用规律——安培定律是稳恒磁场的基本规律。稳恒电流只能存在于闭合回路之中，而闭合回路的形状和大小可以千变万化；两载流闭合回路之间的相互作用又与它们的形状、大小和相对位置有关，这就使问题变得复杂。不过在研究两个有一定形状和大小的带电体之间的静电相互作用时，我们可以把带电体分割为许多无穷小的带电元，每个带电元看作是点电荷。只要研究清楚任意一对点电荷之间相互作用的规律之后，我们就可以通过矢量叠加，把整个带电体受的力计算出来。仿照此法，我们也可以设想把相互作用着的两个载流回路分割为许多无穷小的线元，叫做电流元。只要知道了任意一对电流元之间相互作用的基本规律，整个闭合回路受的力便可通过矢量叠加计算出来。

注意点电荷和电流元之间的重要区别。因为在实验中，无法实现一个孤立的稳恒电流元，从而无法直接用实验来确定它们的相互作用。电流元之间的相互作用规律只能间接地从闭合载流回路的实验中倒推出来。因此，下面介绍的安培定律并不是直接从实验得到，而是在安培设计得很巧妙的四个实验和一个

假设的基础上，与相当高超的数学技巧相结合得到的。

安培定律的数学表述是，如图 3.14 所示的电流元 $I_1 d\vec{l}_1$ 对电流元 $I_2 d\vec{l}_2$ 的作用力为：



$$d\vec{F}_{12} = k \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}^0)}{r_{12}^2}$$

(1) 式中 \vec{r}_{12}^0 是电流元 $I_1 d\vec{l}_1$ 到受力电流元 $I_2 d\vec{l}_2$ 方向的单位矢量。

讨论：(1) 式中 k 是比例系数，在国际单位制中， $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$ ， $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ 牛顿/安培²。(2) 电流元之间的相互作用力不一定满足牛顿第三定律，原因是实际上不存在孤立的稳恒电流元，它们总是闭合回路的一部分。可以证明，若将 $d\vec{F}_{12}$ 沿闭合回路积分，得到的合成作用力总是与反作用力大小相等，方向相反。

(3) 电流强度单位安培的定义为：一恒定电流，若保持在处于真空中相距 1 米的两无限长、圆截面可

以忽略的平行直导线内，在此两导线之间产生的力在每米长度上等于 2×10^{-7} 牛顿(N)，则此恒定电流的电流强度定为 1 安培(A)。

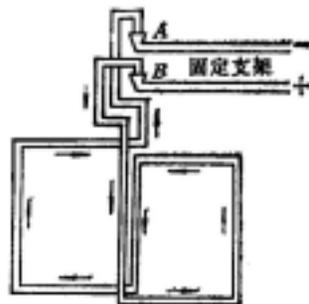
我们还可以根据下面两个式子，计算两个体电流元 $\vec{J}_1 dV_1$ ， $\vec{J}_2 dV_2$ 和两个面电流元 $\vec{i}_1 dS_1$ ， $\vec{i}_2 dS_2$ 之间的作用力：

$$d\vec{F}_{12} = k \frac{\vec{J}_2 dV_2 \times (\vec{J}_1 dV_1 \times \vec{r}_{12}^0)}{r_{12}^2} \quad (2)$$

$$d\vec{F}_{12} = k \frac{\vec{i}_2 dS_2 \times (\vec{i}_1 dS_1 \times \vec{r}_{12}^0)}{r_{12}^2} \quad (3)$$

三、安培的四个示零实验

安培首先设计制作了如图 3.15 所示的装置，并将它取名为无定向秤。他用一根硬导线弯成两个共面的大小相等的矩形线框，线框的两个端点 A、B 通过水银槽和固定支架相连。接通电源时，两个线框中的电流方向正好相反。整个线框可以以水银槽为支点自由转动。在均匀磁场(如地磁场)中它所受到的合力和合力矩为零，处于随遇平衡；但在非均匀磁场中它会发生运动。



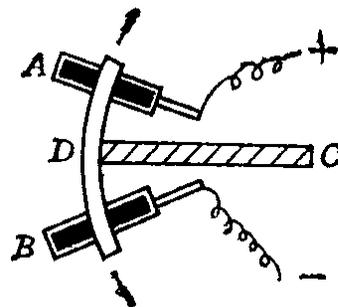
实验一 安培将一对折的通电导线(如图 3.16)移近无定向秤以检验对折导线有无作用力,结果是否定的。这说明电流反向时,电流产生的作用力也反向;大小相等的电流产生的力的大小相等。



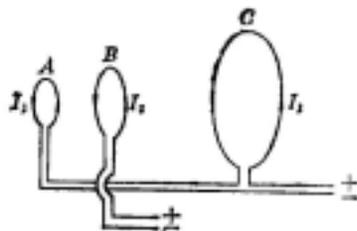
实验二 将对折导线中的一段绕在另一段上,成螺旋形(如图 3.17),通电后,将它移近无定向秤,结果表明无定向秤仍无任何反应。这表明一段螺旋状导线的作用与一段直长导线的作用相同,从而证明电流元具有矢量性质,即许多电流元的合作用是各单个电流元作用的矢量叠加。



实验三 如图 3.18 所示，弧形导体 D 架在水银槽 A、B 上。导体 D 与一绝缘棒固接，棒的另一端架在圆心 C 处的支点上，这样既可以通过水银槽给导体 D 通电，弧形导体 D 又可绕圆心 C 移动，从而构成一个只能沿弧形长度方向移动，不能沿径向运动的电流元。安培用这个装置检验各种载流线圈对它产生的作用力，结果发现弧形导体 D 不运动。这表明作用在电流元上的力与电流本身垂直，即这种作用具有横向性。



实验四 如图 3.19 所示，A、B、C 是用导线弯成的三个几何形状相似的线圈，其周长比为 $1:k:k^2$ 。



A、C 两线圈相互串联，位置固定，通入电流 I_1 。线圈 B 可以活动，通入电流 I_2 。实验发现，只有当 A、B 间距与 B、C 间距之比为 $1:k$ 时，线圈 B 才不受力，即此时 A 对 B 的作用力与 C 对 B 的作用力大小相等、方向相反。这表明电流元长度增加，作用力增加；相互距离增加，作用力减小；如果两电流

元的长度及相互距离增加同一倍数，相互作用力不变。

安培提出的假设：两个电流元之间的相互作用力沿它们的连线。

§ 3-2 磁场与毕奥—萨伐尔定律

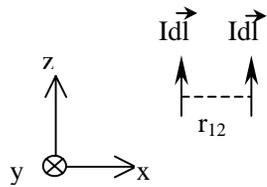
一、安培公式与磁场感应强度 B

两个电流元 $I_1 d\vec{l}_1$ 及 $I_2 d\vec{l}_2$ 之间有力作用，设 $d\vec{F}_{12}$ 是 $I_1 d\vec{l}_1$ 对 $I_2 d\vec{l}_2$ 的作用力，

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 d\vec{l}_2 \times \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \quad (1)$$

公式 (1) 称为安培定律，其中 \vec{r}_{12} 是由 $I_1 d\vec{l}_1$ 指向 $I_2 d\vec{l}_2$ 的距离矢量。

例 如图 3.20，两个相互平行的电流元，相距为 r_{12} ，它们之间的作用力为



$$\begin{aligned} d\vec{F}_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 dl_2 \vec{e}_z \times (I_1 dl_1 \vec{e}_z \times r_{12} \vec{e}_x)}{r_{12}^3} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 dl_1 I_2 dl_2}{4\pi r_{12}^2} (-\vec{e}_x) \end{aligned} \quad (2)$$

图 3.20

从式(2)看到安培定律与库仑定律 $F_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2}$ 很相像。注意到对应关系： $q_1 \sim I_1 dl_1, q_2 \sim I_2 dl_2, \frac{1}{\epsilon_0} \sim \mu_0$ 公

式(2)与库仑定律就可以互换。

思考：

参见图 3.21 有 $d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 dl_1 I_2 dl_2}{4\pi} \vec{e}_z, d\vec{F}_{21} = 0$

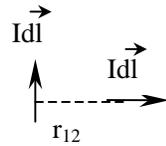


图 3.21

因此两个电流元之间的相互作用不满足牛顿第三定律。

对于两个线圈来说，牛顿第三定律成立。参见图 3.22

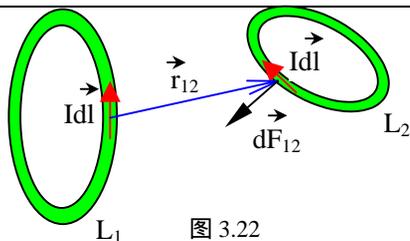


图 3.22

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12} &= \oint_{L_1} \oint_{L_2} Id\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} (I_1 d\vec{l}_1 I_2 d\vec{l}_2) \\ &= -\oint_{L_1} \oint_{L_2} I_1 d\vec{l}_1 \times (I_2 d\vec{l}_2 \times \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^3}) = -\vec{F}_{21}\end{aligned}$$

证毕。

磁感应强度 \vec{B} 从 (1) 式, 可记 $d\vec{F} = I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}$ (3)

这里 $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Id\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$ (4)

称为由 $I_1 d\vec{l}$ (即 $I_1 d\vec{l}_1$, 为了书写方便, 将可以不写的下标略去) 产生的磁感应强度。回路线圈 L (电流为 I) 所产生的磁场强度 \vec{B} 可根据叠加原理由 (4) 式推出:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L Id\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (5)$$

叠加原理：这是电磁学中反复用到的原理，本处设场源 $I_i d\vec{l}_i$ 所产生的磁感应强度为 $d\vec{B}_i$ ，则由场源联合产生的场强 \vec{B} 是 $d\vec{B}_i$ 的几何叠加的结果：
$$\vec{B} = \sum_i d\vec{B}_i。$$

二、毕奥—萨伐尔实验与定律

(4) 式即毕奥—萨伐尔定律，简称为毕—萨定律。1820 年，毕奥和萨伐尔在实验上确定了载流导线和它所产生的场强 \vec{H} () 之间的关系，然后拉普拉斯从数学上导出电流元 $I d\vec{l}$ 及其场强 $d\vec{H}$ (或 $d\vec{B} = \mu_0 d\vec{H}$) 之间的关系，因此 (4) 式又称为毕奥—萨伐尔—拉普拉斯 (Biot-Sarvart-Laplace) 定律。毕奥—萨伐尔的重要实验是弯折导线的实验，参见图 3.23 实验结果是

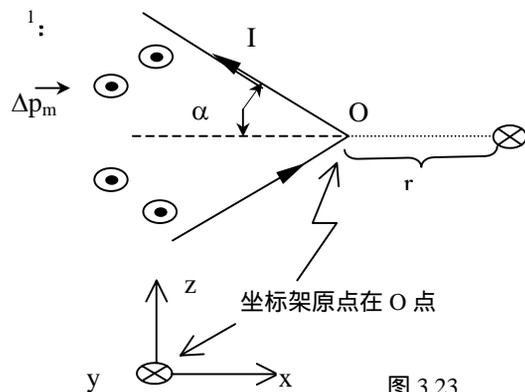


图 3.23

¹ 常用物理概念精析，雷树人、陈秉乾等编著，科学出版社，第 189 页。

$$P_0 \quad H \propto \frac{I}{r} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad \text{或者} \quad \vec{H} = k_1 \frac{I}{r} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \vec{e}_y \quad (6) \quad \text{由(6)式即可推出毕-萨定律(4)式}$$

证明： 由于磁场的特性及对称性的分析，图 3.23 的弯折导线的上半段和下半段所产生的磁场都是 $\vec{H}/2$ 。参照图 3.24，从 A 到 A1 的 $Id\vec{l}$ 所产生的磁场。

$$\begin{aligned} d\vec{H} &= \frac{k_1}{2} I \left(\frac{1}{r} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{r+dr} \operatorname{tg} \frac{\alpha-d\alpha}{2} \right) \vec{e}_y \\ &= \frac{k_1}{2} I \left[\frac{dr}{r^2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{r} \sec^2 \frac{\alpha}{2} \frac{d\alpha}{2} \right] \vec{e}_y \quad (7) \\ &= \frac{k_1}{2} Idl \sin \alpha \frac{1}{r^2} \vec{e}_y = \frac{k_1}{2} Id\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

这就是毕萨定律 (4)，参数 k_1 需要由实验确定，

$$k_1 = \frac{1}{2\pi} \quad (8)$$

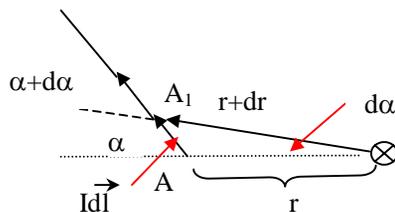


图 3.24

背景：对称性，如果认为静电规律和静磁规律之间有对称性，即它们之间有严格的对应关系。那么，相应于库仑定律有磁荷的库仑定律：

$$F = \frac{q_{m_1} q_{m_2}}{4\pi\mu_0 r^2} \quad (9)$$

并且从电学的讨论知道，对应地在磁学中，(9)式应当作为磁学的基础。

从磁学与电学的对称性出发，仿照电学的电偶极子成场公式，磁偶极子 \vec{p}_m 的成场公式是磁场：

$$\Delta\vec{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0 r^3} \left[-\Delta\vec{p}_m + \frac{3(\Delta\vec{p}_m \cdot \vec{r})}{r^2} \vec{r} \right] \quad (10)$$

利用(10)式计算图 3.23 中 P0 点的场强 \vec{H} ，由于电流为 I 的磁偶极子，面积为 $\Delta S = \Delta x \Delta z$ 的圈电流可看作是磁偶极矩为

$$\Delta\vec{p}_m = \mu_0 I \Delta x \Delta z \vec{n} \quad (11)$$

的磁偶极子，而折线电流 I 的成场效应可用在其左侧一系列圈电流代替，并且考虑到(10)式，

$$\vec{H} = \sum \Delta\vec{H} = \int_{-\infty}^0 dx \int_{x \operatorname{tg} \alpha}^{-x \operatorname{tg} \alpha} dz \mu_0 I \vec{e}_y \frac{1}{4\pi\mu_0 [(r-x)^2 + z^2]} = \frac{I}{r} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \frac{1}{2\pi} \vec{e}_y \quad (12)$$

(12) 式与 (6) 式完全一致，并且确定了 $k_1 = \frac{1}{2\pi}$ 。

如果采用电磁对称性，仿照电学来处理磁学问题，那么毕—萨定理可以完全从理论中推导出来，包括系数在内都是理论的自然结果。

三、求磁场举例

[例 3-2-1] 无限长直线电流 I ，在距 I 为 r_0 处一点 P_1 的磁场（见图 3.25）

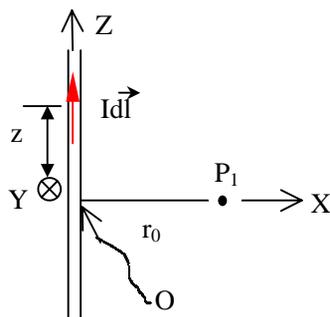


图 3.25

解： $Id\vec{l} = Idz\vec{e}_z$ ，相应的 $d\vec{B}$ 用毕—萨定律求出：

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Idz\vec{e}_z \times \frac{r_0\vec{e}_x - z\vec{e}_z}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\text{磁场 } \vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \vec{e}_y r_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi r_0} I \vec{e}_y$$

[例3-2-2] 半径为 r_0 的圆形电流 I ，在轴线上距离为 z 的 P_1 点的磁场 \vec{B} 。

解： 见图 3.26，采用柱坐标系

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} I r_0 d\theta \vec{e}_\theta \times \frac{z\vec{e}_z - r_0\vec{e}_r}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{2} \vec{e}_z \frac{I r_0^2}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

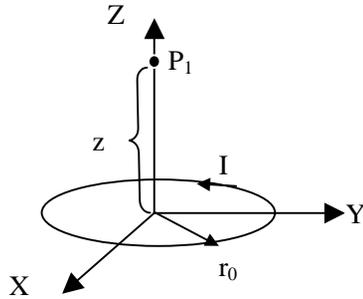


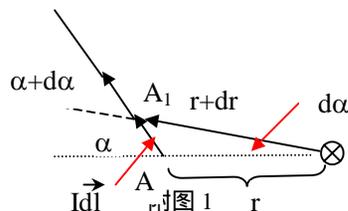
图 3.26

关于公式 (7) 的推导

参见图，已知实验定律，P0 点的磁场强度是

$$\vec{H} = k_1 \frac{I}{r} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \vec{e}_y \quad (6)$$

设折转导线的顶点为 A (即图 3.23 的原点 O)，A 以上部份的电流 I 在 P0 点所产生的磁场正好是全部折线电流所产生的一半，记这部份磁场为 \vec{H}' ，有

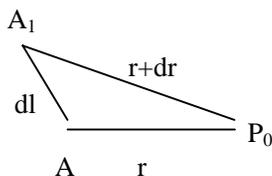


$$\vec{H}' = \frac{\vec{H}}{2} = \frac{k_1 I}{2r} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \vec{e}_y \quad (\text{附 1})$$

可参见附图 1。(附 1) 成立的理由是因为以 AP0 为轴将折转导线旋转 180°，则下半截导线与上半截

导线重合，由这个特点就能推出下半截导线与上半截导线产生的磁场是相等的，都是 $\frac{H}{2}$ 。现在 A 点附近取一点 A1（参见图 5 或附图 1），令 AA1=dl，考虑到 A1 以上段的半直线电流可以看成以 A1 为顶点的折

线电流的上半段，因它在 P0 点所产生的磁场为

$$\vec{H}'' = \frac{\vec{H}_1}{2} = \frac{k_1 I}{2r_1} \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \vec{e}_y \quad (\text{附 } 2)$$


附图 2

这里 $P_0A_1 \equiv r_1 = r + dr$ ，而 α_1 是上半段载流导线与 P0A1 的夹角可记 $\alpha_1 = \alpha - d\alpha$ （附 3）

从附图 1 看到 dr 及 $d\alpha$ 都随 $dl \rightarrow 0$ 而趋于零，并且 dr 及 $d\alpha$ 均是正的小量。现在找出 dr ， $d\alpha$ 与 dl 的关系。讨论其中的 $\triangle P_0AA_1$ ，参见附图 2， $\angle A_1 = \alpha - d\alpha$ ， $\angle A = \pi - \alpha$ ， $\angle P_0 = d\alpha$ ，

利用正弦定理

$$\frac{dl}{\sin \angle P_0} = \frac{r}{\sin(\alpha - d\alpha)}$$

可以推出 $d\alpha = \frac{dl \sin \alpha}{r}$ (附 4)

而将折线 A1AP0 在 A1P0 上投影，有关系 $dl \cos(\alpha - d\alpha) + r \cos d\alpha = r + dr$

保留到 dl 的一阶有 $dr = dl \cos \alpha$ (附 5)

从附图 1 知道 $I d\vec{l}$ 所产生的磁场 $d\vec{H}$ 为

$$d\vec{H} = \vec{H}' - \vec{H}'' = \frac{k_1 I}{2} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha / 2}{r} - \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 / 2}{r_1} \right) \vec{e}_y$$

这里 \vec{H}' 见 (附 1)， \vec{H}'' 见 (附 2)。注意到小量展开保留到 dl 的 1 阶有：

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \frac{1}{r + dr} = \frac{1}{r} - \frac{dr}{r^2} \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} &= \operatorname{tg} \frac{\alpha - d\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2} d\alpha \end{aligned} \quad (\text{附 7})$$

将 (附 7) 代入 (附 6) 保留到 dl 的一阶有：

$$dH = \frac{k_1 I}{2r} \left(\frac{dr}{r} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2} d\alpha \right) = \frac{k_1 I}{2r} F \quad (\text{附 8})$$

这里因子
$$F = \frac{dr}{r} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2} d\alpha$$

将关系（附 4）及（附 5）代进上式，得到：

$$\begin{aligned} F &= \frac{dl}{r} \left(\cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \right) = \frac{dl}{r} \left(\cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= \frac{dl}{r} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{dl}{r} \sin \alpha \end{aligned}$$

将所得的关系代入（附 8）即得文中的（7）式。

2. 关于（12）式的证明

记积分
$$G(\alpha) \equiv r \int_{-\infty}^0 dx \int_{x \operatorname{tg} \alpha}^{-x \operatorname{tg} \alpha} \frac{dz}{2[(r-x)^2 + z^2]^{3/2}} \quad (\text{附 9})$$

则按照（12）式，需要证明
$$G(\alpha) = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad (\text{附 10})$$

将（附 9）中的积分变量 x 换成 $-y$ 有

$$G(\alpha) \equiv r \int_0^{\infty} dy \int_{-y \operatorname{tg} \alpha}^{y \operatorname{tg} \alpha} \frac{dz}{2[(r+y)^2 + z^2]^{3/2}} = r \int_0^{\infty} dy \int_0^{y \operatorname{tg} \alpha} \frac{dz}{[(r+y)^2 + z^2]^{3/2}} \quad (\text{附 11})$$

易于算出

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right) = r \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} \frac{dz}{[(r+y)^2 + z^2]^{3/2}} = r \int_0^{\infty} \frac{dy}{(r+y)^2} = 1 \quad (\text{附 12})$$

现在将 (附 11) 两方对参量 α 求导

$$\begin{aligned} G'(\alpha) &= \frac{dG(\alpha)}{d\alpha} = r \int_0^{\infty} dy y \sec^2 \alpha \frac{1}{[(r+y)^2 + y^2 \tan^2 \alpha]^{3/2}} \\ &= \int_0^{\infty} dy_1 y_1 \sec^2 \alpha \frac{1}{[(1+y_1)^2 + y_1^2 \tan^2 \alpha]^{3/2}} \\ &= \int_0^{\infty} dy_1 y_1 \frac{\sec^2 \alpha}{[y_1^2 \sec^2 \alpha + 2y_1 + 1]^{3/2}} \\ &= \int_0^{\infty} dy_1 y_1 \frac{\cos \alpha}{[y_1^2 + 2y_1 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha]^{3/2}} \\ &= \cos \alpha \int_0^{\infty} dy_1 y_1 \frac{1}{[(y_1 + \cos^2 \alpha)^2 + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha]^{3/2}} \\ &= \cos \alpha \int_0^{\infty} dy_1 (y_1 + \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \frac{1}{\sin^3 \alpha \cos^3 \alpha \left[\left(\frac{y_1 + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} \right)^2 + 1 \right]^{3/2}} \end{aligned}$$

引进 $y_2 = \frac{y_1}{\cos \alpha \sin \alpha}$ 代入上式, 有

$$\begin{aligned}
 G'(\alpha) &= \frac{1}{\sin \alpha} \int_0^{\infty} dy_2 (y_2 + \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha) \frac{1}{[(y_2 + \operatorname{ctg} \alpha)^2 + 1]^{3/2}} \\
 &= \frac{1}{\sin \alpha} \int_{\operatorname{ctg} \alpha}^{\infty} dy_3 (y_3 - \operatorname{ctg} \alpha) \frac{1}{(y_3^2 + 1)^{3/2}}
 \end{aligned} \quad (\text{附 13})$$

令 $y_3 = \operatorname{tg} \theta$ 更改 (附 13) 中的积分变量, 则下限 $y_3 = \operatorname{ctg} \alpha$ 相当于 $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$; 上限 $y_3 = \infty$ 相当 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 从 (附 13) 有

$$\begin{aligned}
 G'(\alpha) &= \frac{1}{\sin \alpha} \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos \theta [\operatorname{tg} \theta - \operatorname{ctg} \alpha] = \frac{1}{\sin \alpha} [-\cos \theta - \operatorname{ctg} \alpha \sin \theta] \Big|_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{\sin \alpha} [-\operatorname{ctg} \alpha + \sin \alpha + \operatorname{ctg} \alpha \cos \alpha] = \frac{2 \sin \frac{\pi}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg} \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha} \\
 &= \frac{1}{\sin \alpha} 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left[\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right] \\
 &= \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right] = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2}
 \end{aligned} \quad (\text{附 14})$$

考虑到 (附 14) $\frac{dG(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2}$

对于这个一阶微分方程有通解 (下式中 C_0 是积分常数) $G(\alpha) = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + C_0$ (附 15)

由端点条件（附 12）定出 $C_0=0$ ，这样得到 $G(\alpha) = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ，所以（附 10）成立，证毕。

§ 3-3 磁场的高斯定理和环路定理

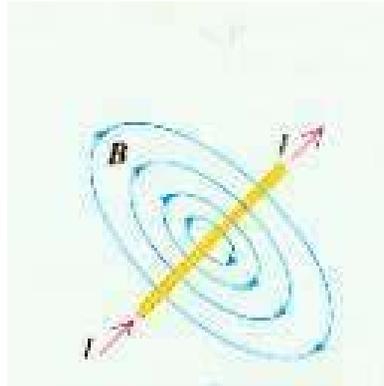
一、磁感应线与磁通量

与电场中引入电场线相似，磁场中可引入磁感应线（又称磁力线）的概念。

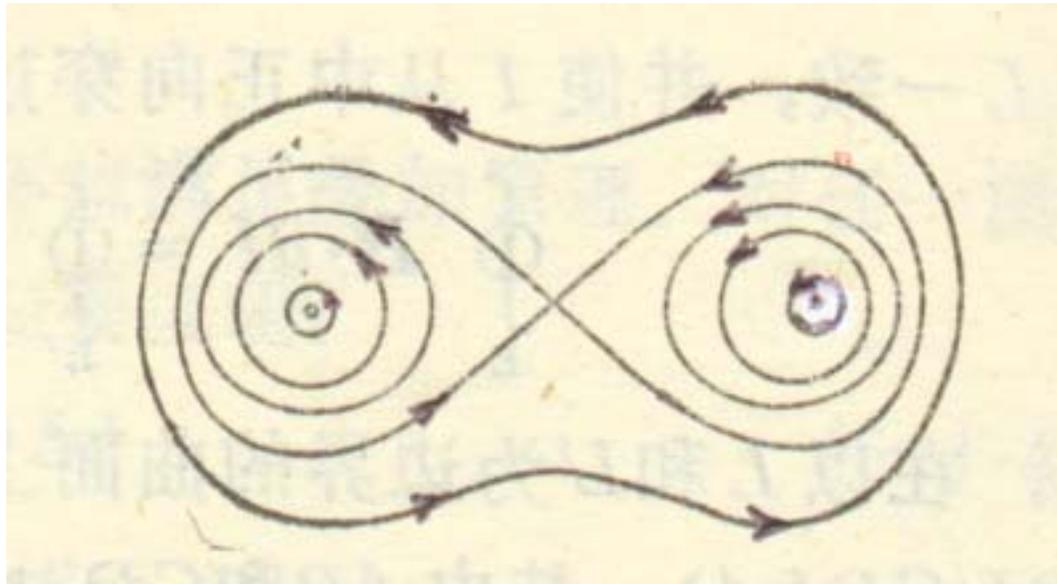
1. 磁感应线

▲定义：磁感应线即磁场空间中一些有方向的曲线，其上每点的切线方向与该点的磁感应强度方向一致。

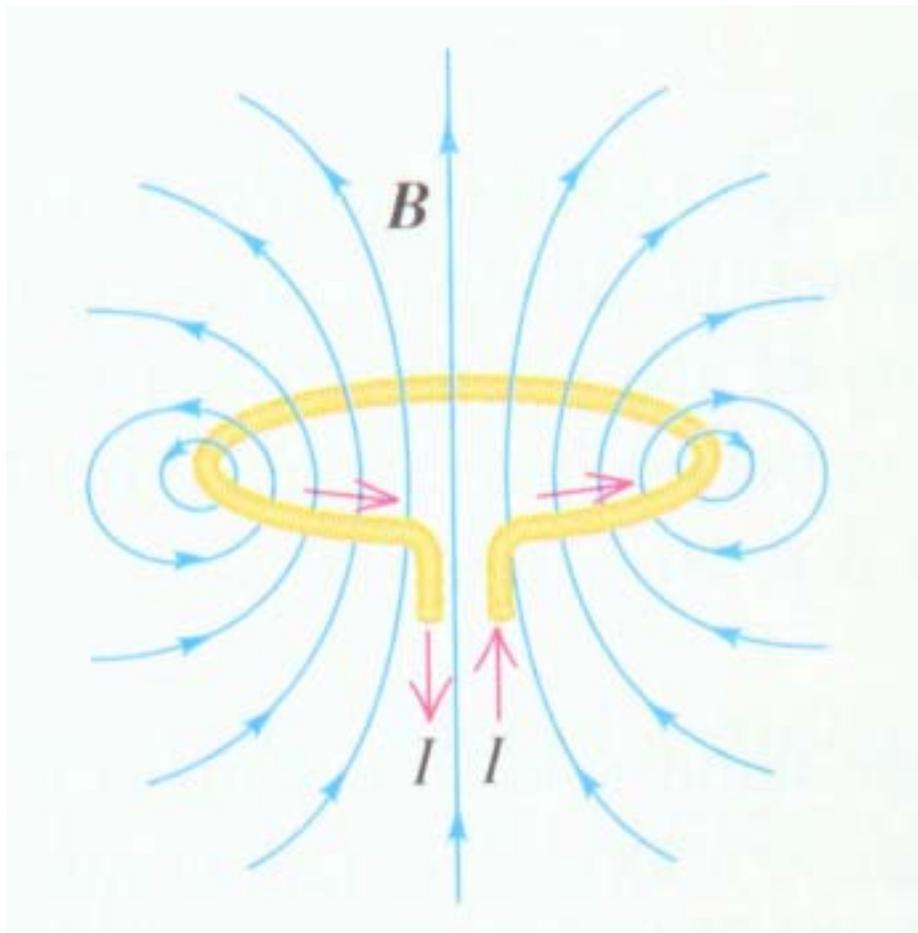
实例：图 3—3—1 磁感应线实例



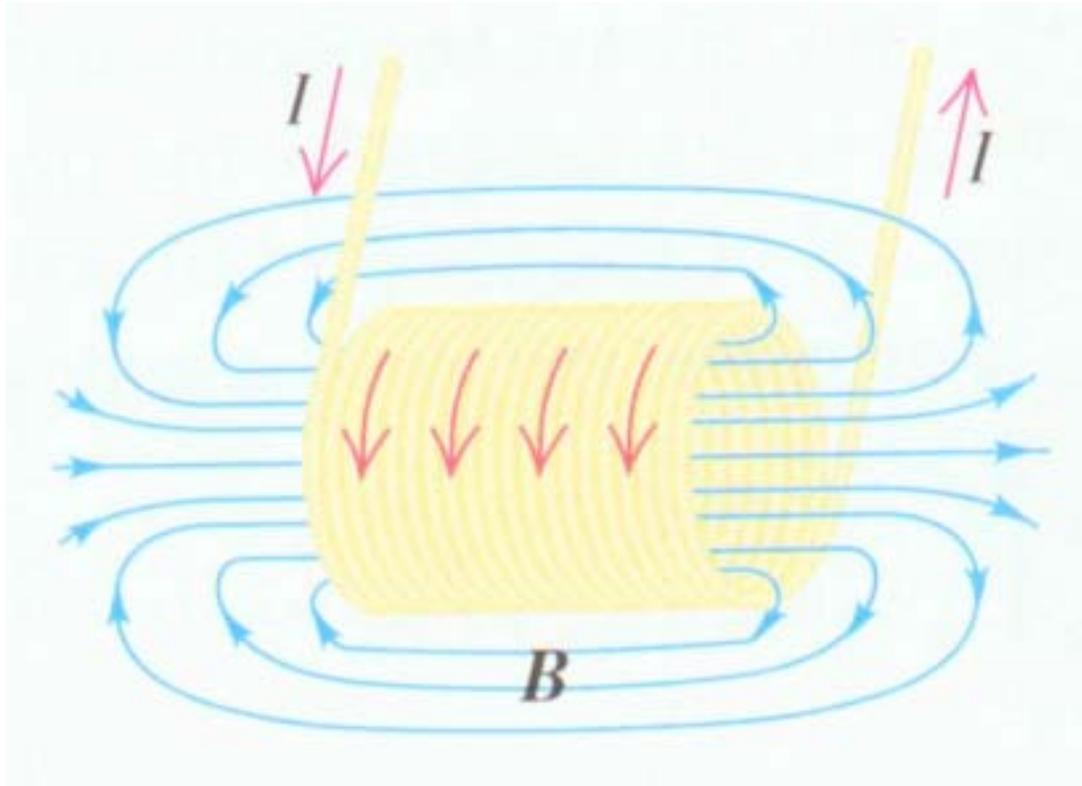
(a) 直线电流



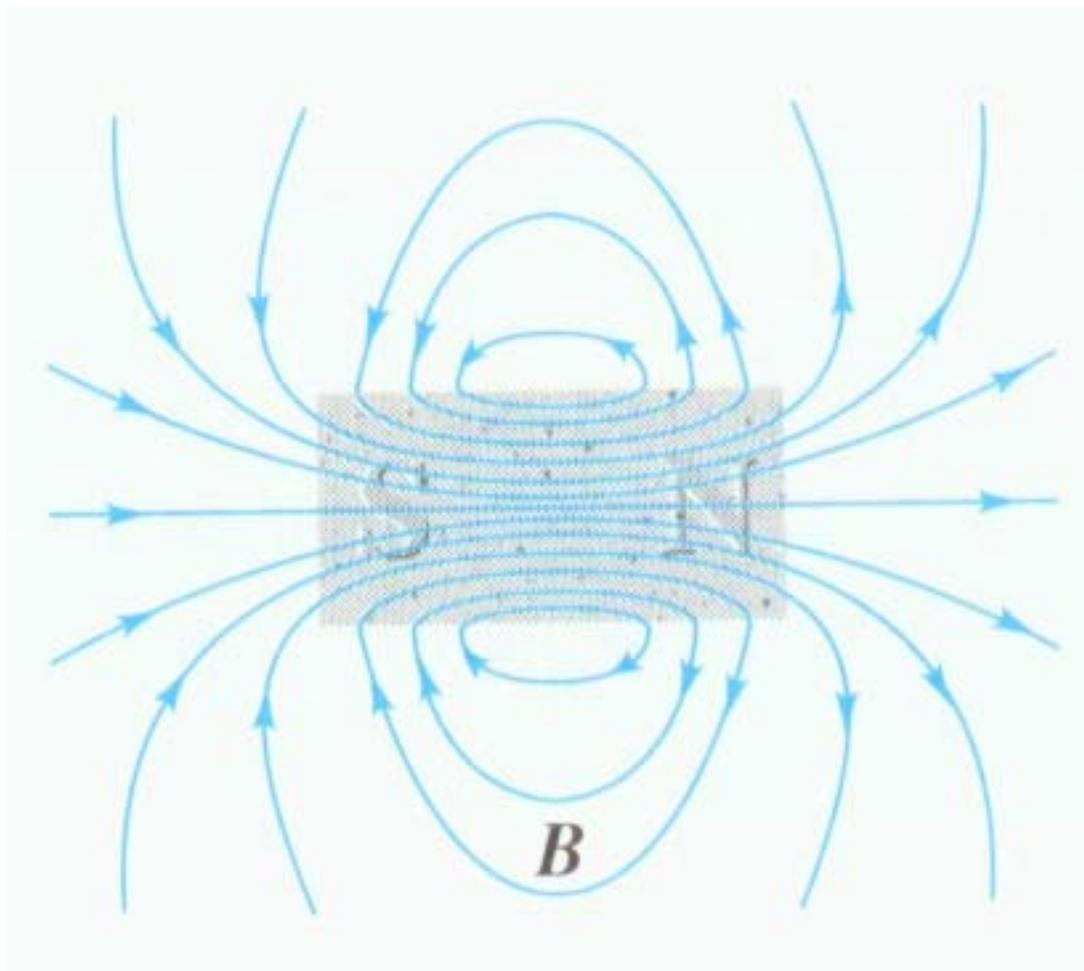
(b) 两根平行直线电流



(c) 圆环电流



(d) 有限长螺线管电流



(e) 电磁铁

▲为了表达磁场中某点磁感强度大小，我们规定，绘图时作到过该点垂直于磁感应线的截面的数密度与磁感应强度成正比，即 $|\vec{B}| = \frac{\Delta N}{\Delta S}$

2. 磁通量

定义： $\vec{B} \cdot \Delta \vec{S} \equiv \Delta \Phi_B$ ，称为通过 ΔS 的磁通量，形象地说是垂直通过 ΔS 的磁感应线根数。进一步，可引入通过某曲面 S 的磁通量：

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3-3-1)$$

▲磁通量的单位为韦伯 (Wb)， $1Wb = 1T \cdot m^2$ 磁通量也和 \vec{B} 一样满足叠加原理。

二、高斯定理

▲高斯定理：通过任意闭合曲面 S 的磁通量等于零，即

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3-3-2)$$

▲物理意义：反映了磁场的“无源性”，即孤立磁荷不可能存在。

- ▲ [证明]：因为任意一磁场 \vec{B} ，都是由许多电流元产生的磁场叠加而成，其磁通量也满足叠加原理，所以只需证明电流元产生的磁场遵守高斯定理。
- ▲ 取电流元 $I\vec{dl}$ 为坐标原点， z 轴沿电流元强度的方向，作图 3-3-2。

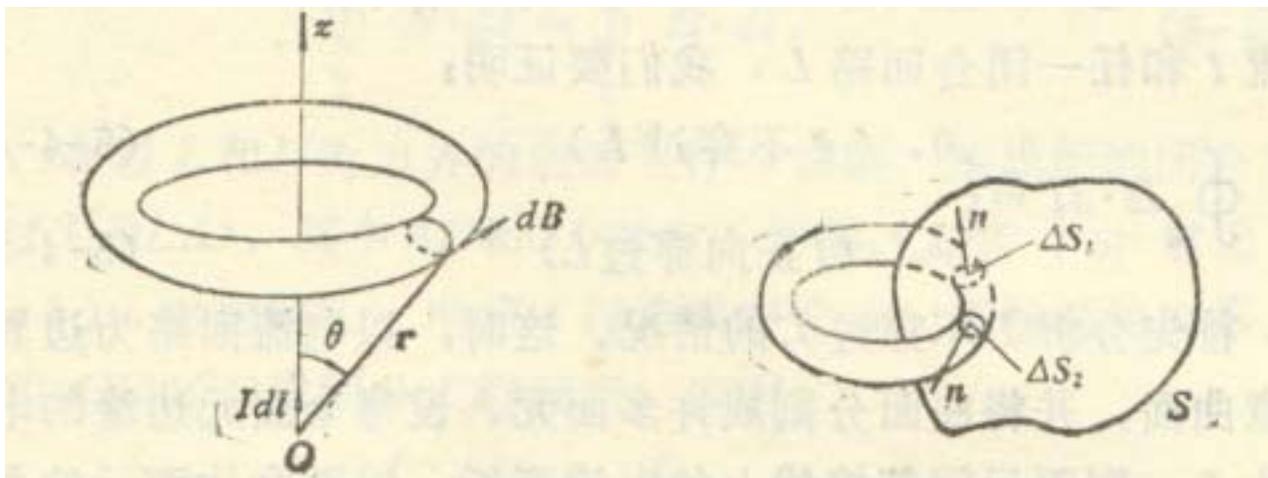


图 3-3-2 电流元磁场的高斯定理的证明

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \sin\theta}{r^2} \hat{\phi}$$

此式表明，以 Z 为轴的任意图上， $d\vec{B}$ 的大小相同，方向与圆相切。

于是，穿过以 Z 为轴的任一环形管内任意截面的磁通量为常量，与截面在管中的位置以及取向无关（见图 3-3-2(a)）。

$$\vec{B}_1 \cdot \Delta\vec{S}_1 + \vec{B}_2 \cdot \Delta\vec{S}_2 = -\vec{B}\Delta\vec{S} + \vec{B}\Delta\vec{S} = 0$$

对于任一封闭曲面 S ，上述环形管每穿过 S 一次，均会在 S 上切出两个面元，见图 3-3-2 中 ΔS_1 、 ΔS_2 ，其磁通量

对曲面 S 上，任一面元，都可作一个环形管，且可找到 S 上的另一个面元与之对应。

同理，这两个面元的磁通量之和为零。

故，穿过 S 的总磁通： $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ ，证毕。

三、安培环路定理

仿照引入静电场环流的作法，可引入磁场的环流如下：

$$\text{环流} = \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

▲ 安培环路定理：沿任何闭合曲线 L 磁感应强度的环流等于穿过 L 的电流强度的代数和的 μ_0 倍，即

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \Sigma \vec{I}. \quad (3-3-3)$$

▲ 物理意义：反映了磁场的“有旋性”。

I 的正负根据回路 L 的绕行方向按右手定则规定，见图 3-3-3。在设定了 L 绕行方向后，采用右手定则，四指沿 L 方向，则电流方向与大拇指一致时取正，反之取负。

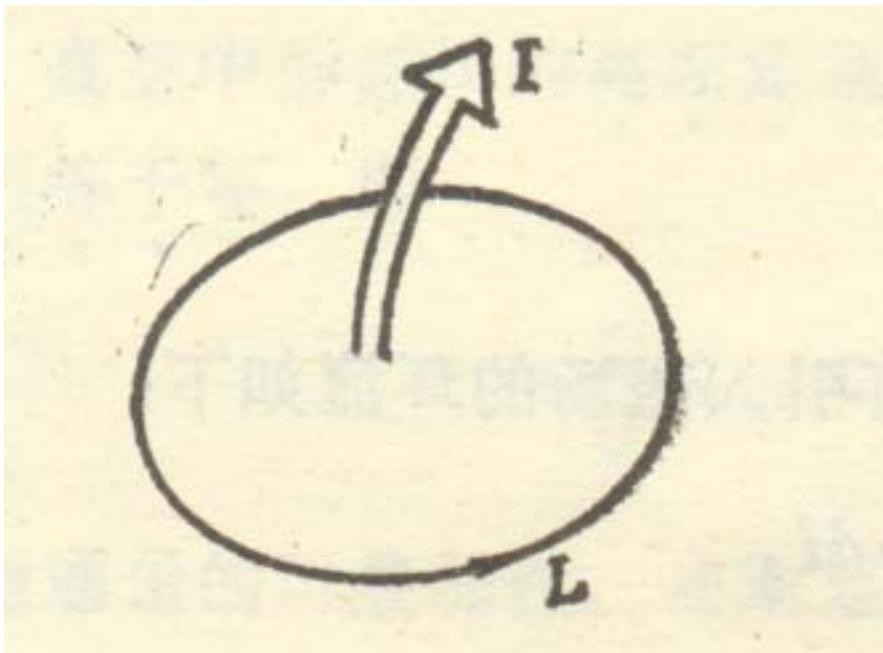


图 3-3-3 I 和 L 绕行方向的右手定则

[证明]

因为任何磁场都是由一些稳恒线闭合电流产生的，只要证明对其中任一稳恒线闭合电流 I 和任一闭合回线 L 满足：

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \begin{cases} 0, (\vec{l} \text{不穿过} \vec{L}) & (3-3-4a) \\ \mu_0 \cdot I, (\vec{l} \text{正向穿过} \vec{L}) & (3-3-4b) \end{cases}$$

则按照叠加原理，安培环路定理便成立。

(1) 首先证明公式 (3-3-4a)，一闭合线电流 I 不穿过闭合回路 L ，如图 3-3-4。

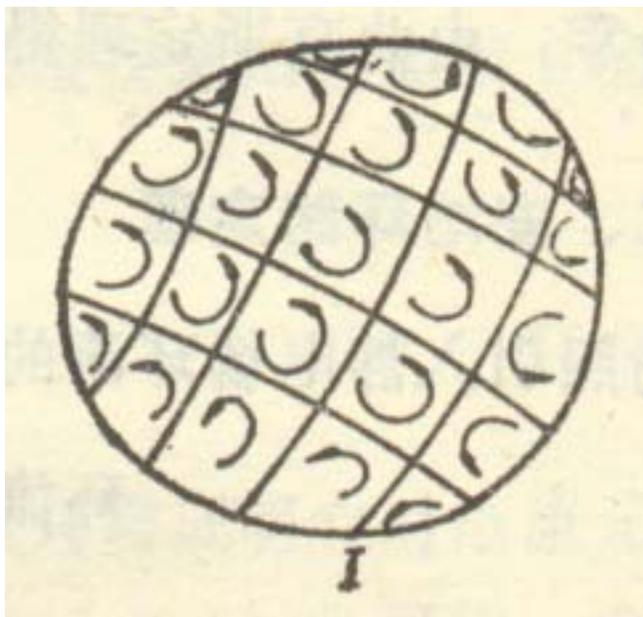


图 3-3-4 闭合线电流的分解

以电流回路为边界作一任意曲面，并将曲面分割成许多面元，设每个面元边缘的电流强度为 I ，则

面元间邻接线上的电流相互抵消，以至全体面元的总和与所考察的闭合线电流 I 等效。

即，闭合线电流 I 的磁场等于全体元电流 I 的磁场的叠加

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

\therefore 上述任一元电流 I (磁偶数) 在远处的磁场和电偶极子的电场函数形式相同。由静电场的环路定理

\therefore 对任一元电流 I 也有 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$, (3-3-4a) 得证。

(1) 进一步证明公式(3-3-4b)

考虑 I 正向穿过 L 的情况，如图 3-3-5(a)

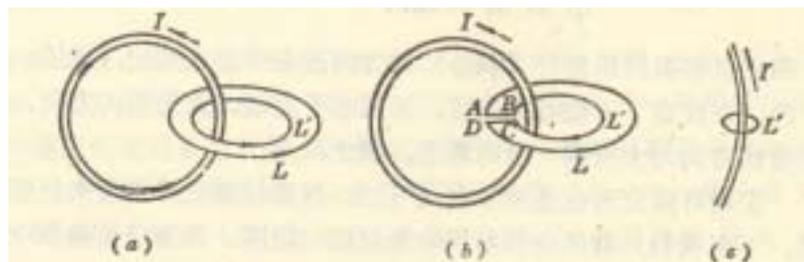


图 3-3-5 线电流正向穿过回路 L

另作任一回路 L' , 定义其正向如图, I 穿过 L' 。

在回路 L 与 L' 上切开一小口, 形成一个新的回路 $ABL'CDLA$, 方向如图 3-3-5(b)。其中 DLA 的方向与(a)中 L 同, $BL'C$ 的方向与(a)中 L' 规定方向相反。

于是, 由已证明的公式(3-3-4a)知

$$\oint_{ABL'CDLA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{BL'C} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{DLA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\therefore \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} = - \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l},$$

$$\int_{BL'C} \vec{B} \cdot d\vec{l} = - \oint_{L'} \vec{B} \cdot d\vec{l}, \quad \int_{DLA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$\therefore \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} - \oint_{L'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0, \text{ 即 } \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{L'} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

由 L' 的任意性, 可将它取成半径为 r_0 的圆, 圆心位于电流 I 回路上, 圆面垂直于 I , 见图 3-3-5(c)。

使 $r_0 \ll$ 电流 I 的曲率半径, 则 L' 回路上的场近似为一无穷长直电流 I 的场, 由例 3-2-1 可知

$$\oint_{L'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 \vec{I}}{2\pi r_0} \cdot 2\pi r_0 = \mu_0 I$$

安培环路定理证毕。

四、环路定理应用举例

[例 3—3—1] 一无限长直圆柱导线，截面半径为 R ，电流沿截面均匀分布，电流强度为 I ，求导线内、外的磁场分布。

[解] 根据电流分布的轴对称性，磁感应强度 \vec{B} 应沿与圆柱共轴的圆回路的切线方向，大小只与离轴线的距离有关。设圆回路 L 的为 r ，则由安培环路定理得

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 I'$$

其中 I' 为通过圆回路 L 的电流。易证：

$$I' = \begin{cases} Ir^2 / R^2, & r < R, \\ I, & r \geq R. \end{cases}$$

于是，

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}, & r < R, \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r > R. \end{cases}$$

[例 3—3—2] 设一无限长螺线管单位长度上的匝数为 n ，电流强度为 I ，求管内、外的磁场。

[解] 由电流分布的对称性可判断管内磁感应强度 B 只有轴向分量，其大小只与离螺线管轴的距离 r 有关。取矩形回路 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ ， AB 位于螺线管轴上， CD 和 $C'D'$ 分别位于螺线管内和管外（见图 3—3—6 a）。由例 3—3—2 可知，轴线上的磁感应强度大小为 $\mu_0 nI$ ，沿轴线方向。对回路 $ABCD$ 应用安培环路定理得

$$[\mu_0 nI - B_i(r)] \cdot AB = 0,$$

即

$$B_i(r) = \mu_0 nI.$$

这表明无限长螺线管内沿轴线方向磁场均匀。对回路 $A'B'C'D'$ 应用安培环路定理得

$$[\mu_0 nI - B_{e//}(r)] \cdot AB = \mu_0 nI \cdot AB,$$

由此有

$$B_{e//}(r) = 0,$$

即无限长螺线管外沿轴线方向磁场处处为零。

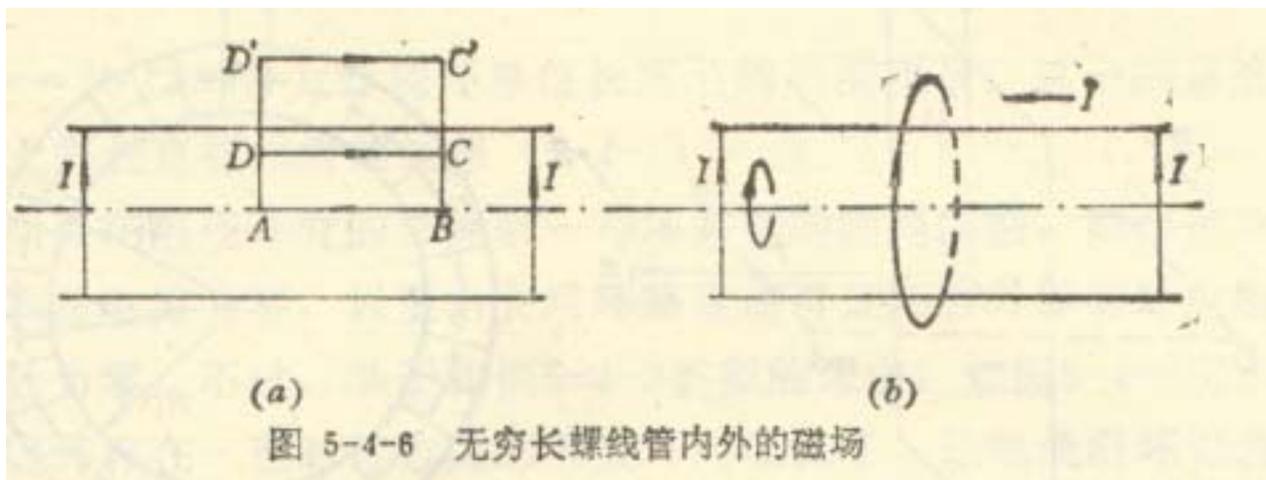


图 3-3-6 无穷长螺线管内外的磁场

另一方面，考虑螺线管存在一自右向左的等效轴向电流 I (见图 3-3-6b)，且该电流可视作沿螺线管表面均匀分布的面电流，由它产生的磁感应强度与同螺线管共轴的圆形环路相切，设为 $B_{e\perp}$ 。按图 3-3-6b 选择同螺线管共

轴的圆回路并应用安培环路定理，不难得出螺线管内磁场 $B_{e\perp}$ 为零，而螺线管外的磁场 $B_{e\perp}$ 与无穷长直

线电流的磁场相同，即 $B_{e\perp} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ，其中 $r \geq R$ （螺线管半径）。综合起来看，无限长螺线管内磁场均匀分布，与轴线平行，管外磁场与无穷长直线电流的磁场相同。

[例 3-3-3] 电流均匀分布在一无穷大平面导体薄板上，面电流密度为 i ，求空间磁场分布。

[解] 取直角坐标，使导体板位于 $y-z$ 平面，电流沿 z 方向（图 3-3-7）。由电流分布的对称性，可知磁感应强度只有 y 分量，其大小只与 x 有关，且 $B(x) = -B(-x)$ 。为此，考虑 x 轴上一点 P ，以 O 中心，在 $x-y$ 平面过点 P 作一矩形回路 $ABCD$ ，应用安培环路定理可得

$$B(x) \cdot 2AB = \mu_0 i \cdot AB.$$

于是，

$$B(x) = \frac{\mu_0 i}{2}. \quad (5-4-8)$$

上式表明，无穷大平面电流两侧为均匀磁场，且磁感应强度的大小相等、方向相反。另外，对有限大小的面电流板，只要 x 远小于该面电流板的尺寸，则它对磁感应强度的贡献也可由式 (5-4-8) 近似表示。

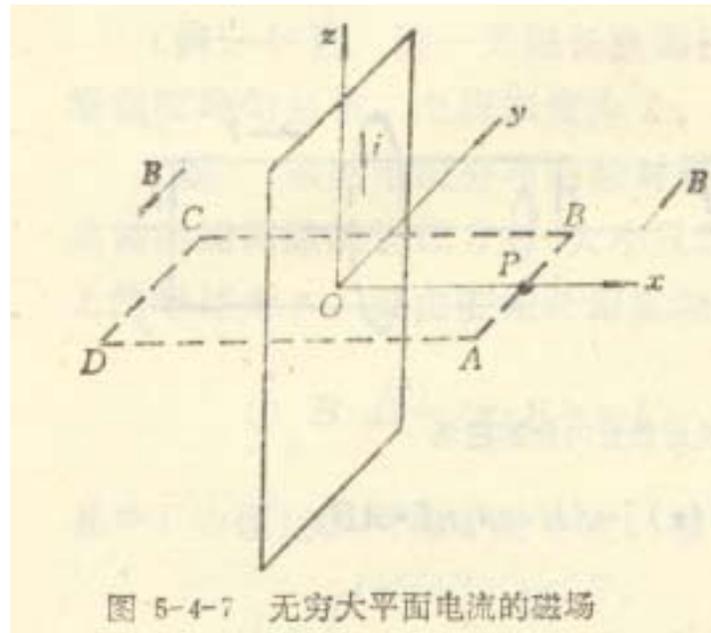


图 3-3-7 无穷大平面电流的磁场

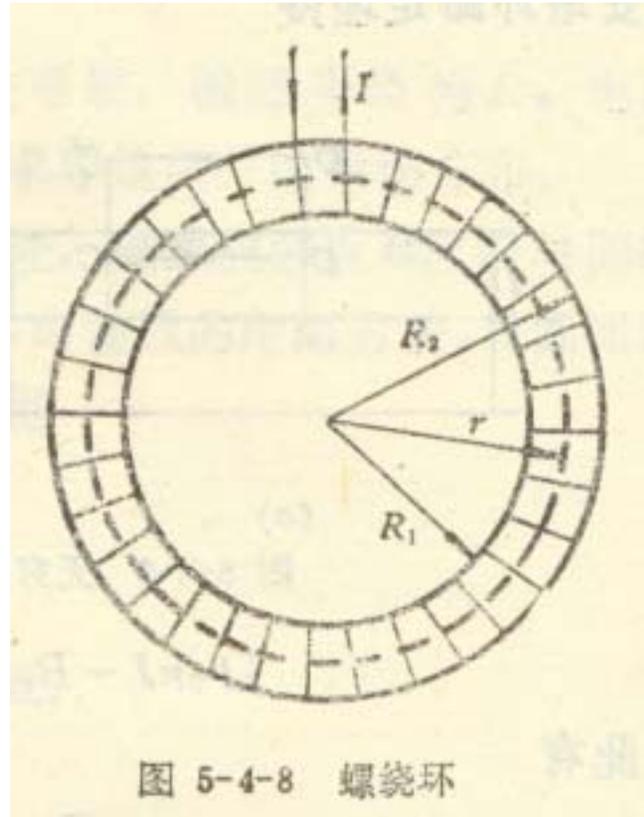


图 3-3-8 螺绕环

[例 3-3-4] 绕在圆环上的线圈叫螺绕环，设螺绕环内径为 R_1 ，外径为 R_2 ，总匝数为 N ，电流强度

为 I ，求环管内、外的磁场分布。

[解] 设螺绕环是密绕的，电流接近轴对称分布。这时，磁感应强度 B 应沿与环共轴的圆周的切线方向，大小只与离轴线的距离有关。在环管内部取半径为 r ($R_1 < r < R_2$) 的圆周回路，由安培环路定理有 $2\pi r B = \mu_0 NI$ ，从而求得环管内的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}, (\text{螺绕环管内})$$

当螺绕环很细，即 $R_1 \approx R_2 \approx R = (R_1 + R_2)/2$ (R 为螺绕环的平均半径) 时，则可近似认为螺绕管内磁场大小均匀，其值为

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} = \mu_0 n I, \quad (5-4-9)$$

式中 $n = N/(2\pi R)$ 为螺绕环单位长度上的线圈匝数。这一结果恰好与无穷长直螺线管的结果 (5-4-7) 一致。

如果在螺线环管的外部取一与环共轴的圆周回路，则穿过该回路的总电流为零，以至由安培环路定理可证环管外部的环向磁场处处为零。不过，基于和例 3-3-2 类似的理由，如图 3-3-8 所示的螺绕环

存在一逆时针方向的等效环向电流 I ，该电流沿环管表面分布。对于环管截面很小 ($R_1 \approx R_2 \approx R$) 的螺绕环来说，该环向电流在环管外部的磁场和一电流强度 I 、半径 R 的圆线圈的磁场相同（见例 5-2-2）。

五、两条定理与毕奥—沙萨尔定律的关系

▲ 两条定理均通过毕奥—沙萨尔定律导出。

▲ 从高斯定理的证明过程可知，它不要求毕奥—沙萨尔定律中的距离平方反比关系。若令

$$\vec{B} \propto \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^n}, \text{ 当 } n \neq 2 \text{ 时, 高斯定理仍然成立。}$$

▲ 但安培环路定理则要求 $n=2$ 。从证明过程可知，要利用无穷长直导线电流的磁场，与例 3-2-1 相同步骤，可推出 $B \propto r^{-n+1}$ ，于是 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \bar{r}_0^{-n+2}$ ，当 $n \neq 0$ 时，该环路值与回路半径 r_0 有关，使安培环路定理不能成立。

▲ 实验表明，对随时间变化的磁场，高斯定理仍然有效，但安培环路定理应予修正（详见第六章）。

3.4 洛仑兹力及其应用

一、运动电荷在磁场中的运动

1. 洛仑兹力

安培定律说明, 载流导线在磁场中受到力的作用。导线中的电流是导体中自由电子的定向运动形成的。显然, 运动着的带电粒子在磁场中也将受到力的作用。从安培定律可以推算每个运动的带电粒子在

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

磁场中所受到的力。

任一电流元 $I d\vec{l}$ 在磁场 \vec{B} 中所受力为:

又 $I = nqvS$, S 为电流元的截面积。故:

$$d\vec{F} = qnvSd\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dN} = \frac{qnvSd}{nSdl} \vec{l} \times \vec{B} = qv d\hat{l} \times \vec{B}$$

该电流元中的运动的带电粒子数为： $dN=nSdl$ ，所以每个运动的带电粒子受力为：

粒子带正电， \vec{v} 与 $d\vec{l}$ 同向；粒子带负电， \vec{v} 与 $d\vec{l}$ 反向。故上式可写成：

$$\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

以上所得结果，容易通过实验验证。

阴极射线偏转演示

如果电场和磁场同时存在，则电荷 q 所受的电场力为： $\vec{F}_e = q\vec{E}$ ，所受的磁力为： $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ ，带电粒子所受的总作

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

用力：

2. 带电粒子在磁场中的运动

(1) **洛伦兹力不作功**：洛伦兹力功率 $\vec{F} \cdot \vec{v} = (q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$ ，所以在洛伦兹力作用下，粒子的动能和速率不会改变，变化

的只是粒子的速度方向。

(2) 在均匀磁场中：粒子的运动方程为

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

写成分量式：

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= qB\dot{y} \\ m\ddot{y} &= -qB\dot{x} \\ \ddot{z} &= 0 \end{aligned}$$

定义 $\omega_L=qB/m$,则上述方程可化为：

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_L^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + \omega_L^2 y &= 0 \\ \ddot{z} &= 0 \end{aligned}$$

易得解：

其中 v_{\perp} , v_{\parallel} , δ , x_0 , y_0 , z_0 为积分常数, 由初条件定。 v_{\perp} 和 v_{\parallel} 分别为垂直及平行于磁场的速度分量。因为 $v=\text{const}$, $v_{\parallel}=\text{const}$,

$$\dot{x} = v_{\perp} \cos(\omega_L t + \delta)$$

$$x = \frac{v_{\perp}}{\omega_L} \cos(\omega_L t + \delta) + x_0$$

$$\dot{y} = v_{\perp} \sin(\omega_L t + \delta)$$

$$y = \frac{v_{\perp}}{\omega_L} \sin(\omega_L t + \delta) + y_0$$

$$\dot{z} = v_{\parallel} = \text{const}$$

$$z = v_{\parallel} t + z_0$$

故 $v_{\perp}=\text{const}$, 所以粒子速度与磁场的夹角(投射角) $\theta=\sin^{-1}(v_{\perp}/v)$ 在粒子运动过程中为常量。

从上述解可看出, 磁场中的带电粒子作轴平行于 \vec{B} 的螺旋线运动。轨道在 xy 平面上投影是个圆, 圆心在 (x_0, y_0) 处, 其

半径 $R = v_{\perp} / \omega_L$ 。粒子回旋的角频率 $\omega = eB/m$, 回旋频率 $f = eB/(2\pi m)$, 回旋周期 $T = 2\pi m / (eB)$, ω 、 f 、 T 与粒子的回旋速度无关!

(3) 在轴对称、缓变非均匀磁场中

$$\begin{aligned}\vec{B} &= B_z \hat{z} + B_r \hat{r} \\ \vec{v} &= v_{\downarrow} \hat{z} + v_{\perp} \hat{\phi}\end{aligned}$$

取小圆柱高斯面, 从高斯定理:

$$\begin{aligned}B_r \cdot 2\pi r \Delta z + [B_z(0, z + \Delta z) - B_z(0, z)] \pi r^2 &= 0 \\ B_r &= -\frac{r}{2} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{B_z(0, z + \Delta z) - B_z(0, z)}{\Delta z} = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ m \frac{dv_{\downarrow}}{dt} &= -q v_{\perp} \frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) &= \frac{m v_{\perp}^2}{2B} \frac{dB}{dt}\end{aligned}$$

由于 B_r 的出现, z 方向的运动方程:

带电粒子作圆运动的磁矩:

由上式可得: $\frac{d\mu}{dt} = 0$, 即带电粒子在缓变磁场中磁矩守恒。同样可证, 对任意随时间、空间缓变磁场, 粒子磁矩守恒。

二、应用举例

$$|\vec{\mu}| = I \Delta S = \frac{q \varpi}{2 \pi} \pi R^2 = \frac{\frac{1}{2} m v_{\perp}^2}{B}$$

1. 速度选择器

图示, 说明。

走直线, 忽略重力, 则: $qE=qvB, \therefore v=E/B$

2. 质谱仪

图示, 说明。

不同 m, q 离子, 经速度选择器, v 同, 进入均匀磁场 \vec{B} 中, 则回旋半径:

$$R = \frac{v_{\perp}}{\varpi} = \frac{v_{\perp} m}{qB}$$

$$\frac{q}{m} = \frac{v_{\perp}}{RB}$$

由测量所得 R 可得带电粒子的荷质比, 并可用来分离同位素, 分析丰度。

3. 磁聚焦

图示, 说明

无磁场, 发散开; 外加均匀磁场 \vec{B} , 使离子束 (速率近同, 张角小) 速度方向近似与 \vec{B} 平行, $v_{\parallel} \approx \text{const}$ 。离子回旋频率和

周期与粒子的回旋速度无关，经一个周期沿磁场 \vec{B} 方向上聚一次，不会发散。离子螺旋运动的螺距 $h = T v_{\parallel} \approx \frac{2\pi m v}{qB}$

4. 回旋加速器

演示图, 说明

调整加在 D 形盒间的交变电压频率，使之与粒子的回旋频率同。并使得粒子在通过间隙时总被间隙电场加速而增大能量。

5. 磁约束与等离子体

演示图, 说明

6. 霍尔效应

图示, 说明

上下底出现电势差 $U = Ib$ 。只有当洛伦兹力与电力平衡时，载流子不再偏转。此时， $E_q = qvB$ ，又 $I = bdnqv$ ，故：

(1) 给定 I, B, d ，测 U ，可得 nq 。若 q 已知，可得载流子浓度 n 。

$$U = \frac{IB}{nqd} = K \frac{IB}{d}$$

(2) 判定载流子带正电荷还是负电荷。

三、运动电荷的电场和磁场

(声音) 一个点电荷，相对它静止的观测者，测量时只能测到电场；而相对它运动的观测者，测量时，不仅测到电场，而且还测到磁场。所以，电场和磁场是与参考系有关的物理量，是相对量，不是绝对量。寻找电磁场在不同参考系中的变换关系就是个十分重要的问题。它将进一步加深我们对电场、磁场的认识，有助于我们了解一系列重要的问题如：静止电荷的静电场与运动电荷电场的区别？运动在电场中受力与静止电荷在电场中受力是否同？运动电荷的磁场与电荷运动的关系？电场与磁场有何联系？等等。

1. 狭义相对论的有关结论 (附录)

2. 电磁场的变换公式

按相对性原理要求, 电磁学的普遍规律都须具备协变性 (既不同惯性系中形式保持不变)。现以洛仑兹力为桥梁, 求不同惯性系间的电磁场的变换公式。设一带电量 q 的粒子, 在 K 系中运动速度为 \vec{u} , 而在 K' 系中运动速度为 \vec{u}' ; 在 K 系中的电磁场为 \vec{E}, \vec{B} , 而在 K' 系中的为 \vec{E}', \vec{B}' , 则:

$$K \text{ 系中粒子受力: } \vec{f} = q\vec{E} + q\vec{u} \times \vec{B}$$

$$K' \text{ 系中粒子受力: } \vec{f}' = q\vec{E}' + q\vec{u}' \times \vec{B}'$$

其中 q 为与参考系无关的不变量 (电荷守恒定律所要求), 由力及速度变换公式易得:

$$E_x = E'_x$$

$$E_y = \gamma(E'_y + vB'_z)$$

$$E_z = \gamma(E'_z - vB'_y)$$

$$B_x = B'_x$$

$$B_y = \gamma(B'_y - \frac{v}{c^2}E'_z)$$

$$B_z = \gamma(B_z' + \frac{v}{c^2} E_y')$$

3. 运动点电荷的电场
4. 运动点电荷的磁场

§ 3.5 运动电荷的电场与磁场

一、运动点电荷引出的问题

一个点电荷：相对它静止的观测者，测量时只能测到电场 \vec{E}

一个点电荷：相对它运动的观测者，测量时不仅测量到电场 \vec{E}' ，而且还测量到磁场 \vec{B} 。

所以一个点电荷产生的电场和磁场是与观测者的运动状态有关的，即是与在什么参考系测量有关的。换句话说，电场和磁场是与参考系有关的物理量，是相对的，不是绝对的。

两个相对静止的点电荷：与它们相对静止的观测者，测量只有静电库仑力；与它们相对运动的观测者测

量，它们之间不仅有静电库仑力，又有磁力。

在不同参考系中，测量到的两点电荷的作用力的确不相同。

但实验告诉我们：

在静止系 K 中：带电荷为 q 的点电荷受力为 $\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{V} \times \vec{B}$

在运动系 K' 中：带电荷为 q 的点电荷受力为 $\vec{f}' = q\vec{E}' + q\vec{V}' \times \vec{B}'$

其中： q 是与参考系无关的不变量，与光速 c 一样，叫相对论不变量。

由加速器中电子的电量不变，任何运动的原子，都是显中性的。尽管 \vec{f}' 不等于 \vec{f} ，……，但带撇量与不带撇量有着确定的关系(随坐标系变换)而形式保持不变，称协变性。电磁学的普遍规律都必须具备协变性，这是狭义相对论的要求，也是实验结果。

二、狭义相对论中的有关结论

我们先回顾力学，在力学中，有两类参考系：惯性系和非惯性系。牛顿第二定律相对于惯性系才成力，而牛顿第一定律实际上确定了自然界中存在惯性系。问题是如何找到一个惯性系？牛顿：存在纯粹的绝对静止的空间和绝对时间，作为最基本惯性系。伽利略：所有惯性系平权，不能判断哪个惯性系是处于绝对静止状态，哪个是有绝对运动。但牛顿运动定律却与伽利略相对性原理相洽的。现在，回到电磁学问题上，1864年 Maxwell 提出了位移电流和涡旋电场假设，建立了 Maxwell 方程组，预言了电磁波的存在，电磁波以光速在空间传播，由此他指出：光本身既电磁波。1865年，赫兹实验验证了电磁波的存在。看来电磁波似以恒定速度相对于某一特殊参考系运动，光速与观测者的相对速度有关。由次，迈克尔逊-莫雷试图探测地球相对于这一绝对参考系的速度，但他们的实验失败了，未能探测到所预期的速度！对了从理论上解释，1905年 Einstein 提出了两条全新的物理学基本原理：

- 相对性原理：宇宙中所有各处的物理规律都相同，不论观测者运动速度如何
- 光速不变原理：光速是个常数，与光源及观测者运动速度无关

由此，不同惯性系间坐标变换不能以伽利略变换描述，而要用洛伦兹变换。

(1) 洛伦兹变换

$$x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$
$$t' = \frac{t - \beta \frac{x}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

(2) 速度变换公式

$$v_x' = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v_x v}{c^2}}$$
$$v_y' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} v_y}{1 - \frac{v_x v}{c^2}}$$
$$v_z' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} v_z}{1 - \frac{v_x v}{c^2}}$$

(3) 质量变换关系

在 K 系中以速度 \bar{u} 运动的物体, 在 K' 中质量

$$m' = \gamma \left(1 - \frac{\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) m$$

(4) 动量和能量的变换关系

$$p'_x = \gamma \left(p_x - v \frac{w'}{c^2} \right)$$

$$p'_y = p_y$$

$$p'_z = p_z$$

$$w' = \gamma (w - v p_x)$$

(5) 力的变换关系

$$f'_x = f_x - \frac{v}{c^2 - u_x v}$$

$$f'_y = \frac{f_y}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x \right)}$$

$$f'_z = \frac{f_z}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x \right)}$$

(6) 电磁场的变换关系

按相对性原理要求，电磁学的普遍规律都须具备协变性（既不同惯性系中形式保持不变）。现以洛仑兹力为桥梁，求不同惯性系间的电磁场的变换公式。设一带电量 q 的粒子，在 K 系中运动速度为 \vec{u} ，而在 K' 系中运动速度为 \vec{u}' ；在 K 系中的电磁场为 \vec{E}, \vec{B} ，而在 K' 系中的为 \vec{E}', \vec{B}' ，则：

$$K \text{ 系中粒子受力: } \vec{f} = q\vec{E} + q\vec{u} \times \vec{B}$$

$$K' \text{ 系中粒子受力: } \vec{f}' = q\vec{E}' + q\vec{u}' \times \vec{B}'$$

其中 q 为与参考系无关的不变量（电荷守恒定律所要求），由力及速度变换公式易得：

$$E_x = E'_x$$

$$\vec{B}_x = \gamma(\vec{B}'_x + v\vec{B}'_z)$$

$$E_z = \gamma(E'_z - v\vec{B}'_y)$$

三、运动点电荷的电场

$$\vec{B}_z = \gamma\left(\vec{B}'_z + \frac{v}{c^2}\vec{E}'_y\right)$$

$$\vec{E} = \frac{q\hat{r}}{r^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}$$

动态演示

四、运动点电荷的磁场

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}$$

五、一个有趣的实例（两个同号点电荷间的作用力的测量问题）

两个具同号等量电荷且相对静止的点电荷之间作用力的测量问题

(1) 如图示，在相对这两个点电荷静止的坐标系 K' 中

$$\vec{f}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r'^3} \vec{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{y^2} \vec{j} = f'_y \vec{j}$$

$$f'_x = f'_z = 0$$

$$u'_x = u'_y = u'_z = 0$$

(2) 在相对于 K' 运动的坐标系 K 中测

$$u_x = v, u_y = 0, u_z = 0$$

由力的变换关系:

$$f_x = 0, f_z = 0$$

$$f_y = \frac{f'_y}{\gamma(1 + \frac{v}{c^2}u'_x)} = f'_y \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = E_y$$

K 系中, 从另一角度看, 这时在 P 点产生电场的是运动点电荷, 其电场强度的大小为:

$$E_x = E_z = 0$$

且方向指向 y,

则:

$$f_y^{(e)} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 y^2 \sqrt{1-\beta^2}}, f_x^{(e)} = 0, f_z^{(e)} = 0$$

$$f_y^{(m)} = f_y - f_y^{(e)} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2} \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

即磁力为吸引力。

第三章 小结

- 安培定律
$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 \vec{I}_1 \vec{I}_2 d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12})}{4\pi\vec{r}_{12}^3}, \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

- 毕奥-萨耳定律:
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$
- 安培公式:
$$d\vec{F} = (Id\vec{l} \times \vec{B})$$
- 洛伦兹力:
$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$
- 磁场的高斯定理: $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$, 说明磁场的“无源性”, 即孤立的磁荷不可能存在。
- 磁场的安培环路定理: $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{\text{穿}L} \vec{I}$, 说明磁场的“有旋性”。
- 对于所有惯性参考系, 带电体所带的电量 q 像光速 c 一样, 是不变量; 普遍的洛伦兹力公式的形式是相同的。
- 电量为 q 的带电粒子, 以速度 v 沿 x 轴正向运动, 它在空间一点 (x, y, z) 产生的电场为

$$\begin{cases} \bar{E}_x = \frac{\bar{q}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{r}(x-\bar{v}t)}{[\bar{r}^2(x-\bar{v}t)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \\ \bar{E}_y = \frac{\bar{q}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{r}y}{[\bar{r}^2(x-\bar{v}t)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \\ \bar{E}_z = \frac{\bar{q}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{r}z}{[\bar{r}^2(x-\bar{v}t)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \end{cases} \text{其中 } \bar{r} = \left(1 - \frac{\bar{v}^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

同时，它产生的磁场为：

$$\begin{cases} \bar{B}_x = 0, \\ \bar{B}_y = -\frac{\bar{v}}{c^2} \bar{E}_z \\ \bar{B}_z = \frac{\bar{v}}{c^2} \bar{E}_y \end{cases}$$