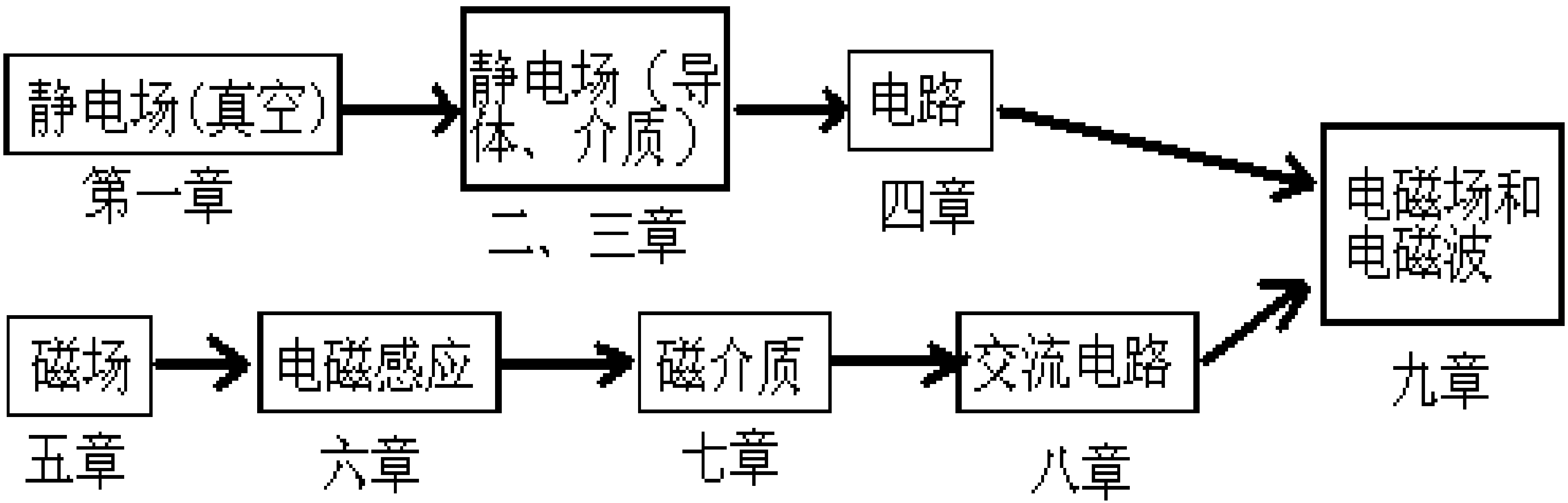
电磁学像力学和**热**学一**样**，**是一门系统性逻辑性很强的理论体系。**

在研究方法上，它**总**是由**真空到介质**，**由不变场到变化场。**




第一章
真空中的静电场

基本内容及研究思路

本章**讨论**相**对**于**观**察者**静止的电荷产生的场**–静**电场**

首先从静**电现**象的**观**察开始，**认识电**荷和物**质**的**电结**构，从**实验**得到**实验规律**——**库仑定律。**

然后从静**电**力是**怎样作用**的**这**一**问题**的**讨论**，引入**电场**，定**义**描述**电场**属性的**两个物理量**——**电场强度和电势**

在理论体系方面，本章从**库仑**定律和叠加原理出**发**，**导**出静**电场**的**两个定理**——**高斯定理和环路定理**，**进**而描述静**电场**的**性质**

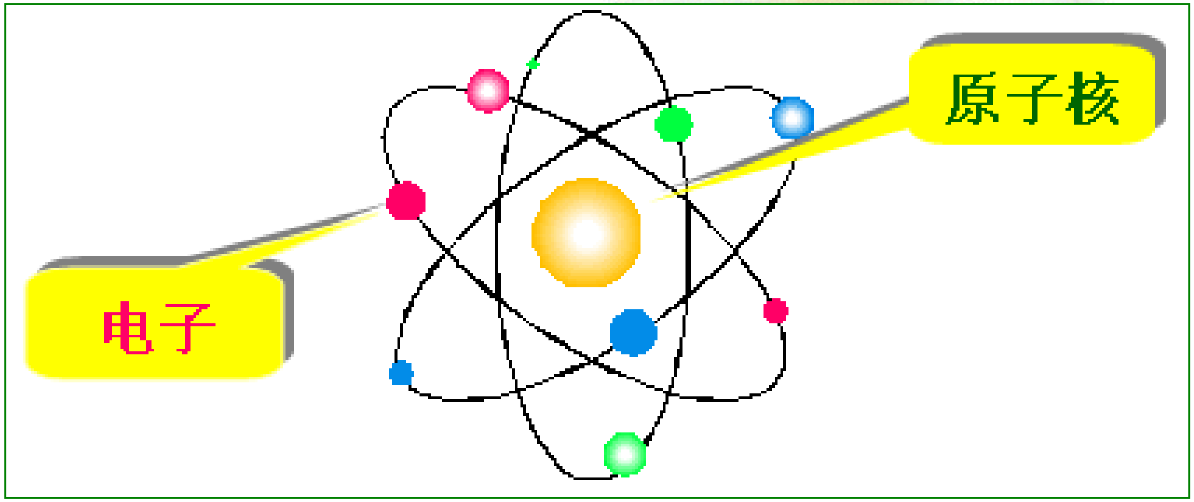
§1-1 电荷和电荷守恒定律

电荷（量）**量子化**？

电荷量的相**对论**不**变**性？

◆电荷(量)量子化？

● 物质的电结构

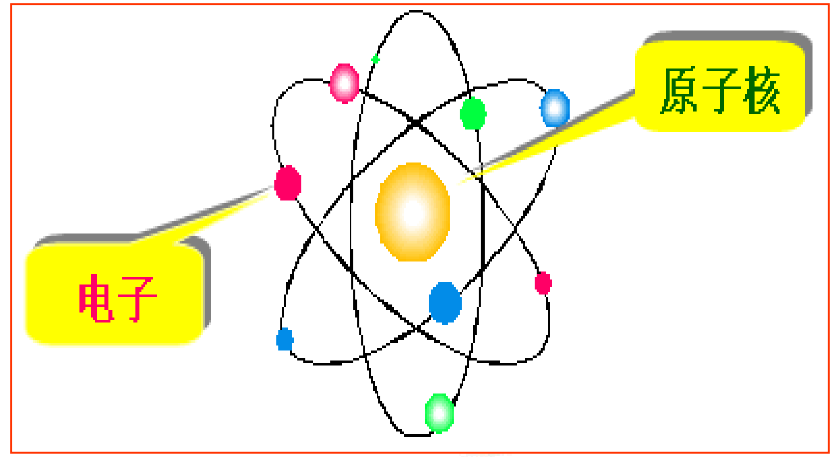


物质由原子组成，原子由原子核和核外电子组成，原子核又由中子和质子组成。

中子不带电，质子带正电，电子带负电。

正常状态下质子数和电子数相等，原子呈电中性。

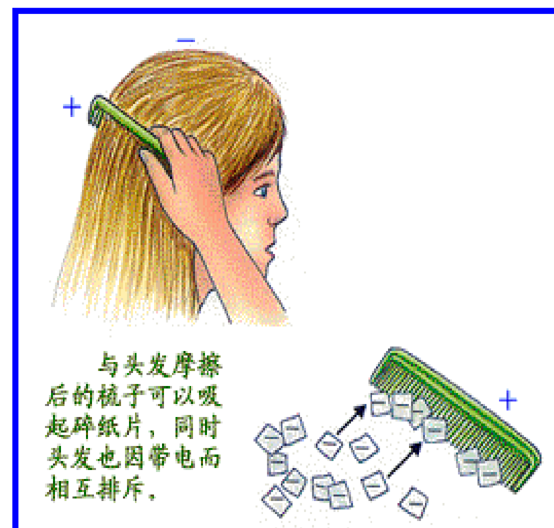
- **物质**
  - 分子
  - 原子
    - 原子核
      - 中子
      - **质**子
    - **电**子



● 当物**质处**于**电**中性**时**，**质**子数＝**电**子数

● 当物**质**中的**电**子**过多时**——物体**带负电**，

电子**过少时**——物体**带正电**



● 物体**带电的本质是电子的得失**

● **带电**体的**电**量是**电子电量的整数倍**。

带电体**电量**　$q=ne,\ n=1, 2, 3, \ldots$

带电体**电**量 $q=ne$，$n=1,2,3,\ldots$

$$e=1.6\times10^{-19}C$$

电荷的**这**种只能取**离散的、不连续**的量**值**的性**质**，叫作**电**荷的量子化。

◆电荷量的相对论不变性？

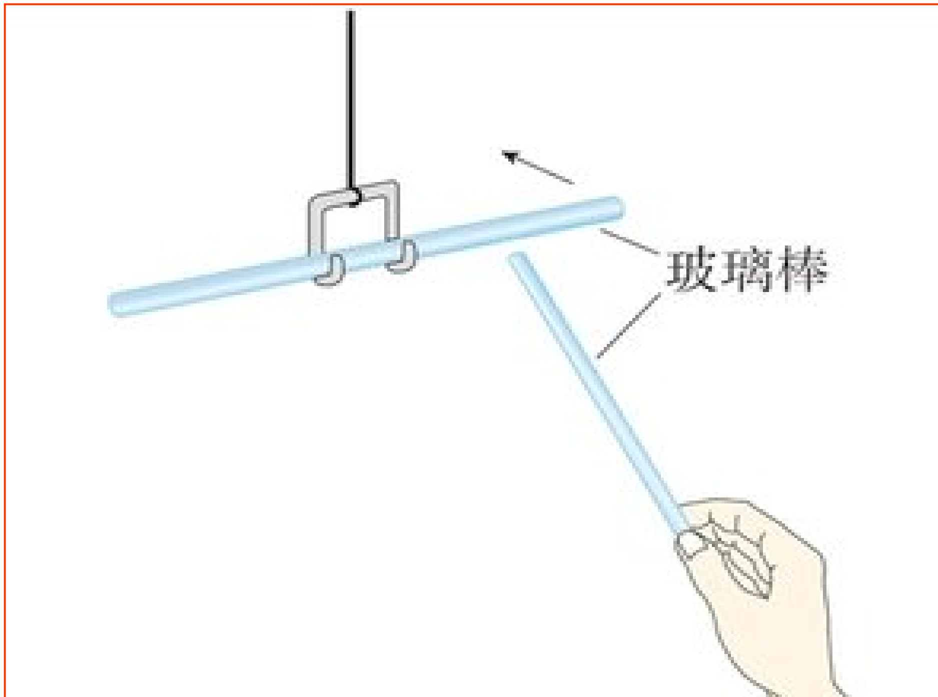
相对论中，物质的质量会随其运动速率而变化

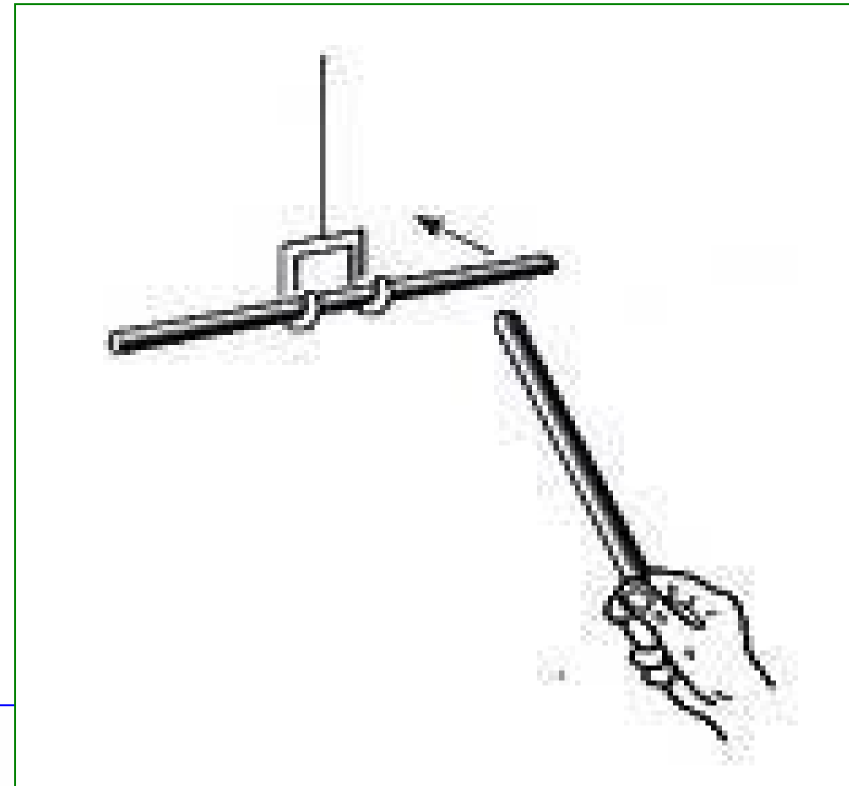
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$$

实验证明：

一切带电体的电量不因其运动而改变，

电荷是相对论性不变量。


玻璃棒




橡胶棒
玻璃棒

■1747年，美国物理学家富**兰**克林提出：

用毛皮摩擦**过**的橡胶棒所**带电**荷:

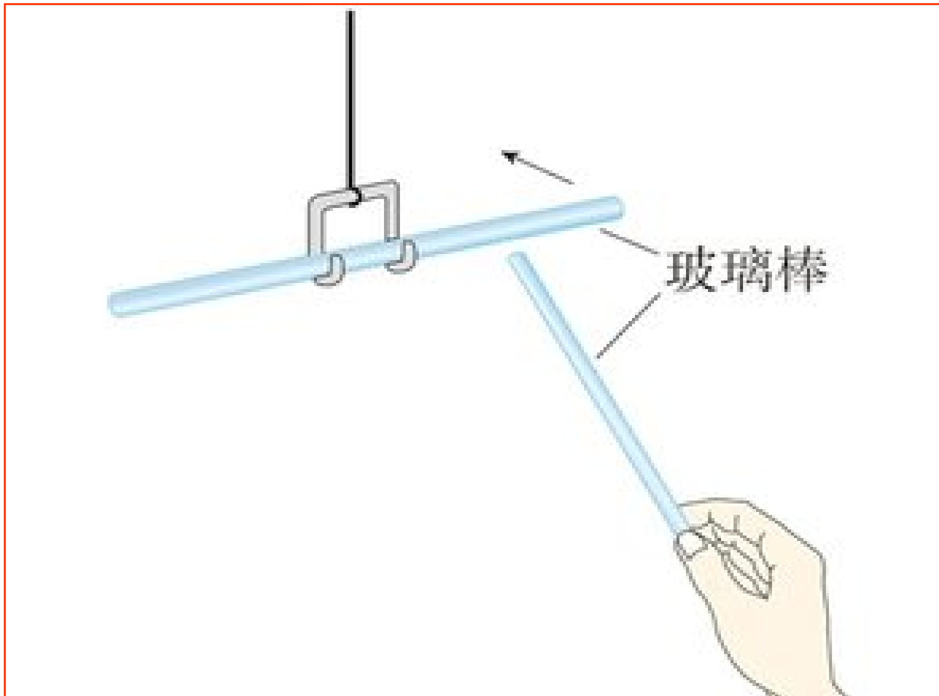
称**为负电荷**.

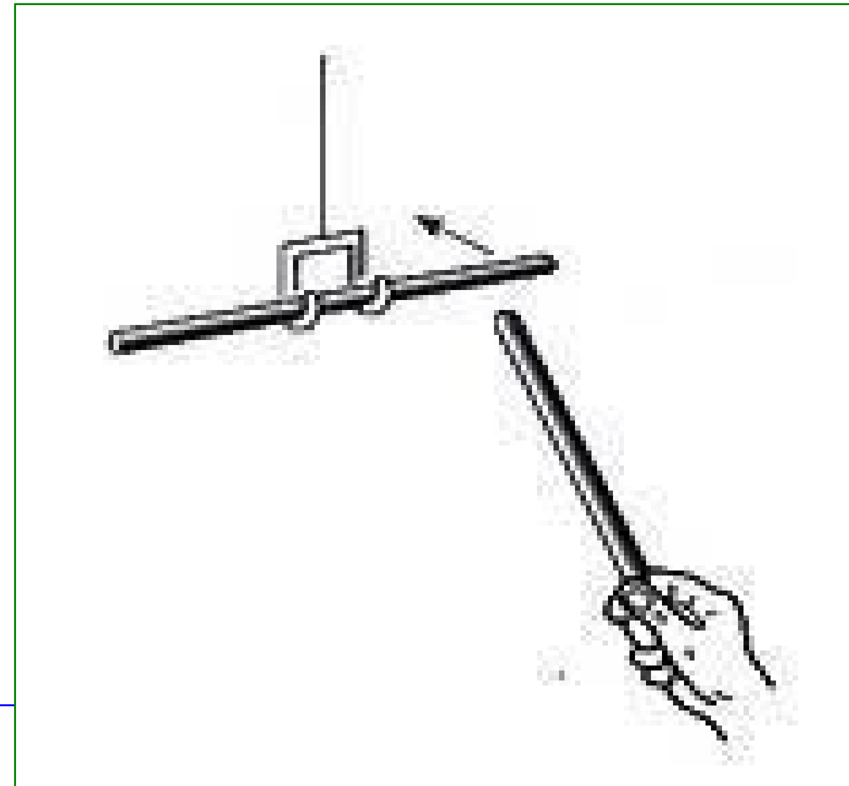
用**丝绸**摩擦**过**的玻璃棒所**带电**荷:

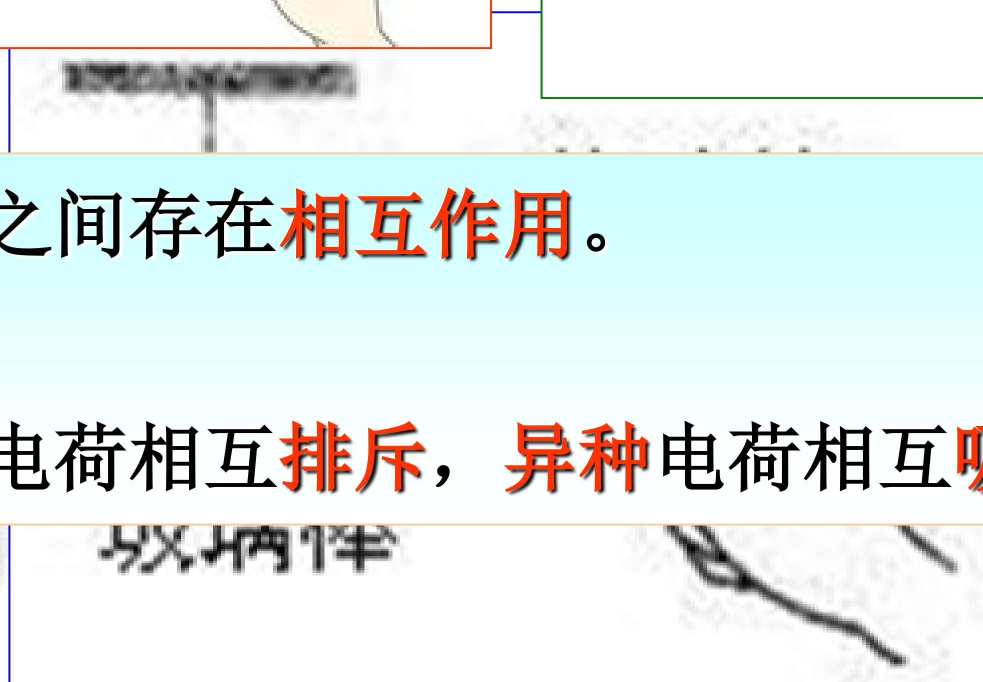
称**为正电荷**

■自然界只有两种**电**荷:

负电荷和正电荷







电荷之间存在**相互作用**。

同种电荷相互**排斥**，**异种**电荷相互**吸引**

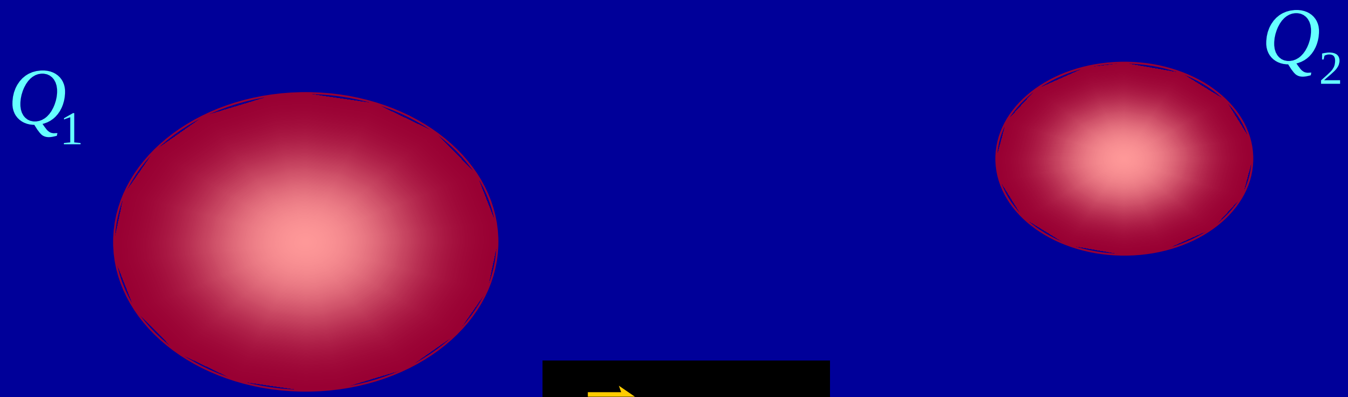
电荷之间存在相互作用，

同种电荷互相排斥，异种电荷互相吸引。

提出问题？

如何定量计算

带电体之间的相互作用力？



$\vec{F}=?$ → 复杂问题

影响因素有哪些?

带电体的形状大小、带电体之间的距离

带电体所带电荷的种类、所带电量的多少

首先研究只考虑带电体电荷量、距离，
忽略带电体形状、大小时的作用力

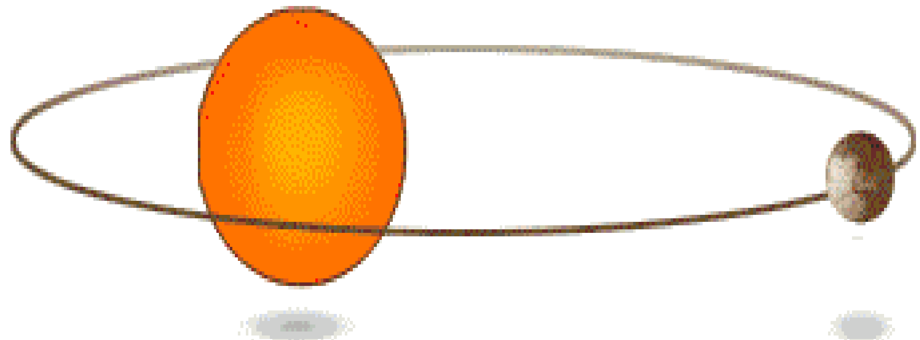
§1-2 库仑定律

库仑（C.A.Coulomb 1736 –1806）

法国物理学家，1785年通过**扭秤实验**创立**库仑定律**，使电磁学的研究从**定性进入定量阶段**.

一.点电荷

- 类比**质点**



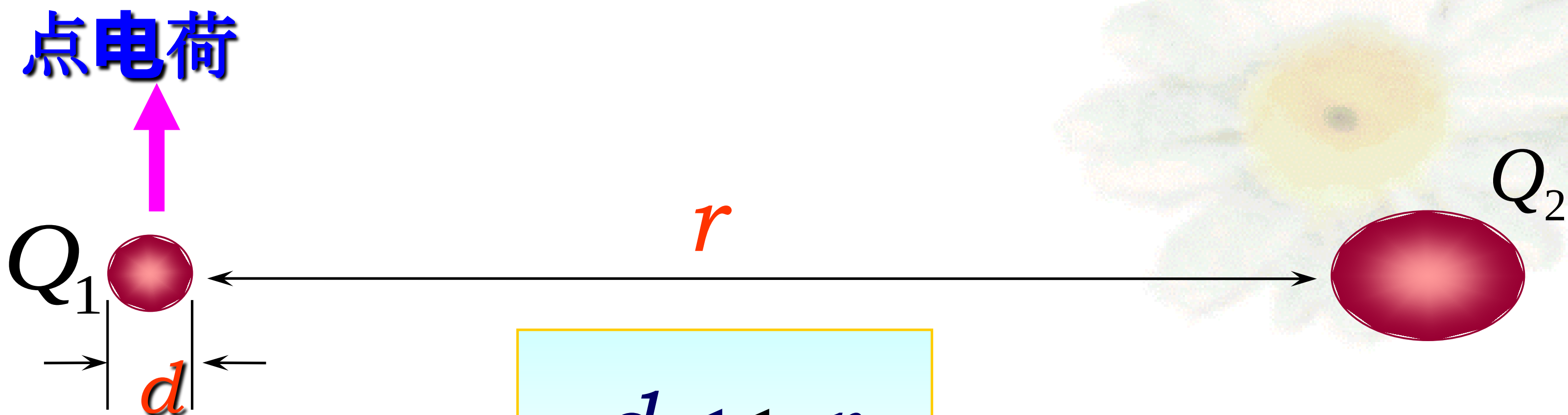
质点

地球——太阳间距： 1.5×10^{8} km

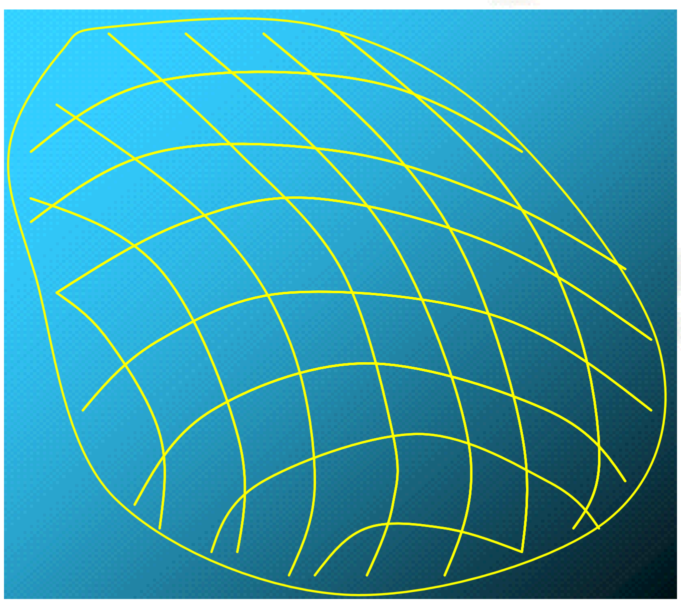
地球半径： 6.37×10^{3} km

物体的**线度**与它和其它物体之**间**的**距离相比很小**，**则**可以忽略物体的形状，只考**虑**物体**质**量，从而把物体看做**质**点

一.点电荷



$$d \ll r$$

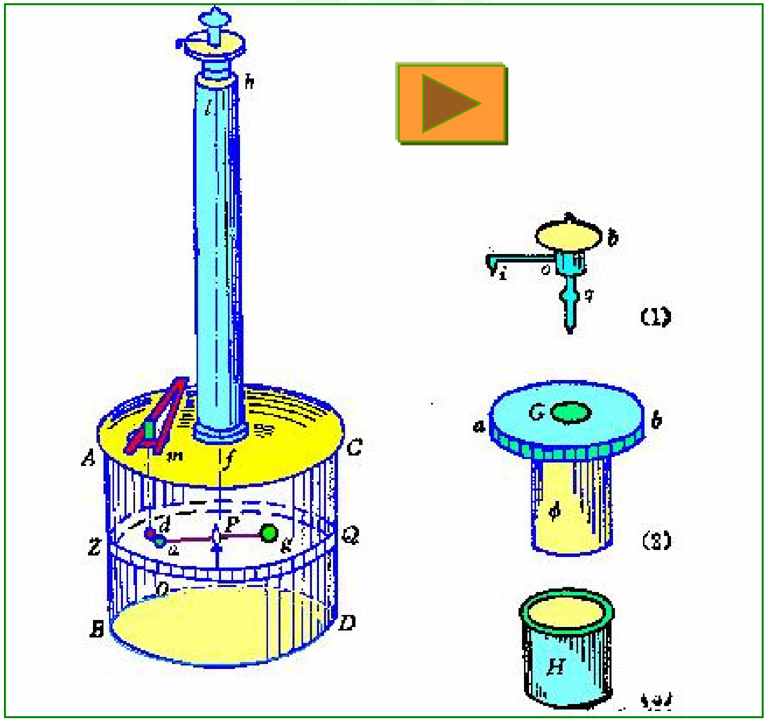


不能视作点电荷的带电体

视作由许多点电荷组成的系统

二. 库仑定律的表述

研究了两同号电荷之间的
斥力与距离的关系



点电荷之间的
斥力与距离的平方成反比

二. 库仑定律的表述

两点电荷之间的作用力与它们所带电量的关系？

两点电荷之间的作用力与它们所带电量的乘积成正比

类 比

两质点间的万有引力与两质点的质量关系

两质点间的万有引力与两质点的质量乘积成正比关系

二. 库仑定律的表述

在真空中，两个相对于观察者静止的点电荷之间的相互作用力的大小与它们所带电量的乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比，

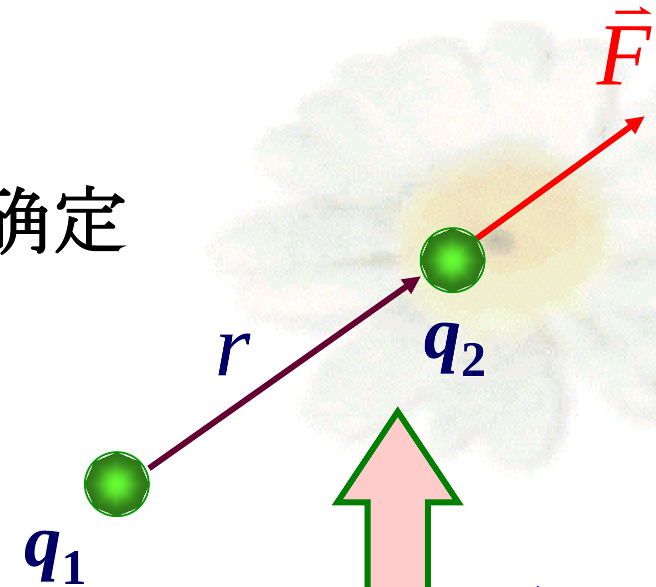
方向沿两电荷的连线，同号相斥，异号相吸。

成立条件：

（1）点电荷；（2）静止；（3）真空

三. 库仑定律的表达式

1. 点电荷之间作用力的大小确定



$$F \propto q_1 q_2$$

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

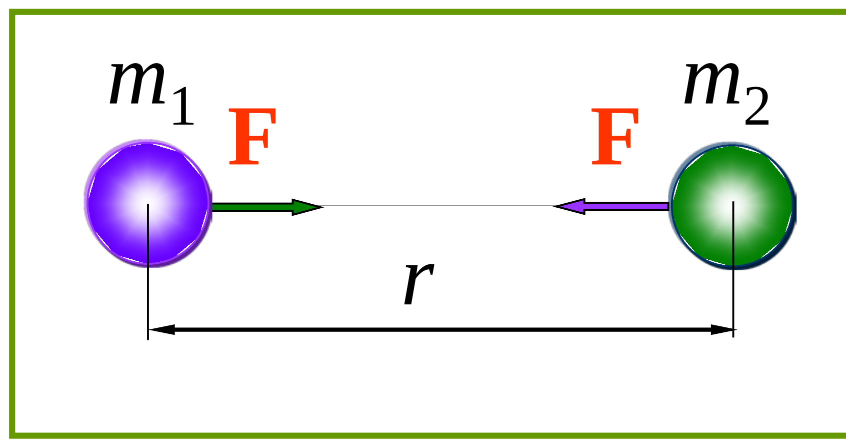
$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

类 比

$$F \propto m_1 m_2$$

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

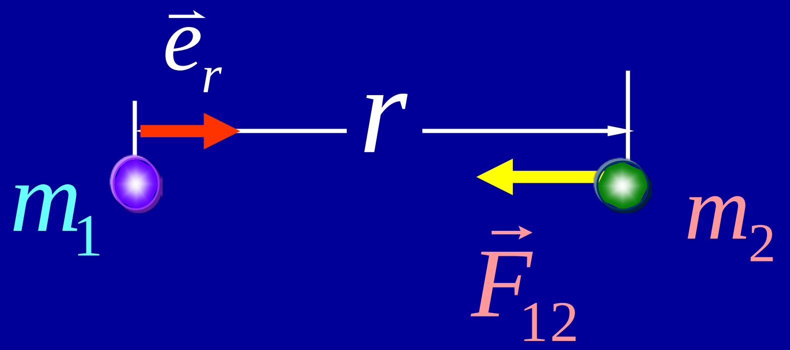
$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$



2. 点电荷之间作用力的方向确定

类比万有引力

$$\boxed{F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}}$$



$\vec{e}_r$:从施力物体指向受力物体的单位矢量

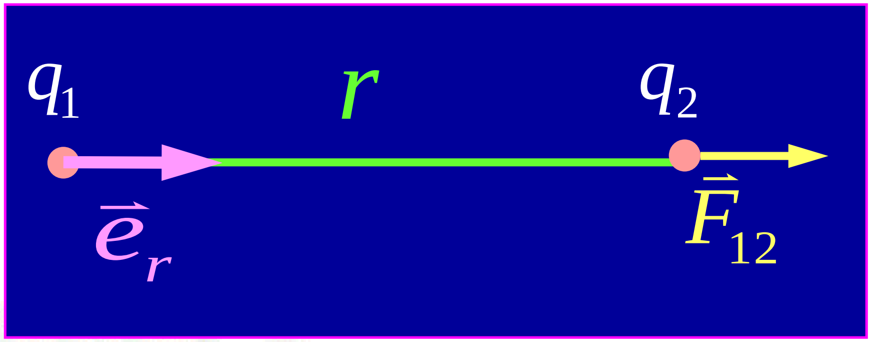
$\vec{F}$ 与 $\vec{e}_r$方向相反

$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_r}$$

2. 点电荷之间作用力的方向确定

方向沿两电荷的连线, 同号相斥, 异号相吸

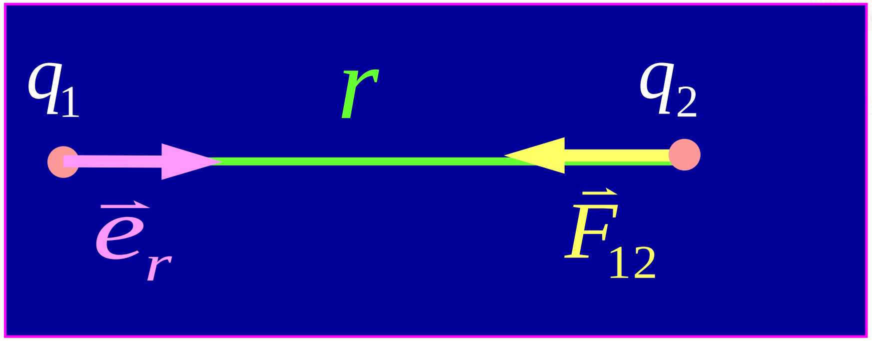
设q_1和q_2为同种电荷 $\boxed{q_1 q_2 > 0}$



$\vec{e}_r$: 从施力电荷指向受力电荷的单位矢量

$\vec{F}$ 与 $\vec{e}_r$ 方向相同

设q_1和q_2为**异种电荷**　$\boxed{q_1 q_2 < 0}$



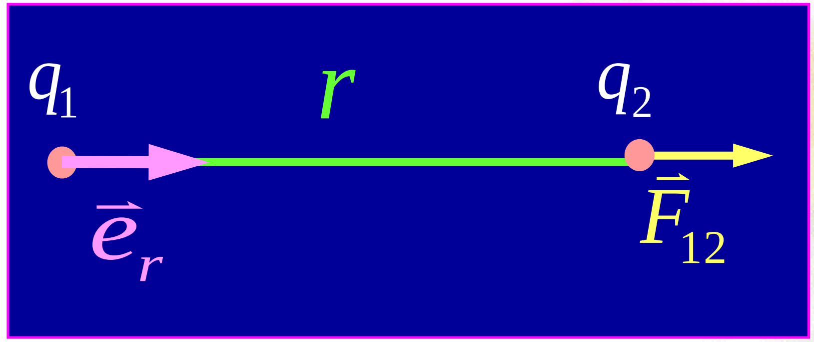
$\vec{e}_r$：从施力电荷指向受力电荷的单位矢量

$\vec{F}$ 与 $\vec{e}_r$方向相反

库仑定律的表达式

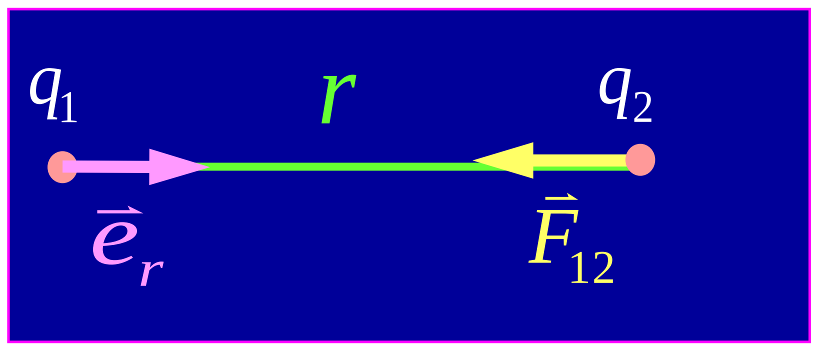
$$\boxed{q_1 q_2 > 0}$$

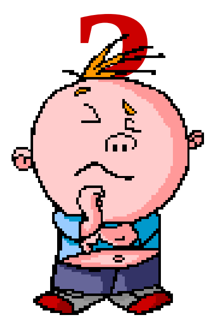
$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r$$



$$\boxed{q_1 q_2 < 0}$$

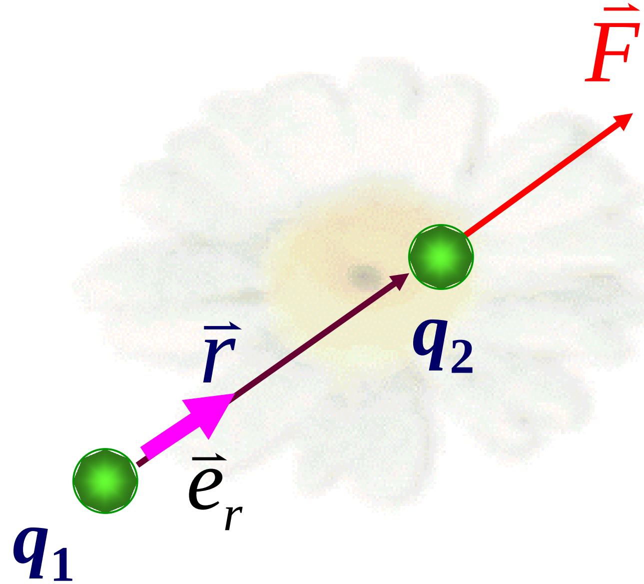
$$\vec{F} = -k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r$$





3. 库仑定律的表达式

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$



$\vec{e}_r$: 从施力电荷指向受力电荷的单位矢量

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r$$

库仑定律的数学表达式

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9 C^{-2}\cdot N\cdot m^2$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r$$

$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}$ F/m : 真空中的介电常数

4、**说**明

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r$$

◆定律的成立条件：**真空；静止**

两点电荷静止，且相对观察者静止

可拓宽：**静止源电荷对运动电荷的作用力**

◆库仑定律指明两点电荷之间作用力是有心力，满足平方反比律

$$r: 10^7 m \to 10^{-17} m$$

例1：求氢气中电子和质子之间电力与万有引力之比.

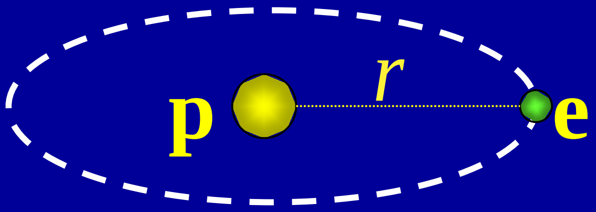
已知

$m_e = 9.1\times10^{-31}kg$ $m_p = 1.67\times10^{-27}kg$

$q_e = -1.60\times10^{-19}C$ $q_p = 1.60\times10^{-19}C$

解:

$$\frac{F_e}{F_G} = \frac{kq_eq_p}{Gm_em_p}$$

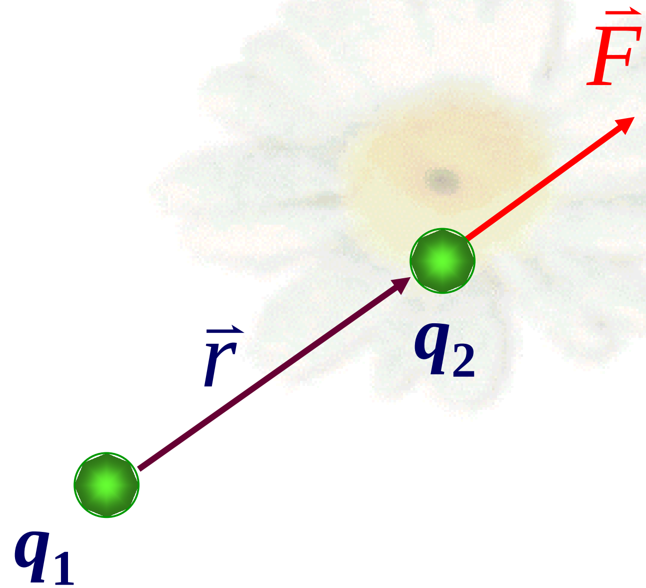


$$= \frac{9\times10^9(1.60\times10^{-19})^2}{6.67\times10^{-11}\times9.1\times10^{-31}\times1,67\times10^{-27}}$$

$$= 2.27\times10^{39}$$

结论:库仑力>>万有引力

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{e}_r$$



库仑定理解决了两个点电荷之间的作用力问题，

如果空间有两个以上的点电荷，或者不能视作点电荷的带电体，作用力又该怎样计算呢？

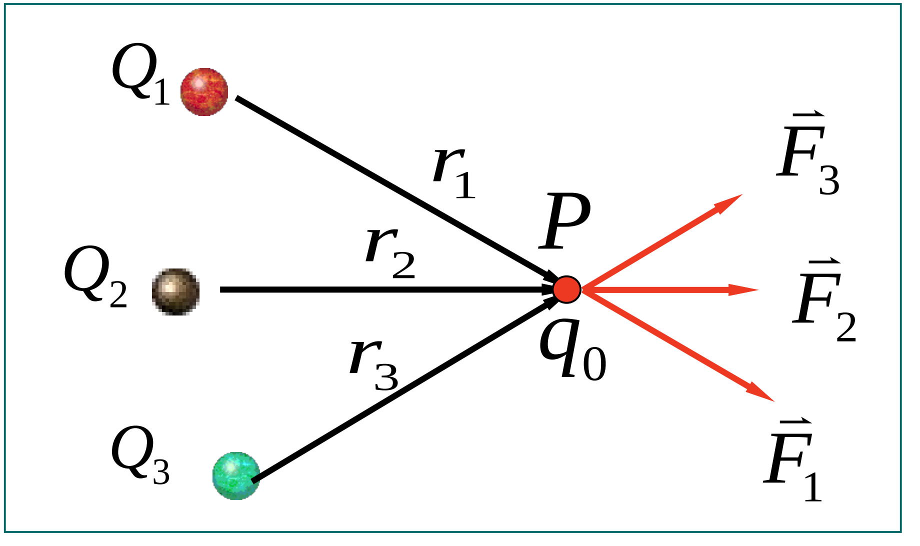
三、静电力的叠加原理

1、文字表述

作用在每一个点电荷上的**总静电力**
等于其他各点电荷单独存在时作用于该点电荷
静电力的矢量和.

（1） n个**离散的**点电荷系统

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3$$

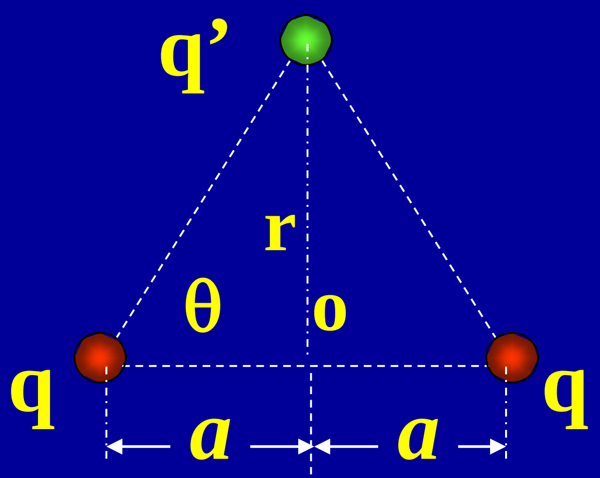


例题2、

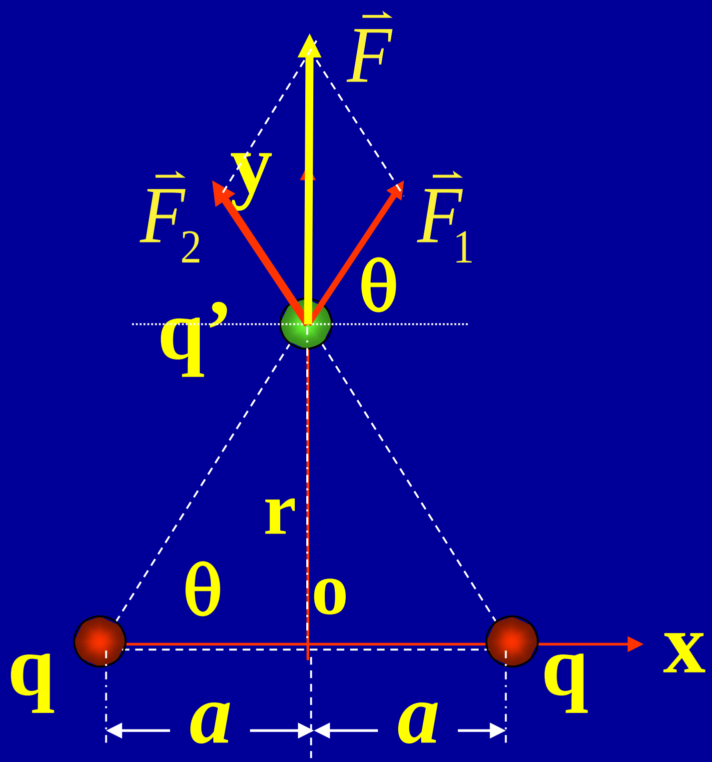
两个电量都是+q的点电荷,相距2a,连线的中点为o
今在它们连线的垂直平分线上放另一电荷q’, q’与o点相距r。

(1)求q’所受静电力;

(2) q’放在哪一点受力最大?



(1)求q’所受静电力；



解：建立坐标系

由于对称性： $\boxed{F_x = 0 \quad F = F_y = F_{1y} + F_{2y}}$

$$\boxed{F = F_{1y} + F_{2y} = 2F_1 \sin\theta}$$

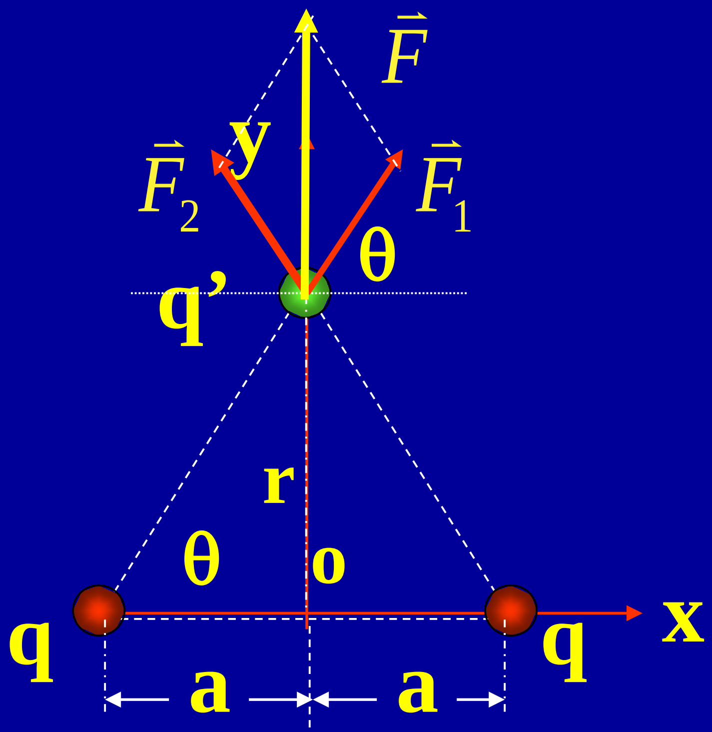
$$r_{qq'} = \sqrt{a^2 + r^2}$$

$$F = \frac{qq'}{2\pi\varepsilon_0(a^2 + r^2)}\sin\theta$$

$$= \frac{qq'r}{2\pi\varepsilon_0(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

(2) q’放在哪一点受力最大?

$$F=\frac{qq'r}{2\pi\varepsilon_0(a^2+r^2)^{3/2}}$$



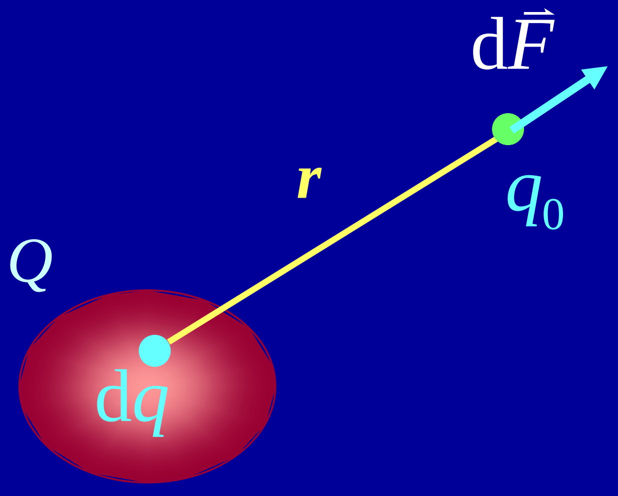
（2）令：

$$\boxed{\frac{dF}{dr}=0}$$

$$\frac{qq'}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(a^2+r^2)^{3/2}}-\frac{3}{2}\frac{2r^2}{(a^2+r^2)^{5/2}}\right]=0$$

$r=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 代入上式：得极值：$F=\dfrac{qq'}{3\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 a^2}\ (N)$

(2)电荷连续分布的带电体对点电荷的作用力

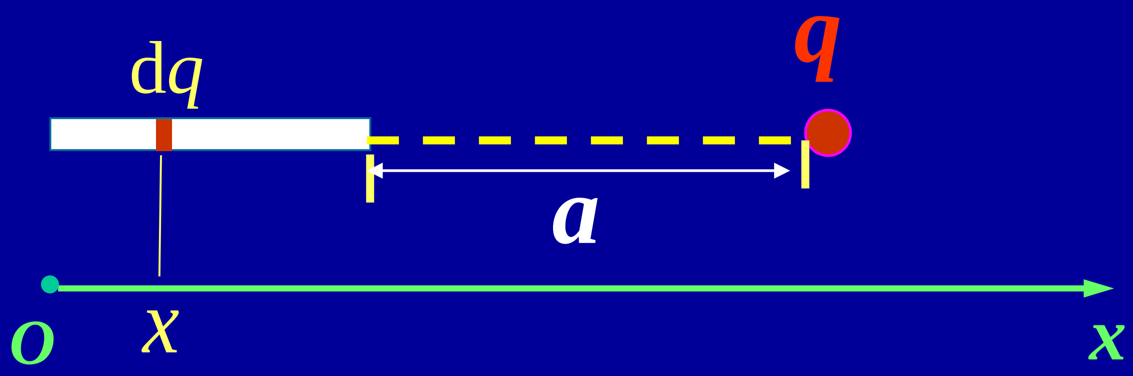


$$\mathrm{d}\vec{F} = \frac{q_0 \mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

$$\vec{F} = \int_Q \frac{q_0 \mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

例3 已知杆电荷线密度为λ，长度为L，q相距杆为a

求 q所受的作用力。



解

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x$$

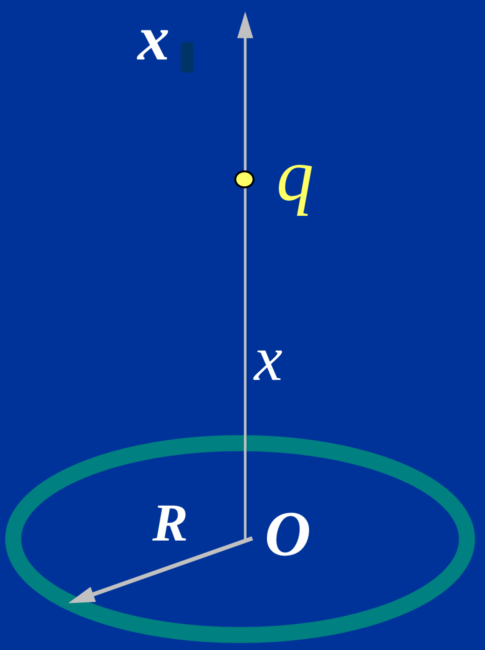
$$\mathrm{d}F = \frac{q\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 (L+a-x)^2}$$

$$F = \int_0^L \frac{q\lambda\, \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 (L+a-x)^2}$$

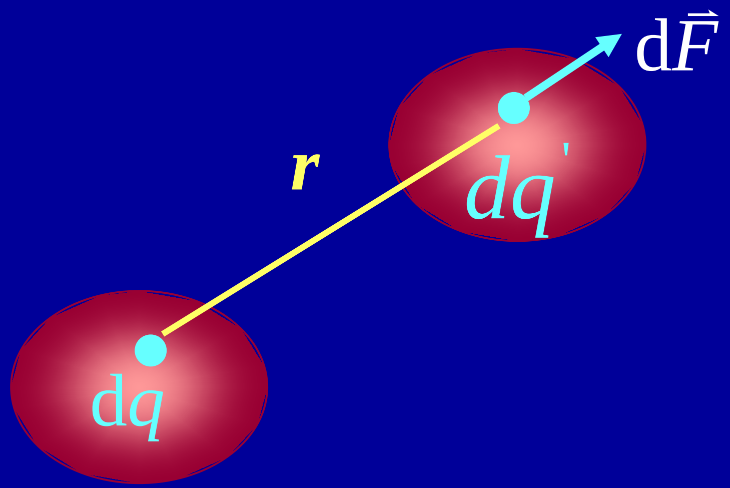
$$= \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{L+a}\right)$$

作业 半径为R 的均匀带电细圆环，带电量为Q

求 圆环轴线上任一点有点电荷q,
求q所受的作用力



(3)两个电荷连续分布的带电体之间的作用力



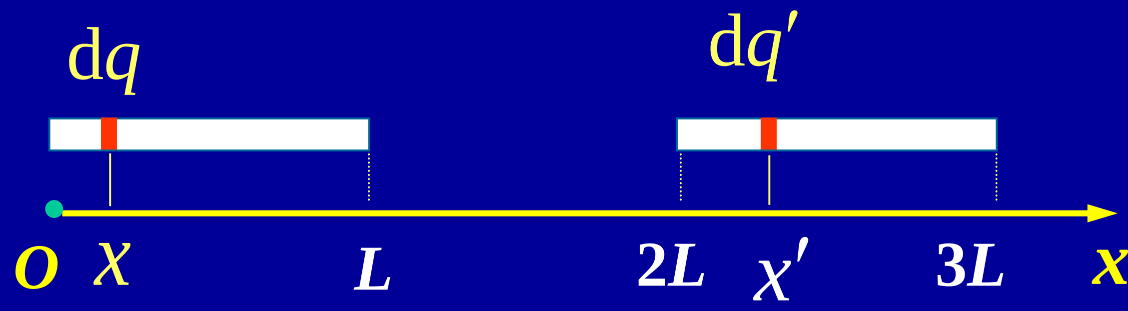
$$\mathrm{d}\vec{F}=\frac{dqdq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \Longrightarrow \vec{F}=\int\frac{dqdq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

例4 已知两杆电荷线密度为λ，长度为L，相距L

求 两带电直杆间的作用力。

解 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}q'=\lambda\mathrm{d}x'$



$$\mathrm{d}F=\frac{\lambda\mathrm{d}x\lambda\mathrm{d}x'}{4\pi\varepsilon_0(x'-x)^2}$$

$$F=\int_{2L}^{3L}\mathrm{d}x'\int_0^L\frac{\lambda^2\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(x'-x)^2}$$

$$=\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{4}{3}$$

电荷之间存在相互作用，

同种电荷互相排斥，异种电荷互相吸引。

提出问题？

一、如何定量计算

电荷之间的相互作用力？

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{e}_r$$

二、电荷之间的相互

作用力如何产生？

§1-3 电场　电场强度

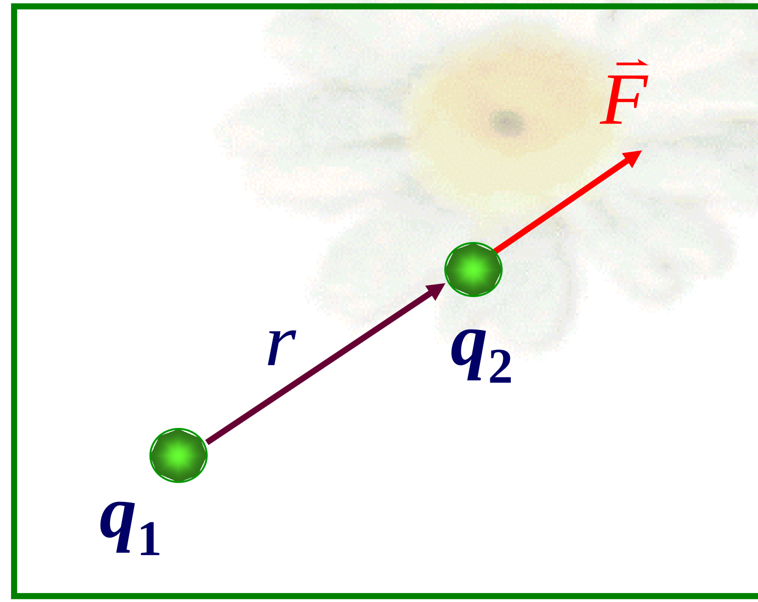
主要**讨论**两个**问题**：

一、引入**电场**

二、引出描述**电 场**力的性质的物理量—**电场强度**

定**义**　　**计**算

电荷间存在相互作用的静**电**力**如何定量计算？**

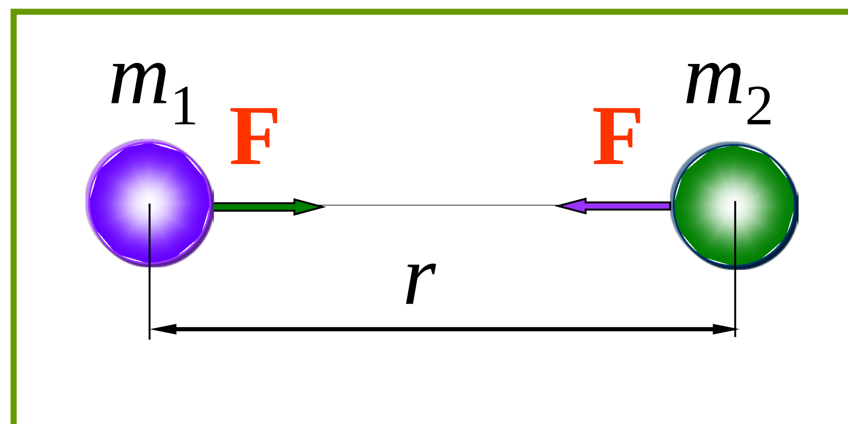


库仑定律

F=?

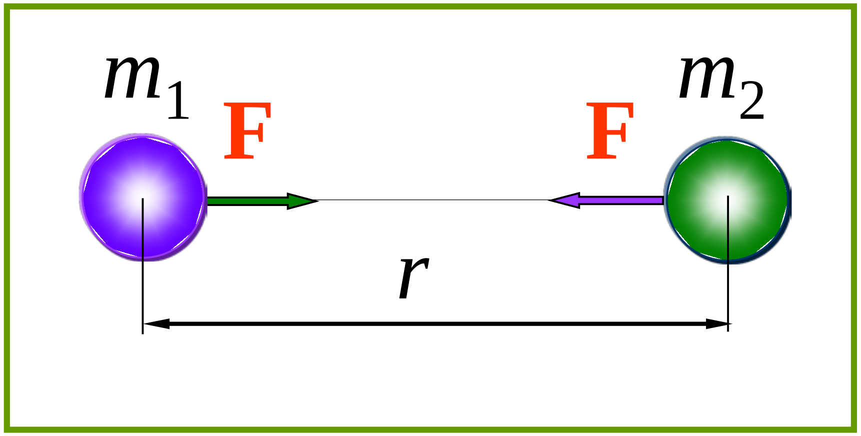
类 比

万有引力定律



问题：电荷间存在相互作用的静电力是怎样实现的？

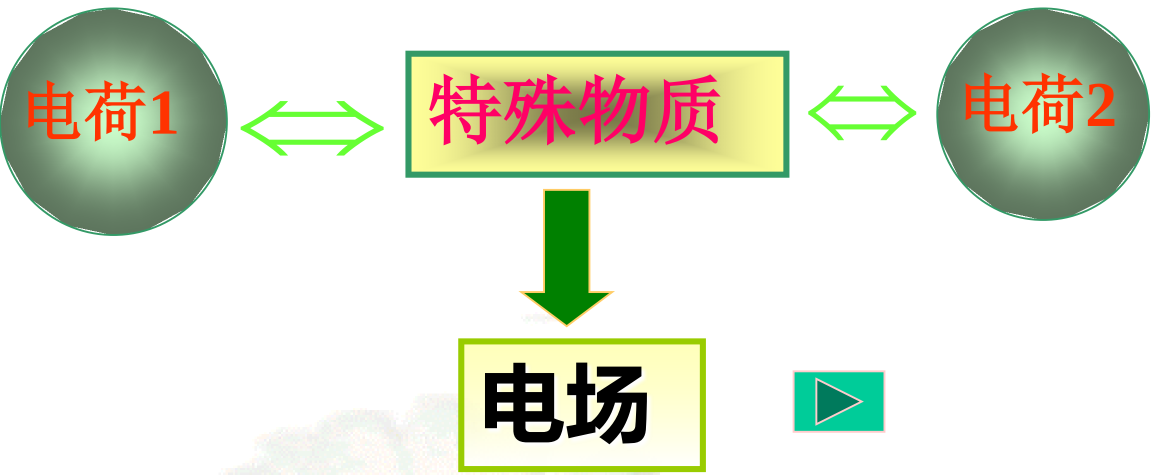
类比：物体间存在万有引力是怎样实现的？

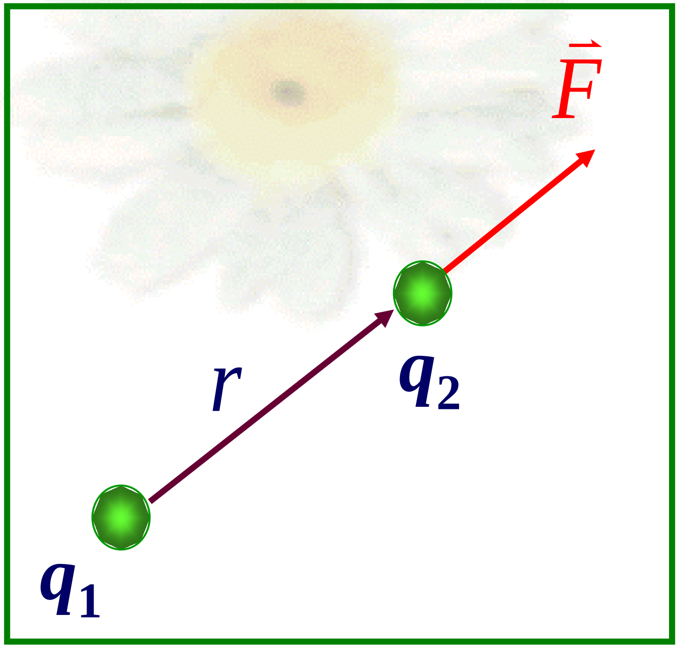


物体之间的万有引力依靠存在于物体周围的**特殊物质—引力场来传递。**

一：电 场

问题：**电**荷**间**存在相互作用的静**电**力是**怎样实现的**？





电荷之**间**的相互作用力依靠**电场来传递。**

相对于观察者静止电荷激发的**电场**，称**为静电场**

静**电场**是**本章的研究对象**；

引力场是由物体在其周围激发的一种特殊物质

电场是由电荷在其周围激发的一种特殊物质

讲课内容：

场与实物粒子都是客观存在的物质，

它们的共同点和差异？

电荷 ⇄ 电场 ⇄ 电荷

电场的基本性质：

对处于**电场**中的其它**电**荷有**作用力**

↓

在**电场**中引入描述**各点力的性质**的物理量

↓

二. 电场强度

问题1:

电场强度**如何定义?**

问题2:

电场强度**如何计算?**

问题1:电场强度如何定义?

思路：

引入检验电荷 →（条件）

- 线度足够小
- 电量足够小

↓

研究它在电场中的受力特点 → 讨论最简单的点电荷电场

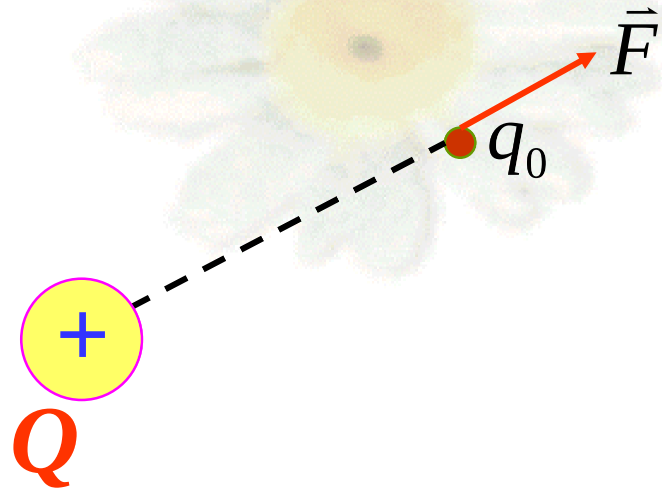
↓

定义电场强度 → 只由激发电场的场源电荷和电场中各点位置决定，与试探电荷无关

1、**检验电**荷在点**电**荷**电场**中的**受力特点**

$$\vec{F}=\frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

$$\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$



结论？

(1) **F**与r（位置）有关，**还**与**试验电**荷q_0有关。

(2) F 与q_0之比与**场**源**电**荷**Q**和**电场**中各点位置有关

电荷之间存在相互作用，

同种电荷互相排斥，异种电荷互相吸引。

提出问题？

一、如何定量计算

电荷之间的相互作用力？

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r$$

二、电荷之间的相互

作用力如何产生？

电　场

§1-3 电场　电场强度

主要**讨论**两个**问题**：

一、引入**电场**

二、引出描述**电 场力的性质**的物理量—**电场强度**

定**义**　　**计**算

2、电场强度定义

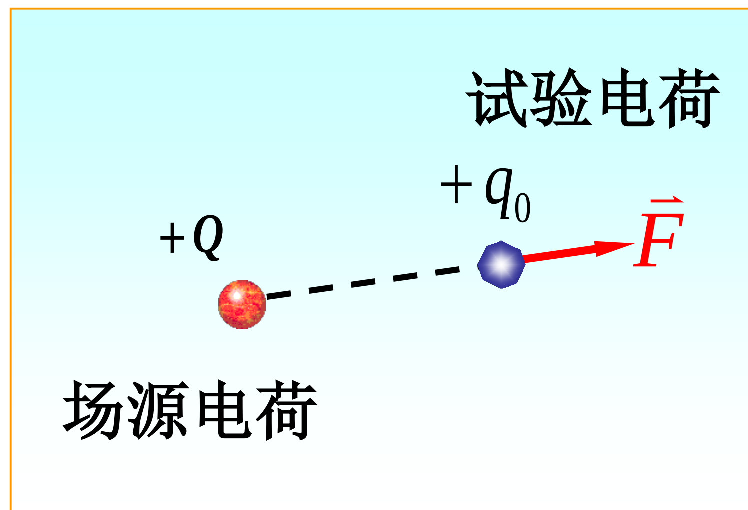
F/q_0与检验电荷无关，仅由场源电荷和场中各点位置决定，可以反映电场本身的性质，称为电场强度

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

单位：N/C

电场中某点的电场强度大小等于位于该点的单位电荷所受的电场力的大小。

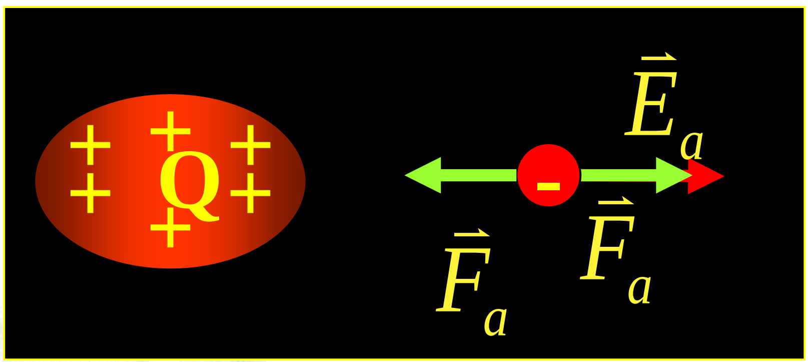
电场强度的方向与正电荷在该点所受的电场力的方向一致



电荷 ⇄ 电场 ⇄ 电荷

3、电场力

电荷q在电场中某点所受的的电场力 $\boxed{\vec{F}=q\vec{E}}$

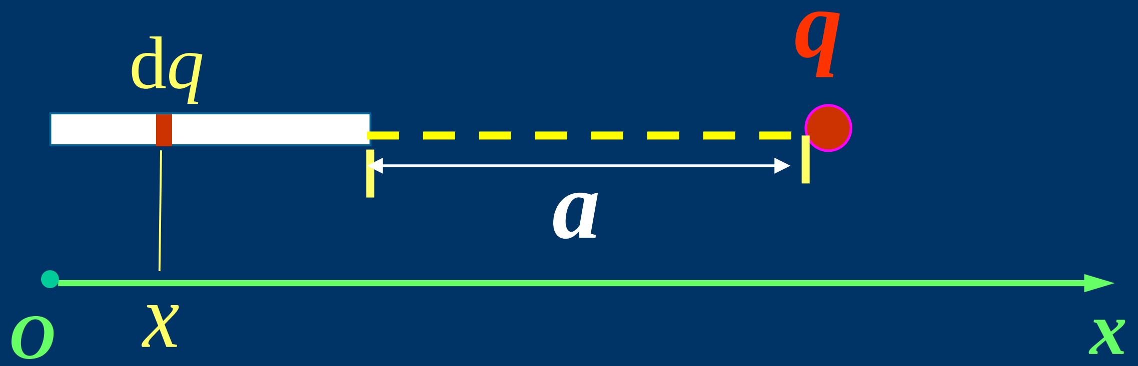


q 为正值时， $\vec{F}_a$与 $\vec{E}_a$一致；

q 为负值时，$\vec{F}_a$ 与$\vec{E}_a$相反。

例3 已知杆电荷线密度为λ，长度为L，q相距杆为a

求 q所受的作用力。



解

方法一：$\mathrm{d}q \Rightarrow \mathrm{d}F \Rightarrow F = \int \mathrm{d}F$

方法二：先算出$E \Rightarrow F = qE$

对 $\vec{E}=\dfrac{\vec{F}}{q_0}$ 的说明:

◆电场强度描述电场的属性，**与检验电荷的存在与否无关**，只与激发电场的电荷**(场源电荷) 有关**

◆**对应场中确定的点就有确定的电场强度**

对于静电场：$\vec{E}=\vec{E}(x,y,z)$

对于匀强电场：$\vec{E}=\vec{C}$

对于变化电场：$\vec{E}=\vec{E}(x,y,z，\ t)$

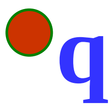
对于静电场：$\vec{E}=\vec{E}(x,y,z)$

问题2：

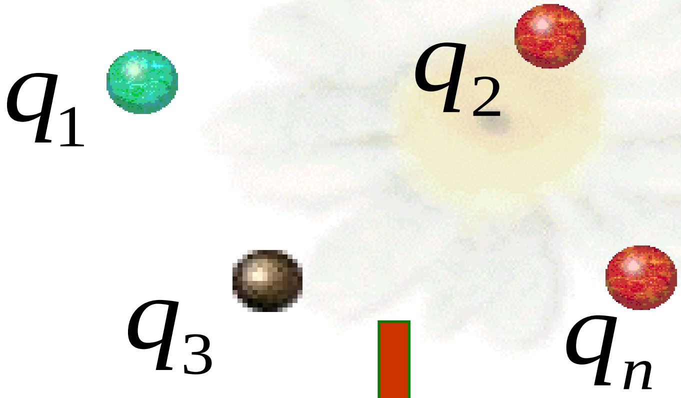
如何**求解给**定**带电**体**电场**中的**场强分布？**

三.**电场强**度的**计算**（▲）

激发电场的源电荷：

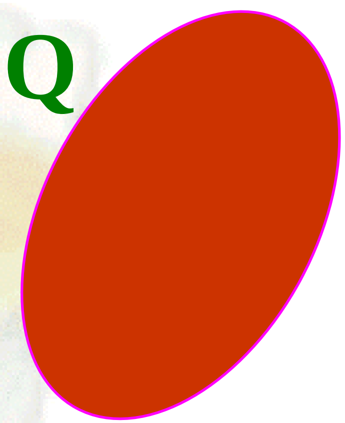
(1) 

点电荷电场

(2) 

离散分布

的点电荷系统的电场

(3) 

：任意带电体的电场

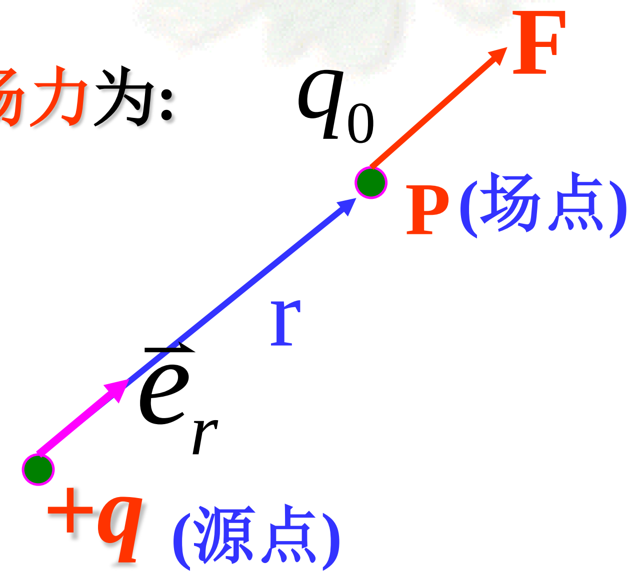
三、电场强度的计算

1.点电荷电场的电场强度

在真空中，存在点电荷q，求电场强度分布

试验电荷放在r处，试验电荷受到的电场力为:

$$\boxed{\vec{F}=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r}$$



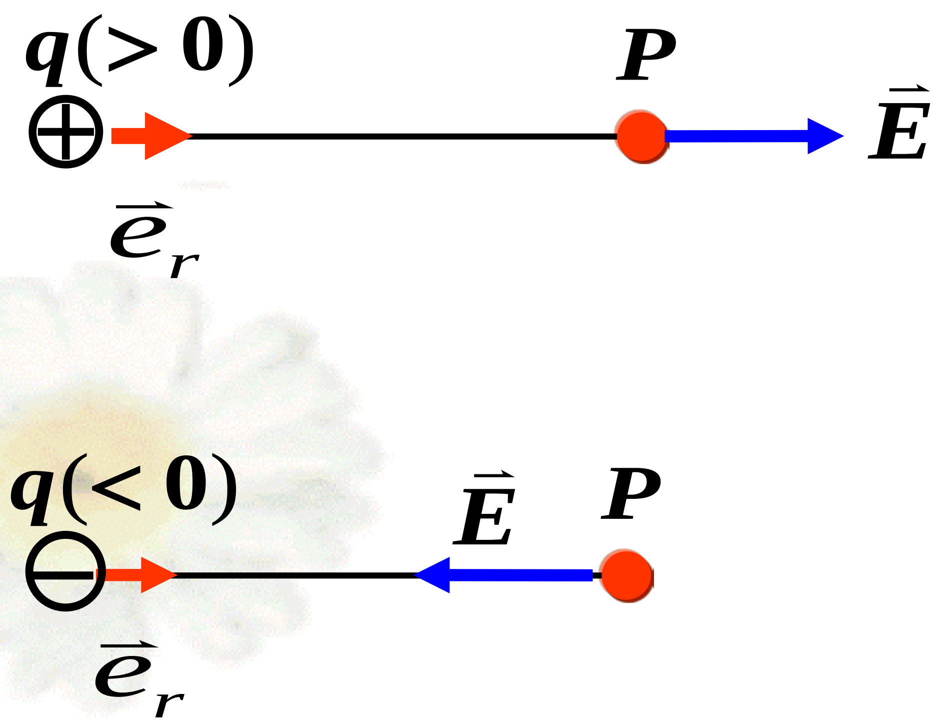
点电荷场强公式:

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

点电荷电场的场强分布规律

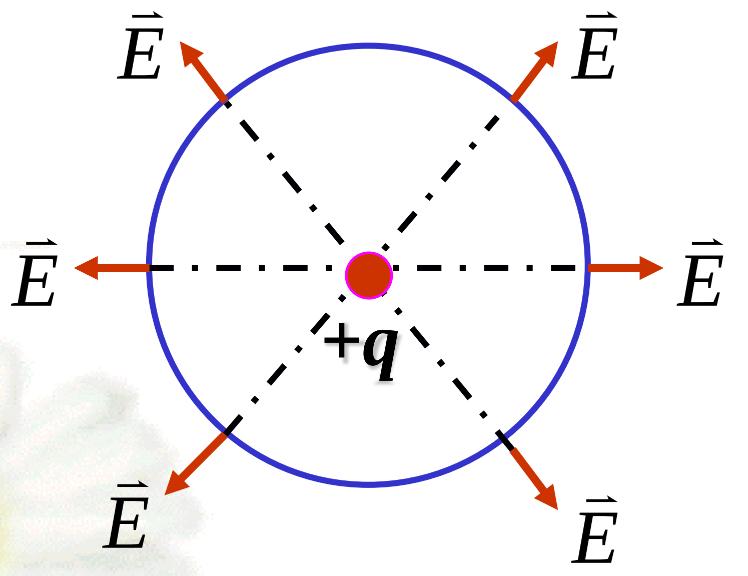
$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

$\vec{e}_r$:从源点指向场点的单位矢量



$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

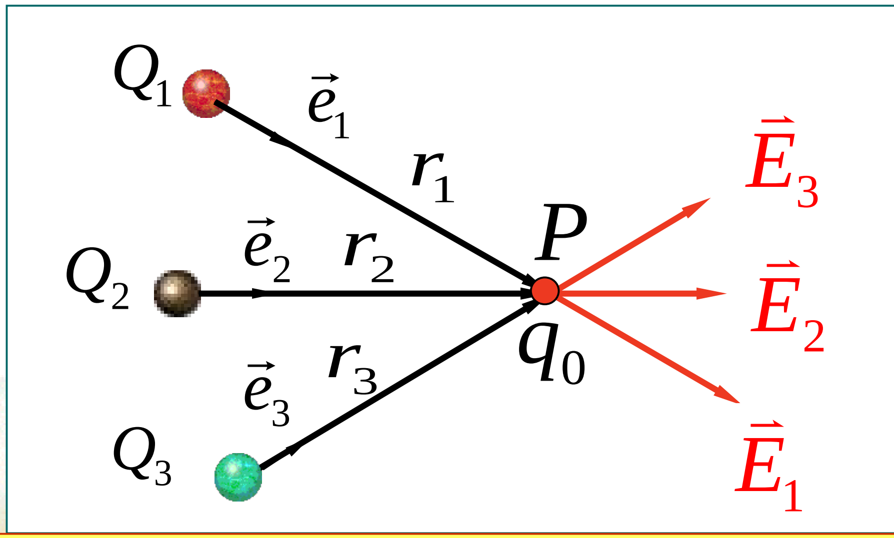
$\vec{e}_r$: 从源点指向场点的单位矢量



点**电**荷**电场**具有**球对**称性

2、电荷离散分布的点电荷系统的电场

$$\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{Q_i}{r_i^2}\vec{e}_i$$



$$E_x=\sum_i E_{ix},\quad E_y=\sum_i E_{iy}$$

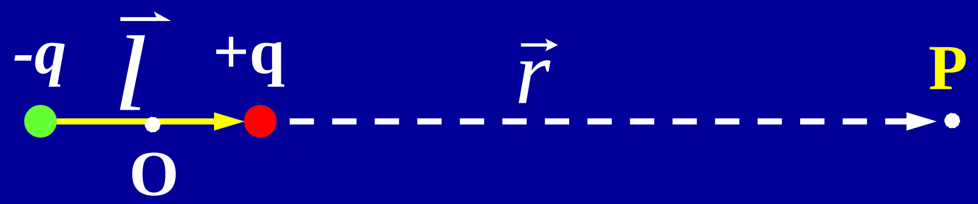
$$\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}$$

点电荷 … 个点电荷单独

存在时在该 …

例、电偶极子的电场强度

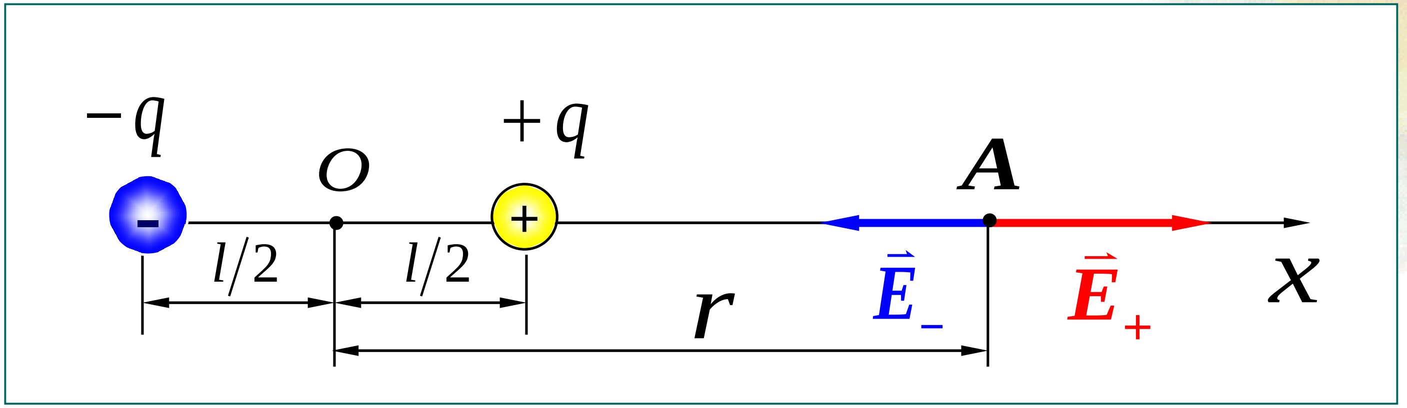
1、基本概念：



两点电荷$+q$ 和 $-q$，相距 l ，$\vec{l}$ 的方向由$-q$ 指向$+q$，当考察点至两电荷的距离 $r >> l$ 时，两点电荷组成的系统，称为电偶极子。

电偶极矩：$$\vec{p} = q\vec{l}$$

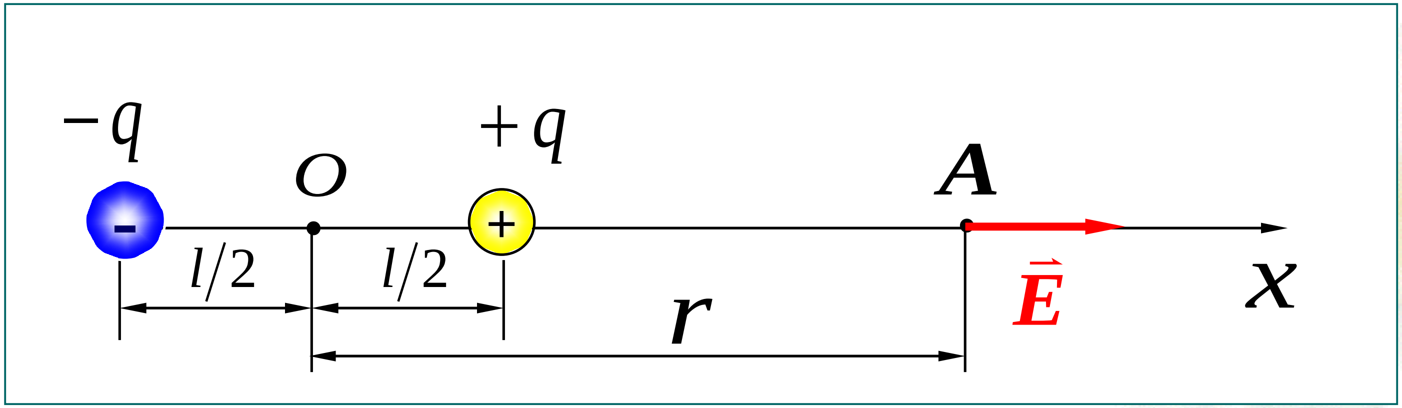
（1）轴线延长线上一点的电场强度



$$\vec{E}_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r-l/2)^2}\vec{i}$$

$$\vec{E}_- = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r+l/2)^2}\vec{i}$$

化简后： $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2rl}{(r^2-l^2/4)^2}\right]\vec{i}$



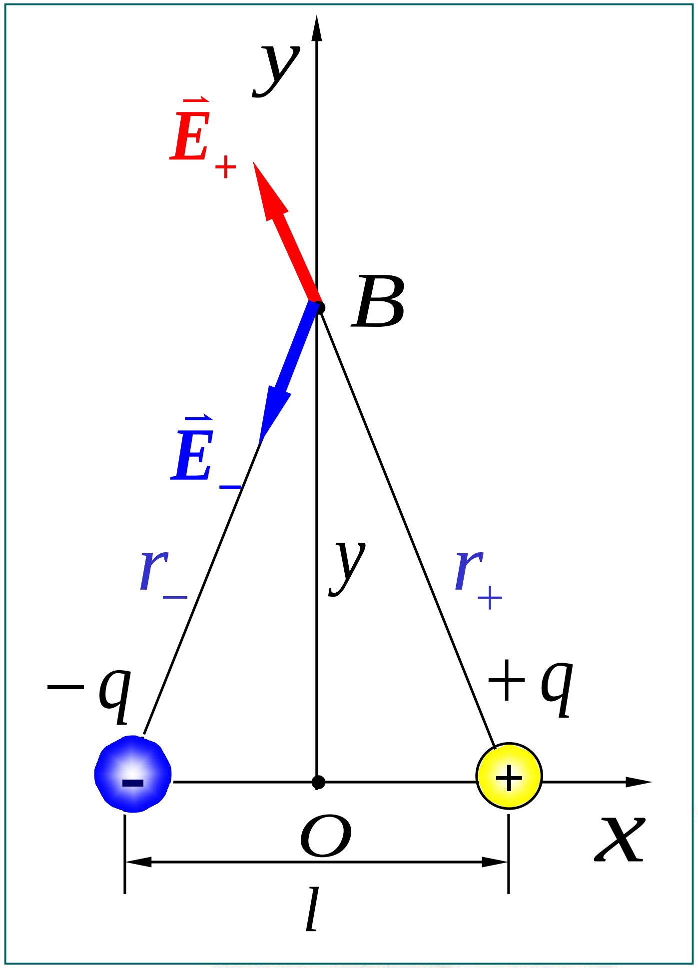
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2rl}{(r^2 - l^2/4)^2}\right]\vec{i}$$

$r >> l$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql}{r^3}\vec{i}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{p}}{r^3}$$

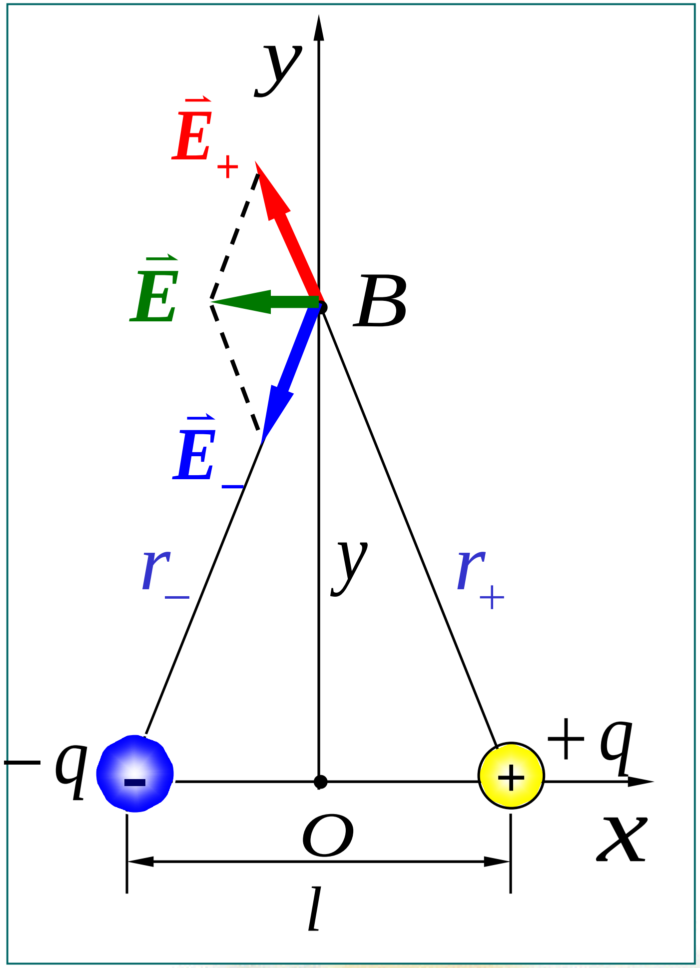
（2）轴线中垂线上一点的电场强度



$$E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+^2} \qquad E_- = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_-^2}$$

$$r_+ = r_- = \sqrt{r^2 + (\frac{l}{2})^2}$$

$$\boxed{E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left[r^2 + (\frac{l}{2})^2\right]}}$$



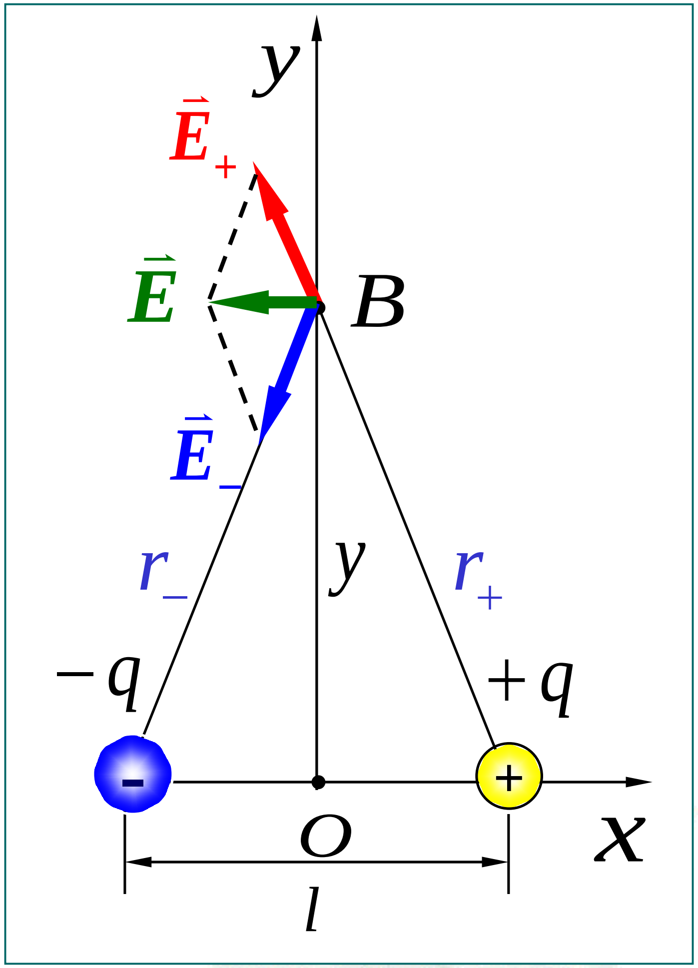
$$\boxed{E_y = E_{+y} + E_{-y} = 0}$$

$$\boxed{E_x = E_{+x} + E_{-x} = -2E_+ \cos\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2 + (\frac{l}{2})^2}}$$

$$|E| = |E_x| = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0\left[r^2 + (\frac{l}{2})^2\right]} \cdot \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2 + (\frac{l}{2})^2}}$$

$$= \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0\left[r^2 + (\frac{l}{2})^2\right]^{3/2}}$$



$$\boxed{|E| = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0\left[r^2 + (\frac{l}{2})^2\right]^{3/2}}}$$

$$\because r >> l$$

$$\vec{E} = -\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{i}$$

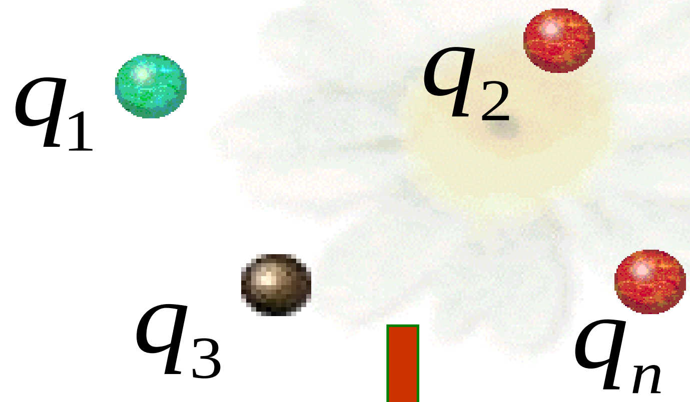
$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

激发电场的源电荷：

(1) q

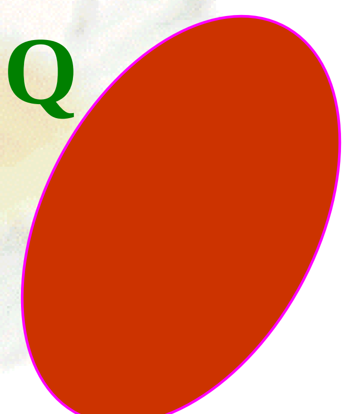
$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

(2)



$$\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$$

(3)

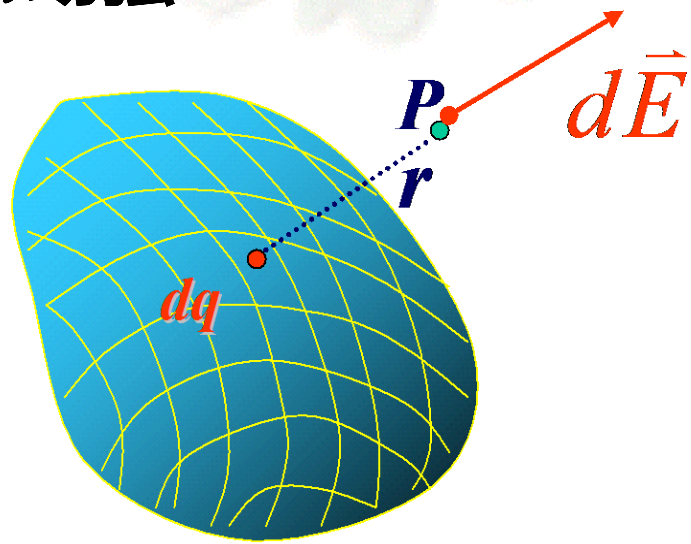


：任意**带电体**的**电场**

(3) 电荷连续分布的带电体的场强

将带电体分成很多电荷元dq

任取dq, 求出它在空间任意点P 的场强



$$\mathrm{d}\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{e}_r$$

对整个带电体积分, 可得总场强：

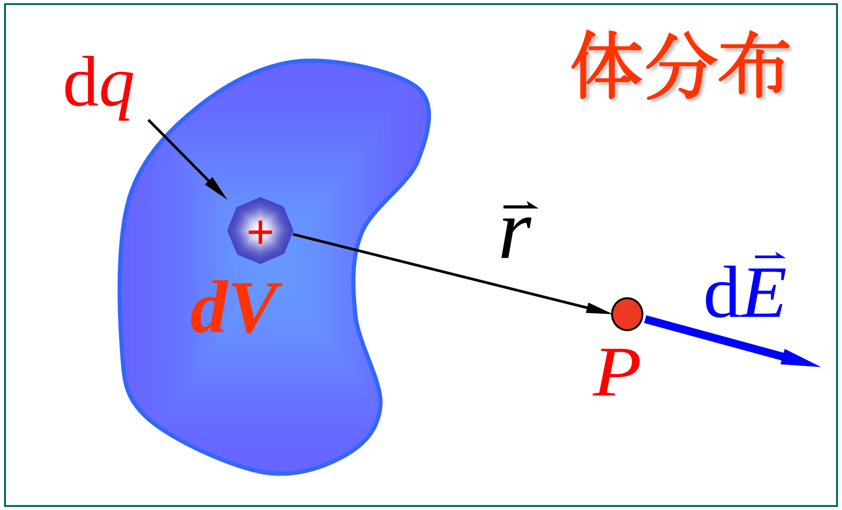
$$\vec{E}=\int_V\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{e}_r$$

(3) 电荷连续分布的带电体的场强

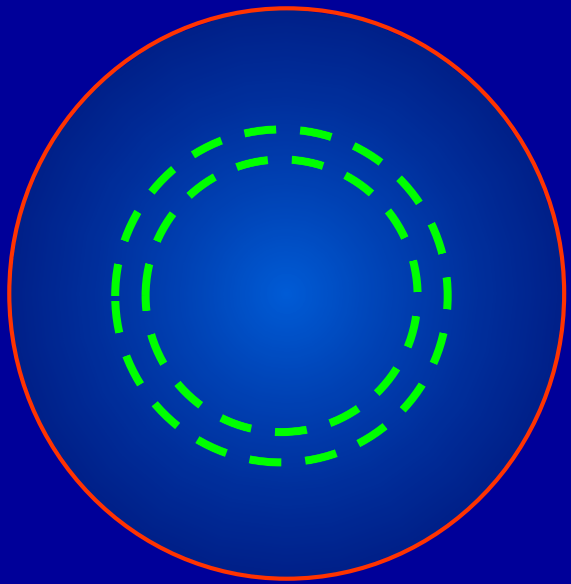
$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{e}_r \qquad \vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{e}_r$$

◆ 电荷**体**密度 ρ $\qquad \boxed{\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V}$

$$\boxed{\vec{E} = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho \mathrm{d}V}{r^2}\vec{e}_r}$$



一带电球体，体密度为 ρ



$$\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V$$

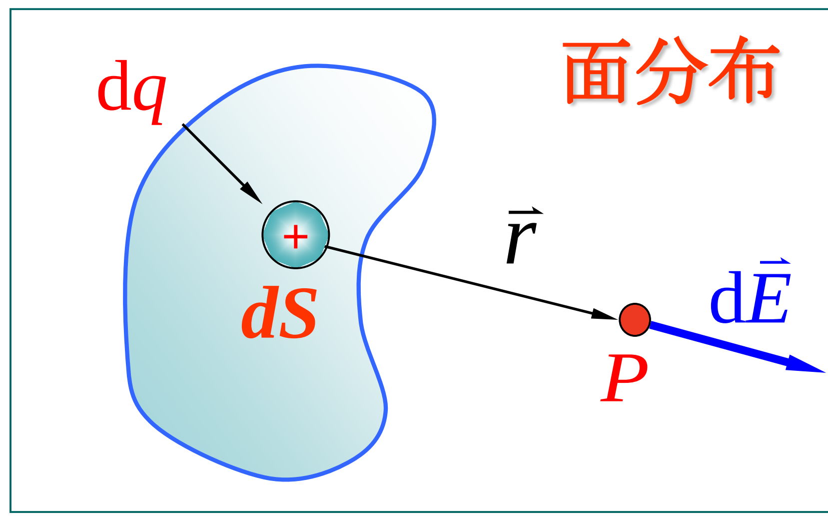
$$\mathrm{d}V = 4\pi r^2 dr$$

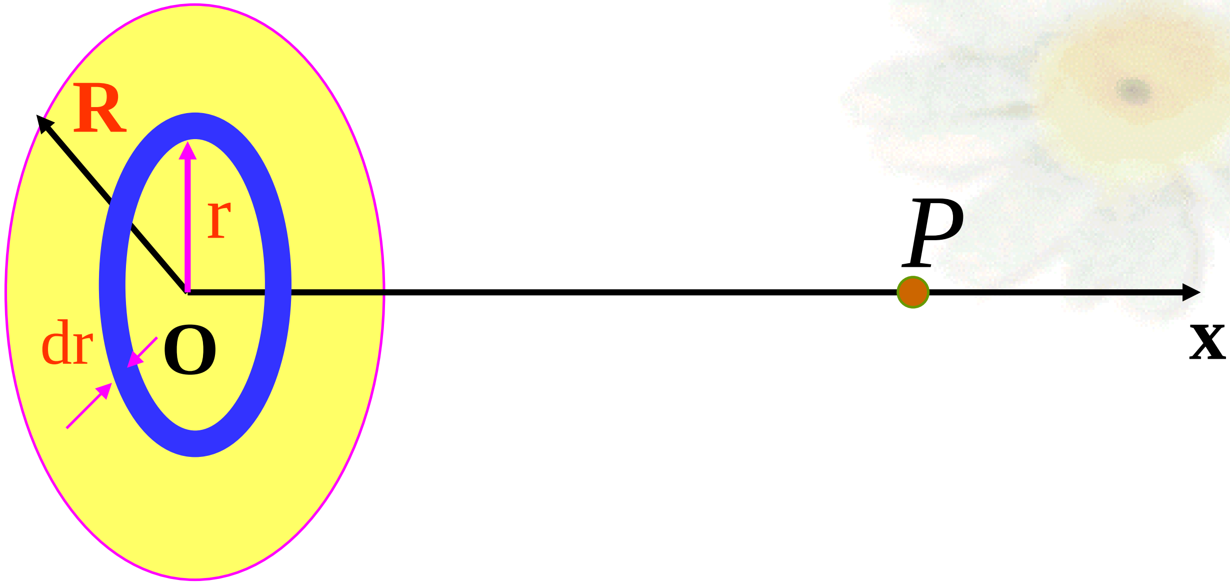
◆ 电荷连续分布的电场

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{e}_r \qquad \vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{e}_r$$

电荷**面**密度 σ $\boxed{\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}S}$

$$\boxed{\vec{E} = \int_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma \mathrm{d}S}{r^2}\vec{e}_r}$$





$$\boxed{\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}S}$$

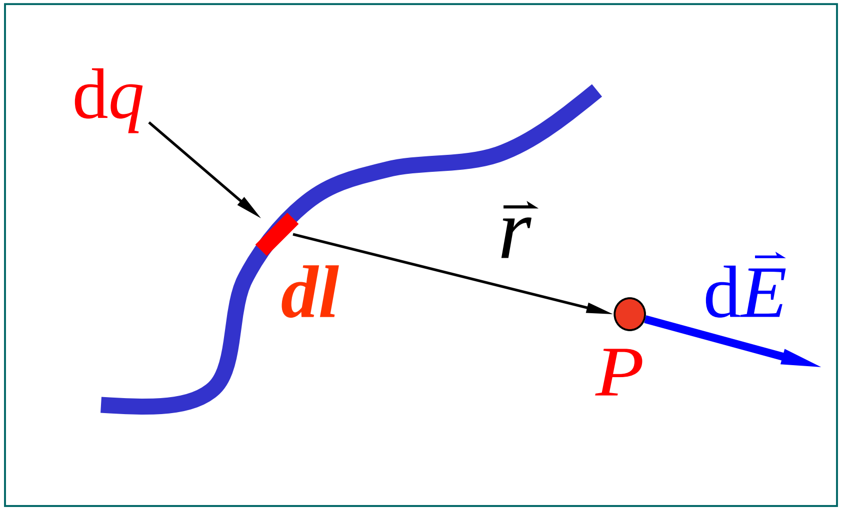
$$\boxed{\mathrm{d}S = 2\pi r dr}$$

◆ 电荷连续分布的电场

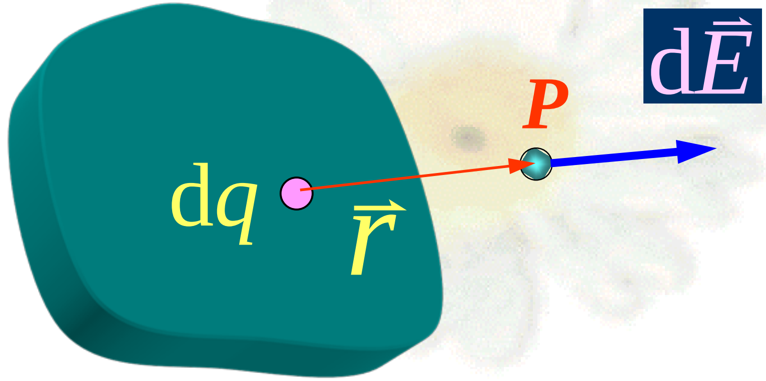
$$\mathrm{d}\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{e}_r \qquad \vec{E}=\int \mathrm{d}\vec{E}=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{e}_r$$

电荷**线**密度 λ $\boxed{\mathrm{d}q=\lambda \mathrm{d}l}$

$$\boxed{\vec{E}=\int_l\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}l}{r^2}\vec{e}_r}$$



◆连续分布带电体电场的计算具体步骤:



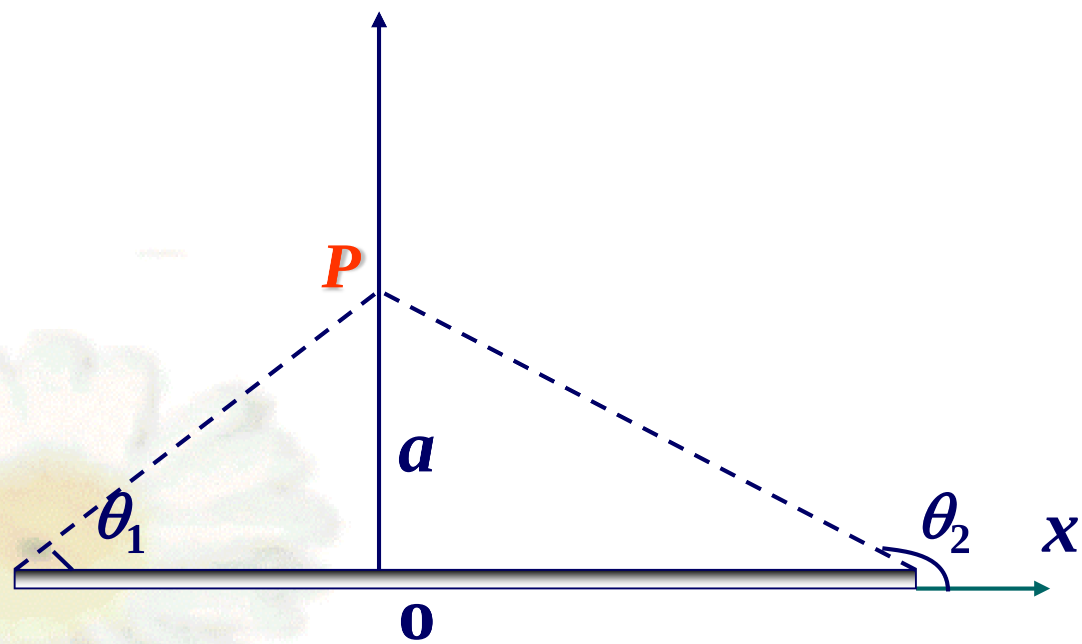
- 任取电荷元**dq**，写出**dq**在待求点的场强的表达式 $dE = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$；

- 选取适当的坐标系，将场强的表达式分解为标量式 dE_x, dE_y

- 进行分量积分计算, $E_x = \int dE_x$, $E_y = \int dE_y$

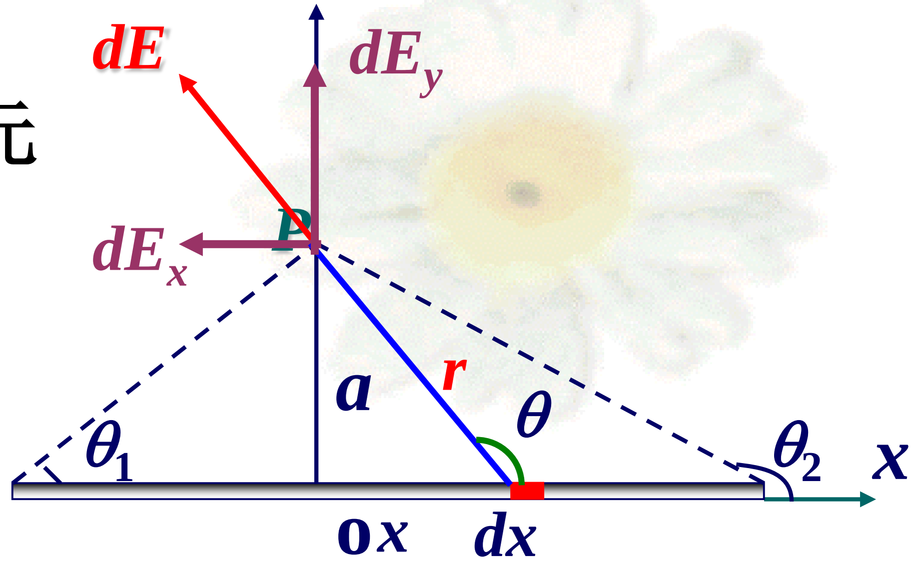
- 写出总的电场强度的矢量表达式 $\boxed{\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j}}$

例1 真空中一均匀**带电直线**，**电荷线**密度为 λ。**线**外有一点 P，离开直线的垂直距离为 a，P 点和直线两端连线的夹角分别为 θ_1 和 θ_2。求 P 点的**场强**。



解：

距离原点为 X 处选择一电荷元



电荷元电量 $dq = \lambda dx$

电荷元的场强

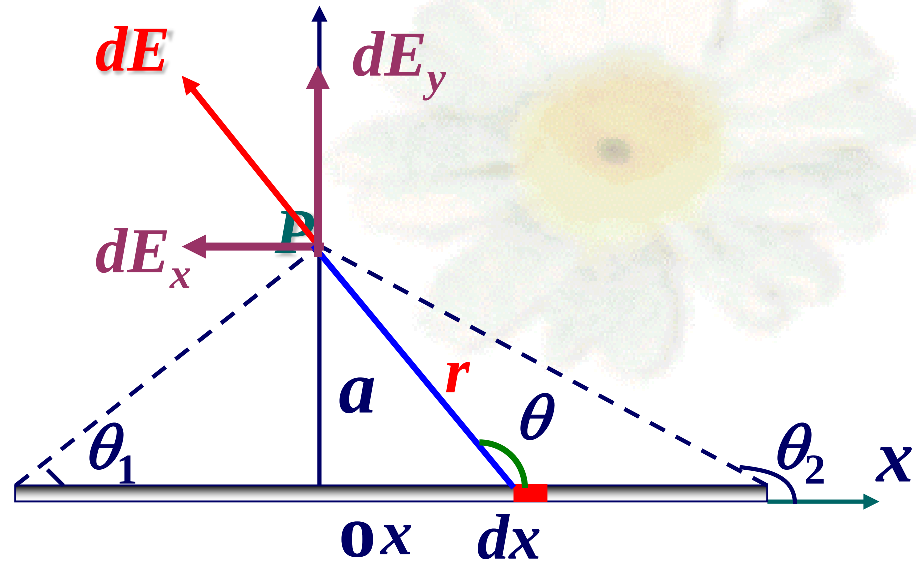
$$\boxed{dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda\, dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

$$dE_x = -dE\cos(\pi-\theta) = \frac{\lambda\, dx\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$dE_y = dE\sin(\pi-\theta) = \frac{\lambda\, dx\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$dE_x = \frac{\lambda\, dx \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$dE_y = \frac{\lambda\, dx \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



由图上的几何关系

$$r = a\csc\theta$$

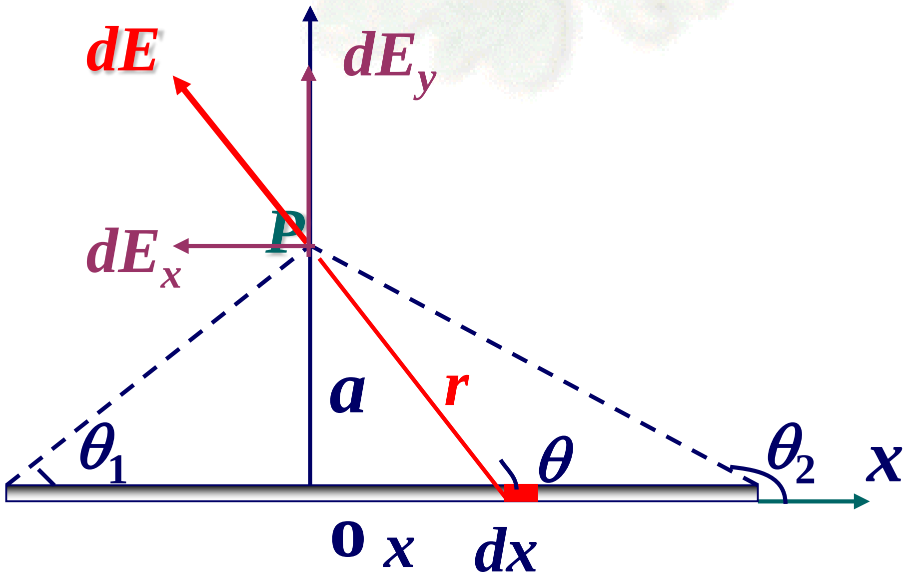
$$x = -a\cot\theta \qquad dx = a\csc^2\theta\, d\theta$$

$$\boxed{\therefore dE_x = \frac{\lambda\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 a} d\theta\,, \qquad dE_y = \frac{\lambda\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 a} d\theta}$$

$$\boxed{dE_x = \frac{\lambda \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 a} d\theta \,, \qquad dE_y = \frac{\lambda \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 a} d\theta}$$

$$\therefore E_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} \cos\theta d\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} \left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1 \right)$$

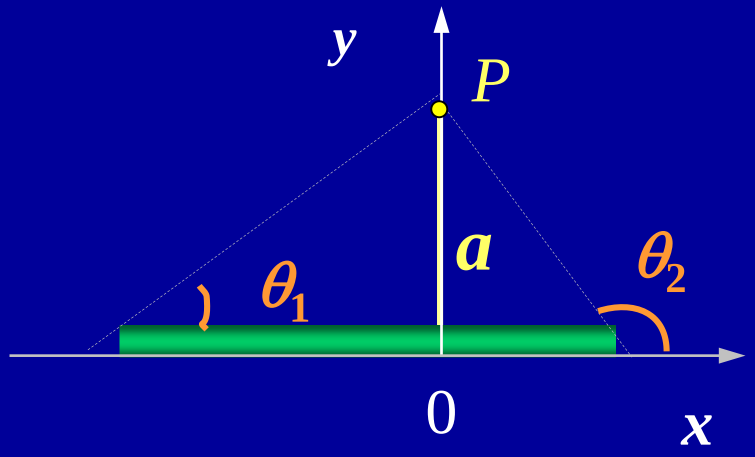


$$\therefore E_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} \left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2 \right)$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

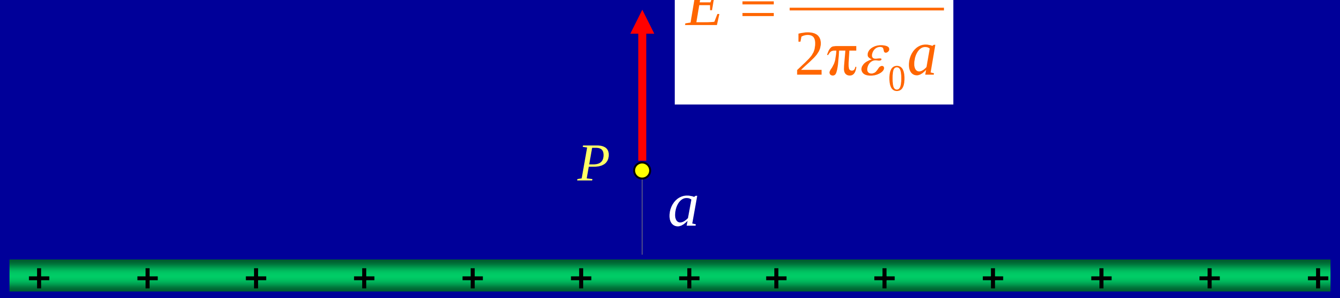
$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$



讨论 无限长带电直线

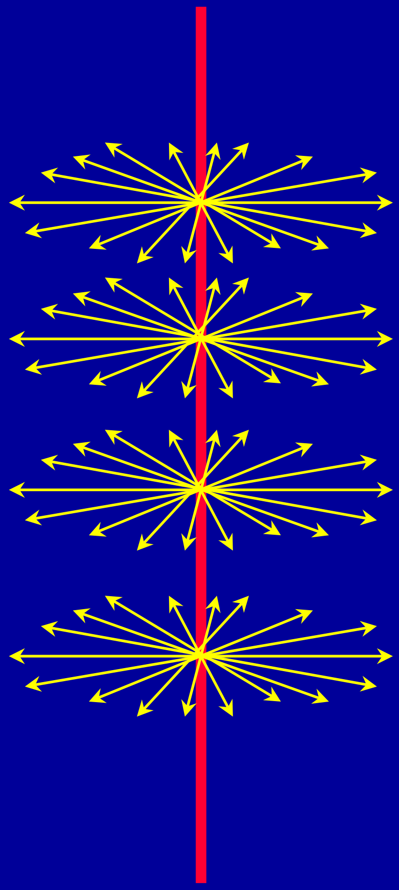
$$\left.\begin{array}{l}\theta_1 = 0 \\ \theta_2 = \pi\end{array}\right\} \Rightarrow E_x = 0 \quad E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}}$$



无限长均匀带电直线的场强

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

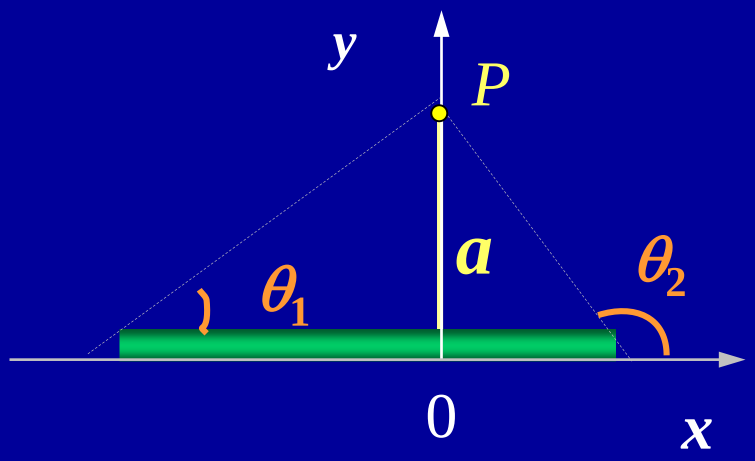


当 $\lambda > 0,\ E_y > 0,\ \vec{E}$ 方向垂直带电直线向外，

当 $\boldsymbol{\lambda < 0,\ E_y < 0,\ \vec{E}}$ 方向垂直带电直线向里。

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

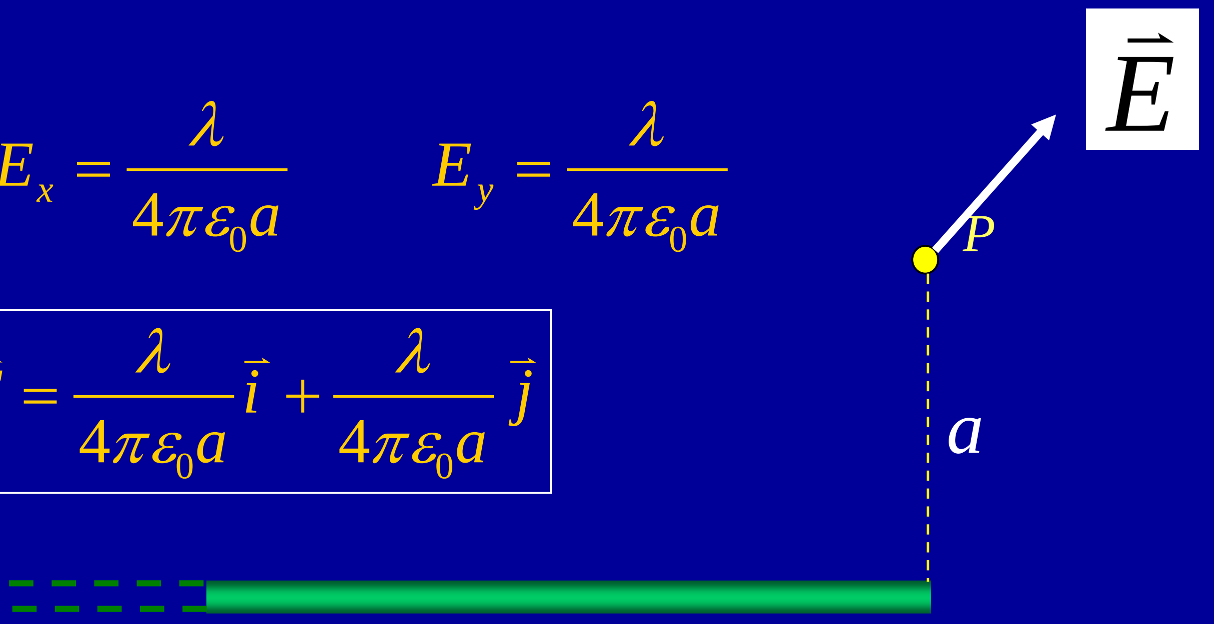
$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$



讨论 半无限长带电直线

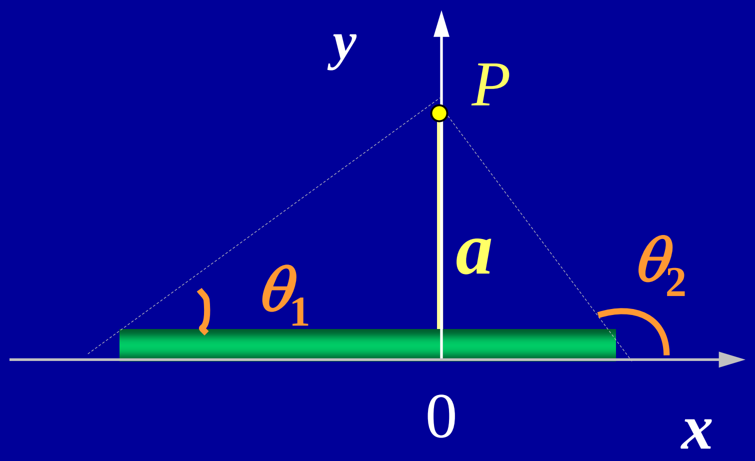
$$\left.\begin{aligned}\theta_1 &= 0\\ \theta_2 &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} \qquad E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\vec{i} + \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\vec{j}}$$



$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$



讨论 半无限长带电直线

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}$$

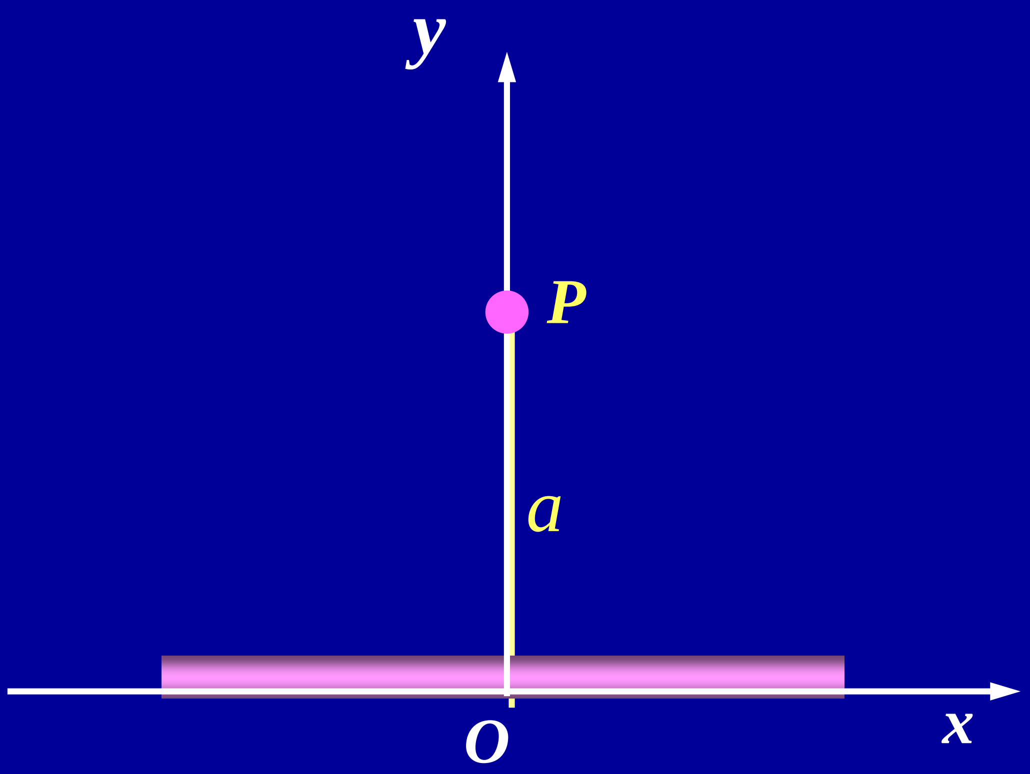
$$\theta_2 = \pi$$

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\vec{i} + \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\vec{j}}$$

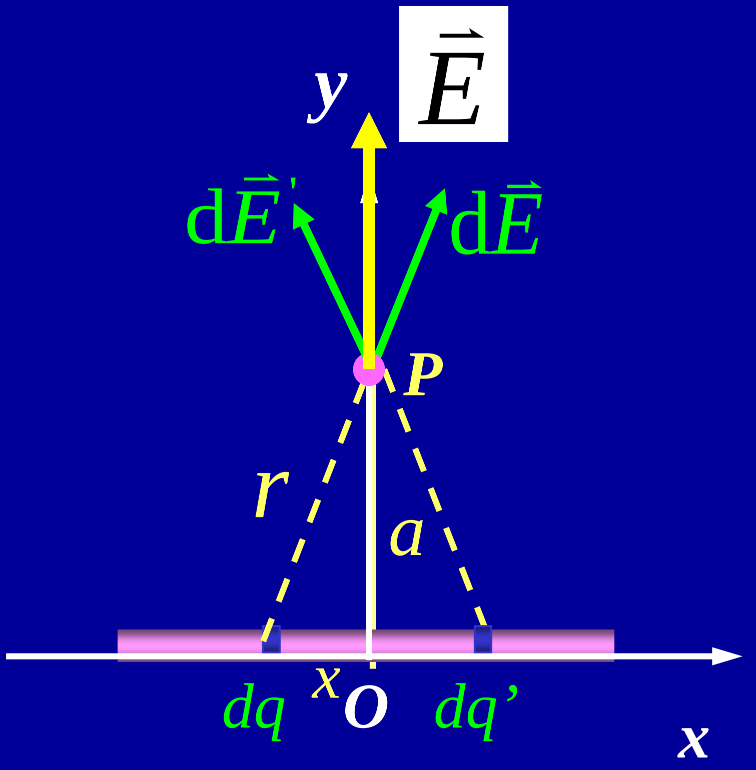
教材21页：例2



电荷元分布
关于y轴对称

$$\boxed{E_x = \int \mathrm{d}E_x = 0}$$

$$\therefore E = E_y = \int \mathrm{d}E_y$$



$$\boxed{dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda\, dx}{4\pi\varepsilon_0 (a^2 + x^2)}}$$

$$\boxed{dE_y = dE\cos\theta = \frac{\lambda\cos\theta dx}{4\pi\varepsilon_0 (a^2 + x^2)}}$$

$$\boxed{E_y = \int dE\cos\theta = \int \frac{\lambda\cos\theta dx}{4\pi\varepsilon_0 (a^2 + x^2)}}$$

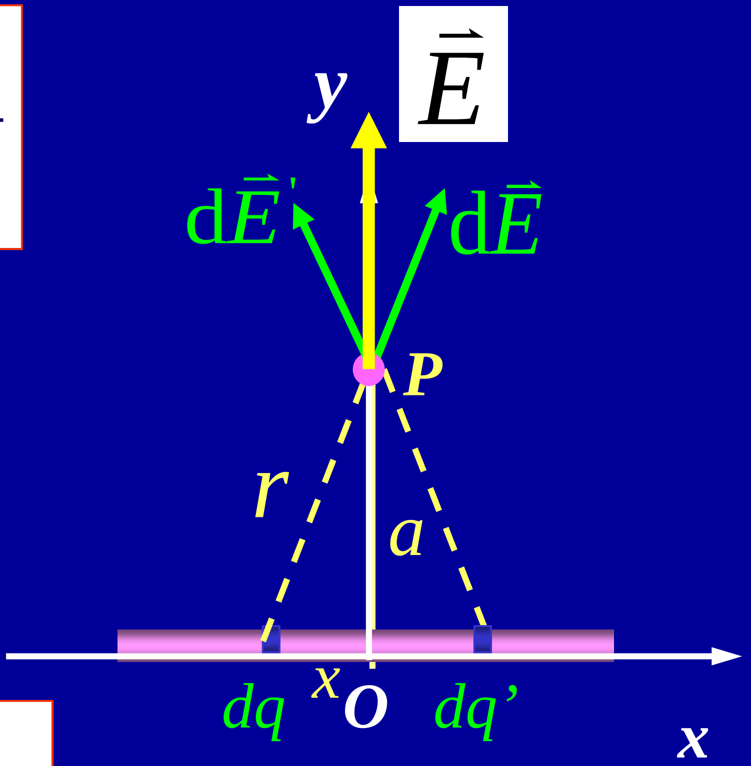
$$E_y = \int dE\cos\theta = \int \frac{\lambda\cos\theta dx}{4\pi\varepsilon_0(a^2+x^2)}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\therefore E_y = \int dE\cos\theta$$

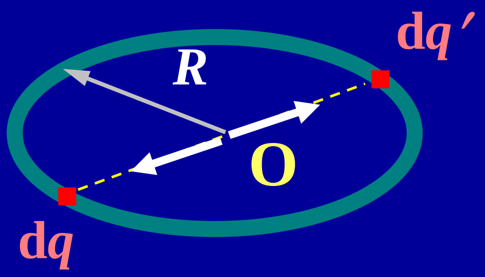
$$= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0(a^2+x^2)} \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} dx$$

$$= \frac{\lambda l}{2\pi\varepsilon_0 a(4a^2+l^2)^{\frac{1}{2}}}$$



例3　半径为R 的均匀带电细圆环，带电量为q

求　圆环中心O 的电场强度



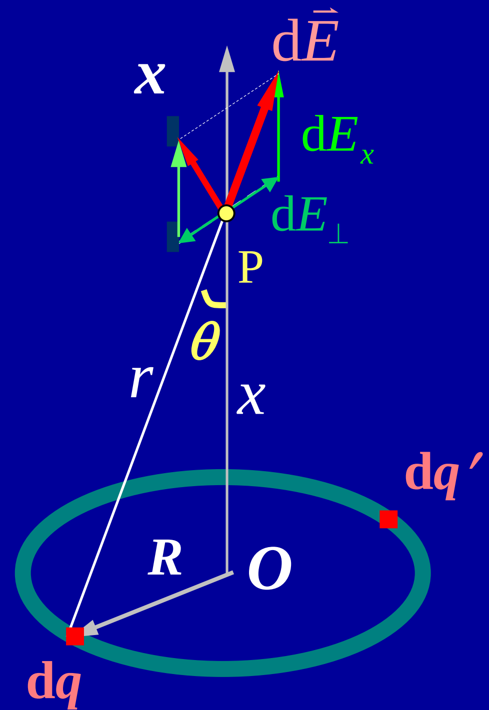
由于圆环上电荷分布关于圆环中心对称

$$\vec{E}_0 = 0$$

例3 半径为R 的均匀带电细圆环，带电量为q

求 圆环轴线上任一点P 的电场强度

解



由于圆环上电荷分布关于x 轴对称

则有：

$$\boxed{E_\perp = 0}$$

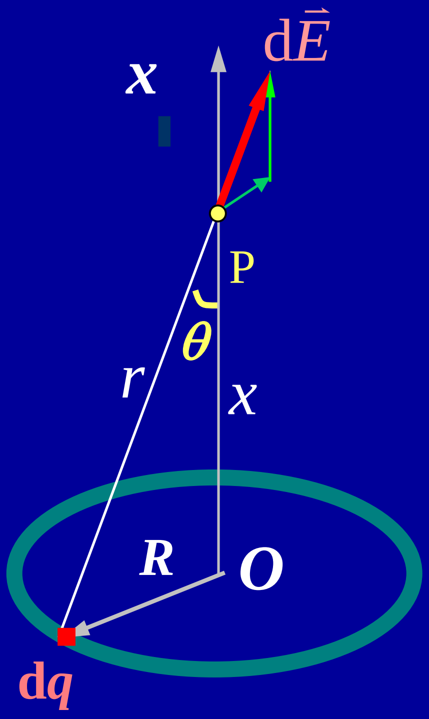
故：圆环轴线上任一点P 的电场强度

$$\boxed{E = E_x = \int \mathrm{d}E_x}$$

$\mathrm{d}q$

$$\mathrm{d}E \Rightarrow \mathrm{d}E_x$$

$$E = E_x = \int \mathrm{d}E_x$$



解

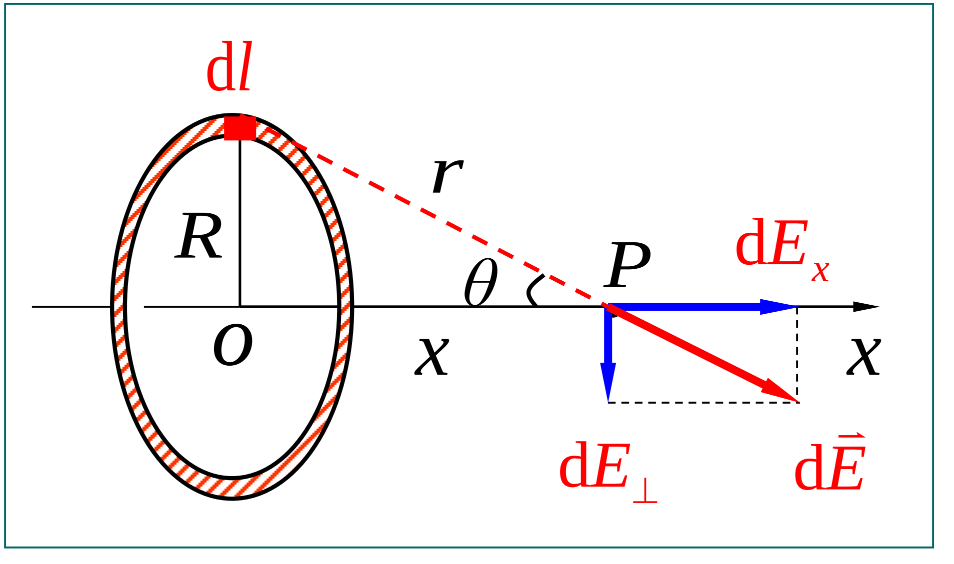
$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l \qquad \mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}l}{r^2}$$

$$\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}l}{r^2}\cdot\frac{x}{r}$$

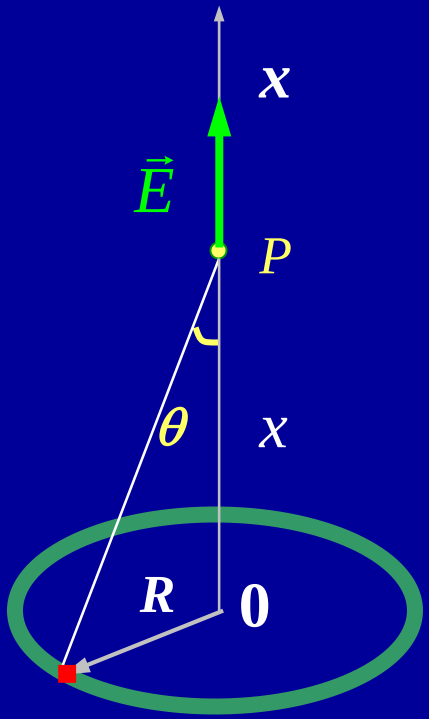
$$E = \int_l \mathrm{d}E_x = \int \frac{\lambda \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{x}{r} = \frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l$$

$$\lambda = \frac{q}{2\pi R}$$

$$\boxed{E = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}}$$



$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$



讨论

(1) 当 $x = 0$时，即在圆环中心处

$$E = 0$$

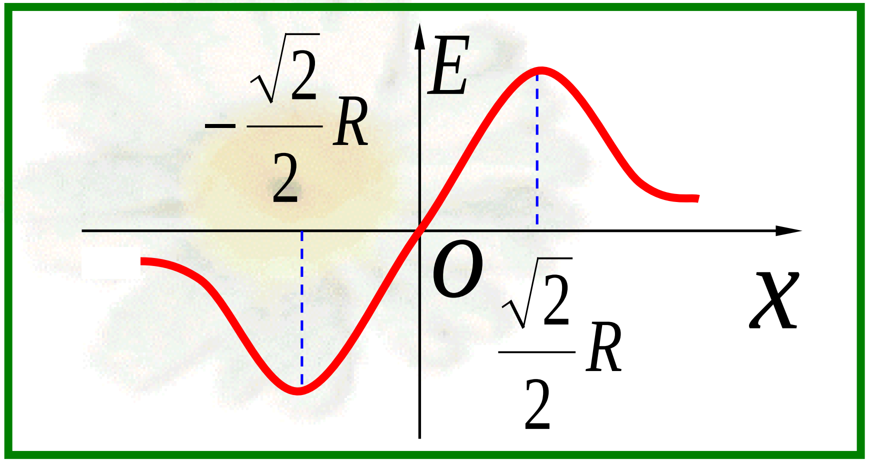
(2) 若 $x >> R$，则 $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{x^2}$

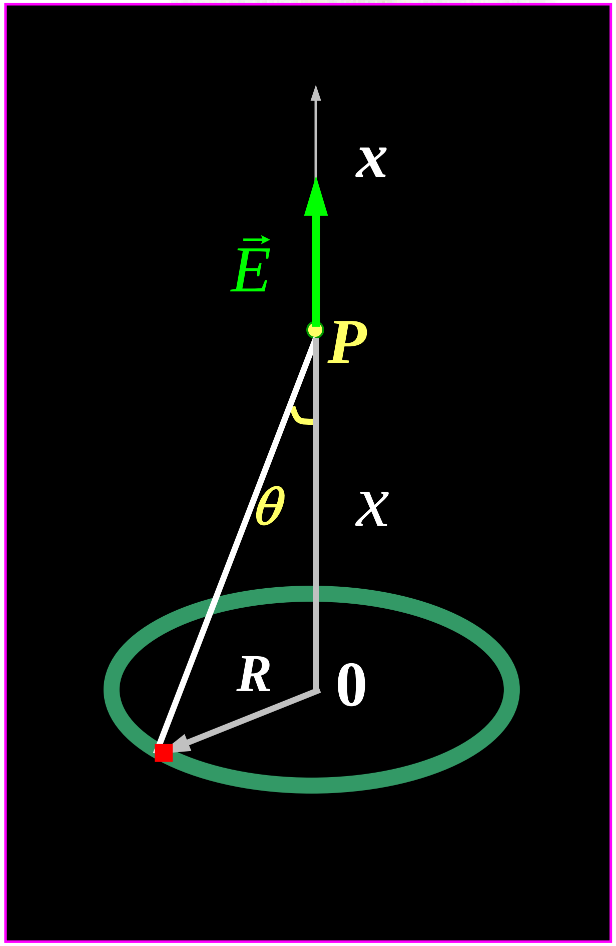
可以把带电圆环视为一个点电荷

（3）$\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}=0,\quad x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}R$

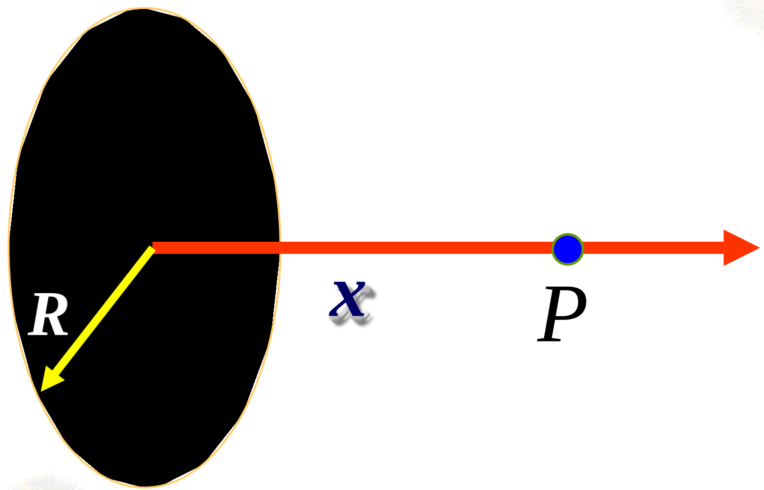
$$\boxed{\vec{E}=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}\vec{i}=\vec{E}(x)}$$

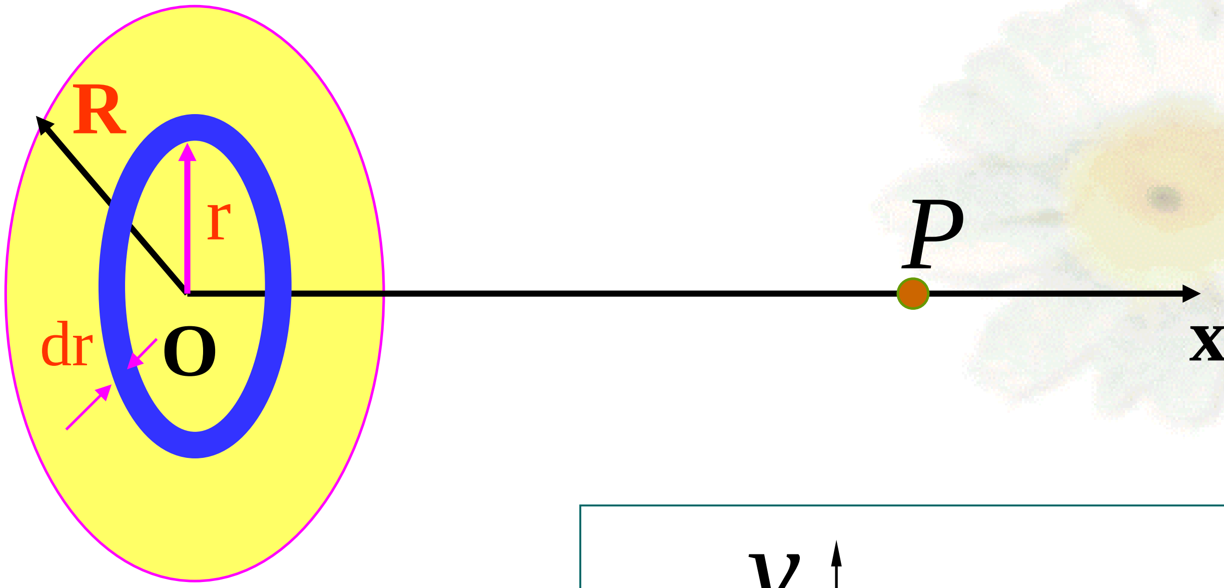
$$E=E_{\max}=\frac{\dfrac{a}{\sqrt{2}}q}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2+\dfrac{a^2}{2}\right)^{3/2}}$$



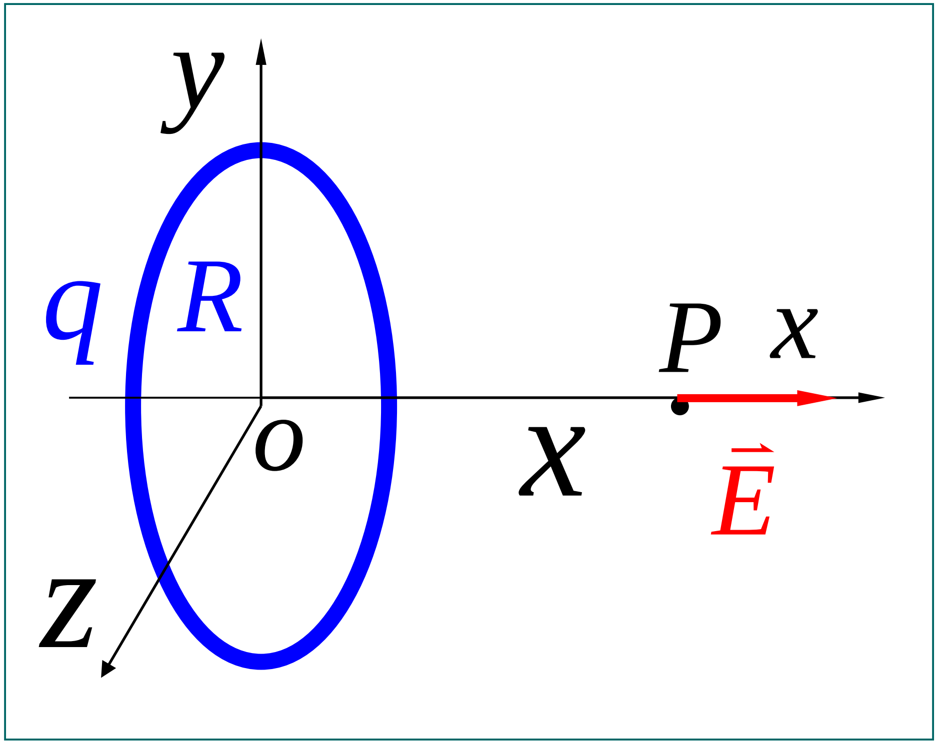


例4 均匀**带电圆**板，半径**为** R ，**电**荷面密度**为** σ 。求**轴线**上任一点 P 的**电场强**度。





$$E=\frac{qx}{4\pi\,\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$



例 薄圆板的面密度为σ

求 在轴线上任一点的电场强度

解 细圆环电量$\mathrm{d}q = 2\pi r\mathrm{d}r\cdot\sigma$

细圆环在P点的电场强度

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\mathrm{d}q}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{x\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

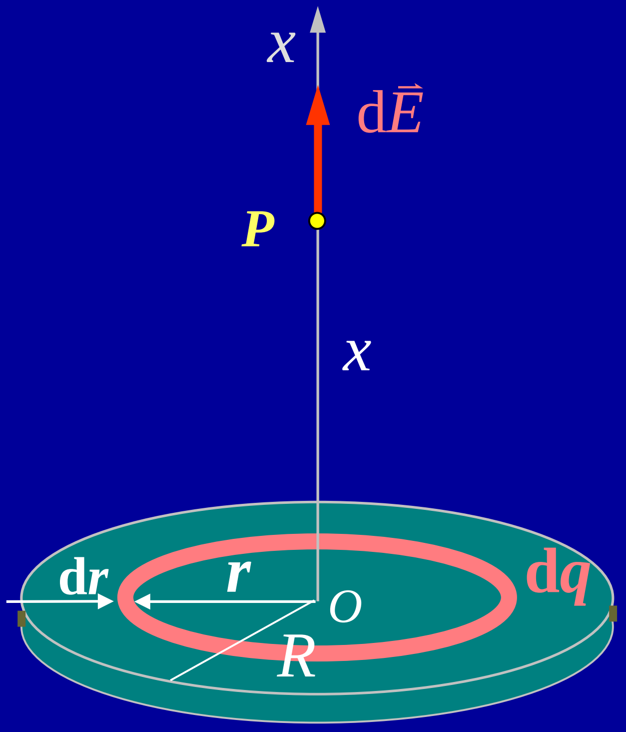
圆板在 P 点的电场强度

$$E = \int \mathrm{d}E \quad = \frac{x\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right]$$

细圆环在P点的电场强度

$$\boxed{\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\mathrm{d}q}{(r^2+x^2)^{3/2}}}$$



讨论

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$$

（1） $R\to\infty,\quad E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

(2). 当$R>>x$

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)}$$

(3). 当$R<<x$

$$\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}=\left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{x}\right)^2+\cdots\cdots$$

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)=\left[\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-1+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{x}\right)^2-\cdots\cdots\right]$$

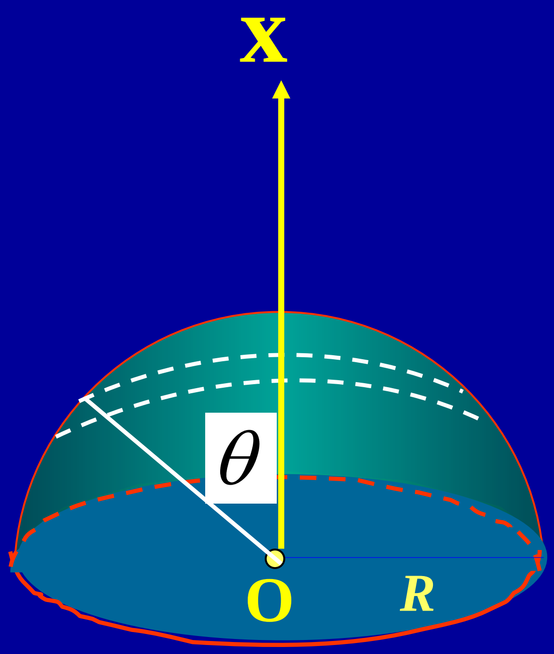
$$\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

$$\vec{E}_O = ?$$

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\mathrm{d}q}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

$$dq = 2\pi r dr\sigma = 2\pi R\sin\theta R d\theta\sigma$$

$$x = R\cos\theta$$



$$\mathrm{d}E = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

§1-3 电场　电场强度

电 荷 ⇄ 电 场 ⇄ 电 荷

● 给电场中的电荷施以力的作用

电场具有“力”的性质 $\xrightarrow{\text{引入}}$ 电场强度

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

若已知电荷分布，则空间各点的场强可以求出。

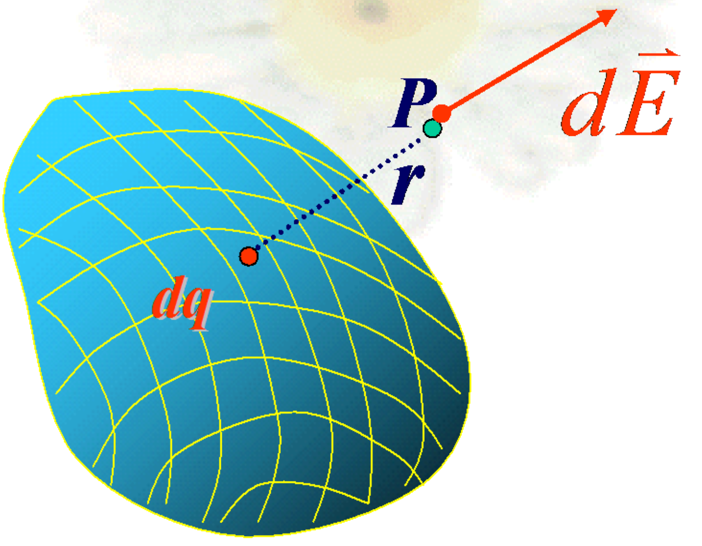
方法：

任选dq

求出d**E**

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

$$\vec{E} = \int d\vec{E}$$



问题：

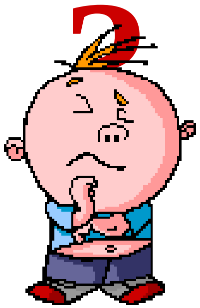
如何形象化地把客观存在的静电场中的场强分布描绘出来？

四、（静电场）电场线

定义

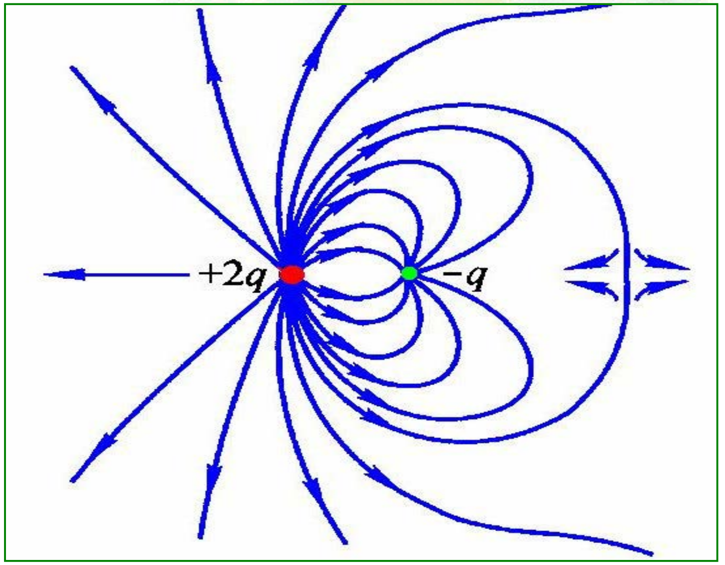
规 定

特性



四、电场线

◆**为**了形象化地把客**观**存在的**电场**表示出来，引入**电场线这**一**辅**助工具。



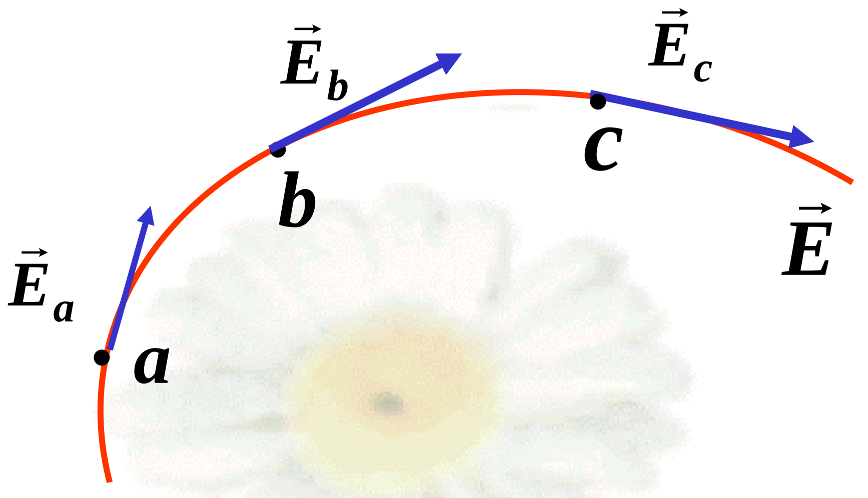
1、定 义

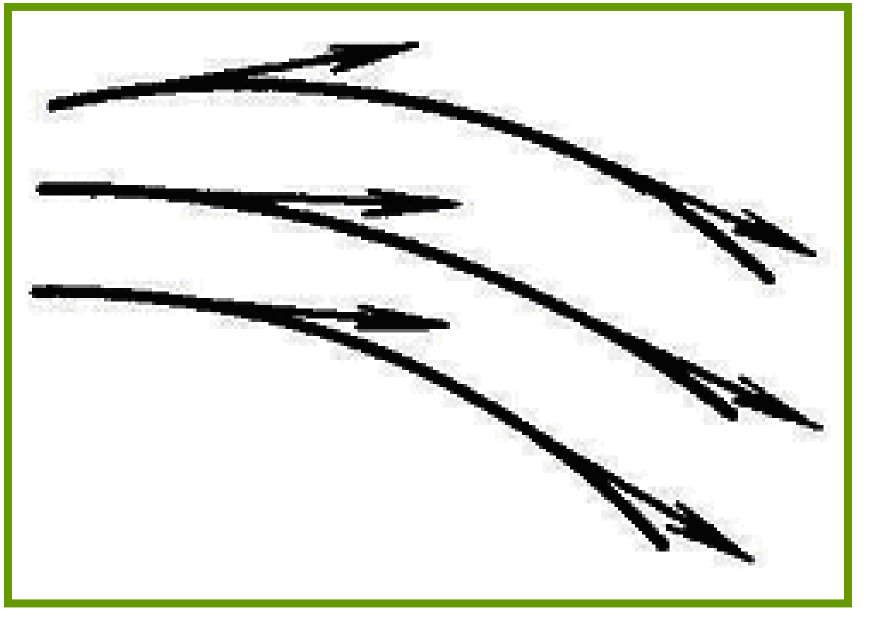
电场线是**为**了形象描绘电场中的场强分布

而引入的假想曲线

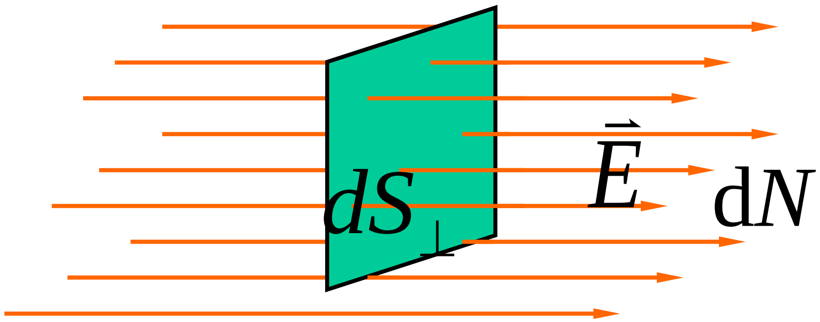
2. 规 定

1）**电场线**上每一点**切线**方向**为该**点的**场强方向**





2） 通过垂直于电场方向单位面积电场线条数为该点电场强度的大小。

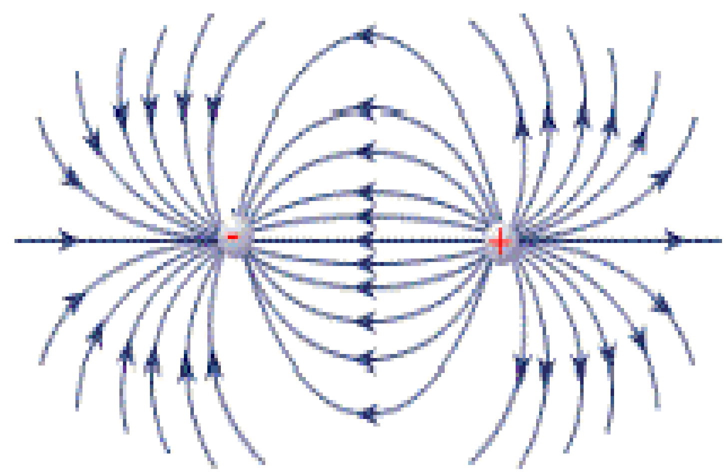


$$E = \frac{dN}{dS_\perp}$$

即：电场中某点的电场强度大小等于该点的电场线数密度

电场线密集，场强大

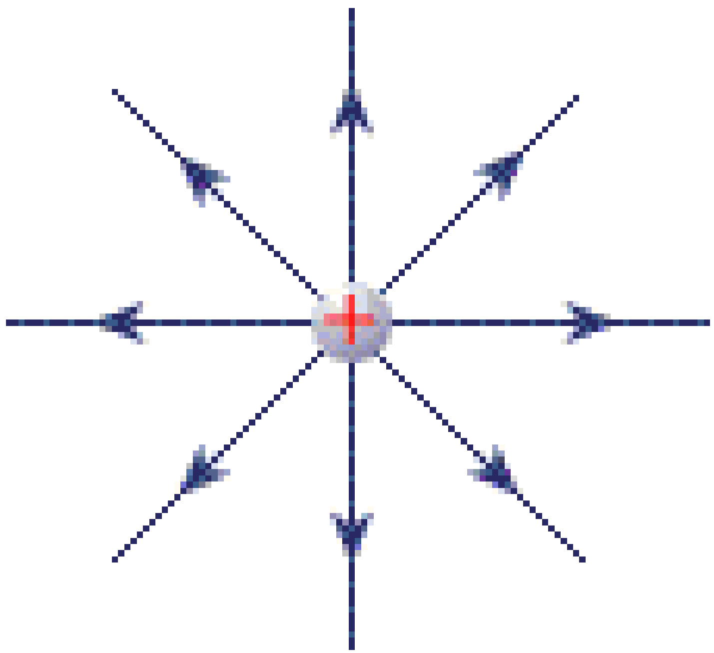
电场线稀疏，场强小



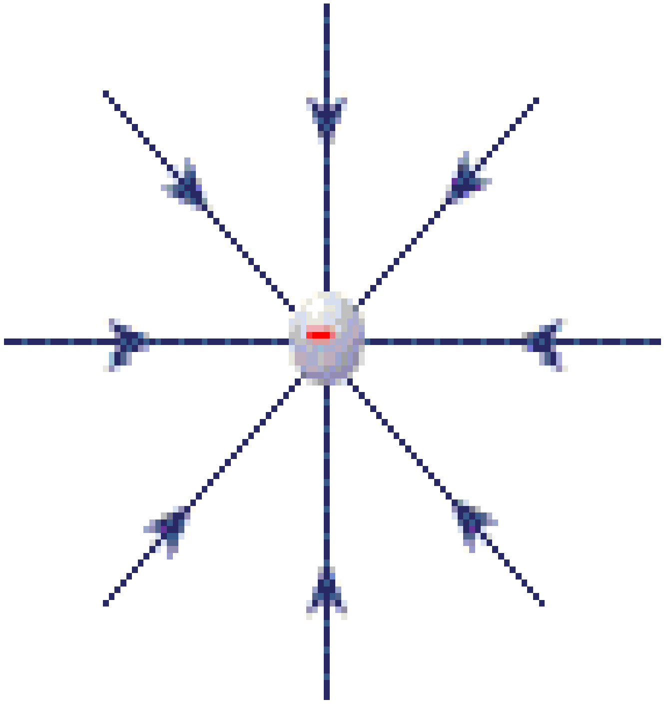
等量异种电荷的电场。

3. 几种常见电场线

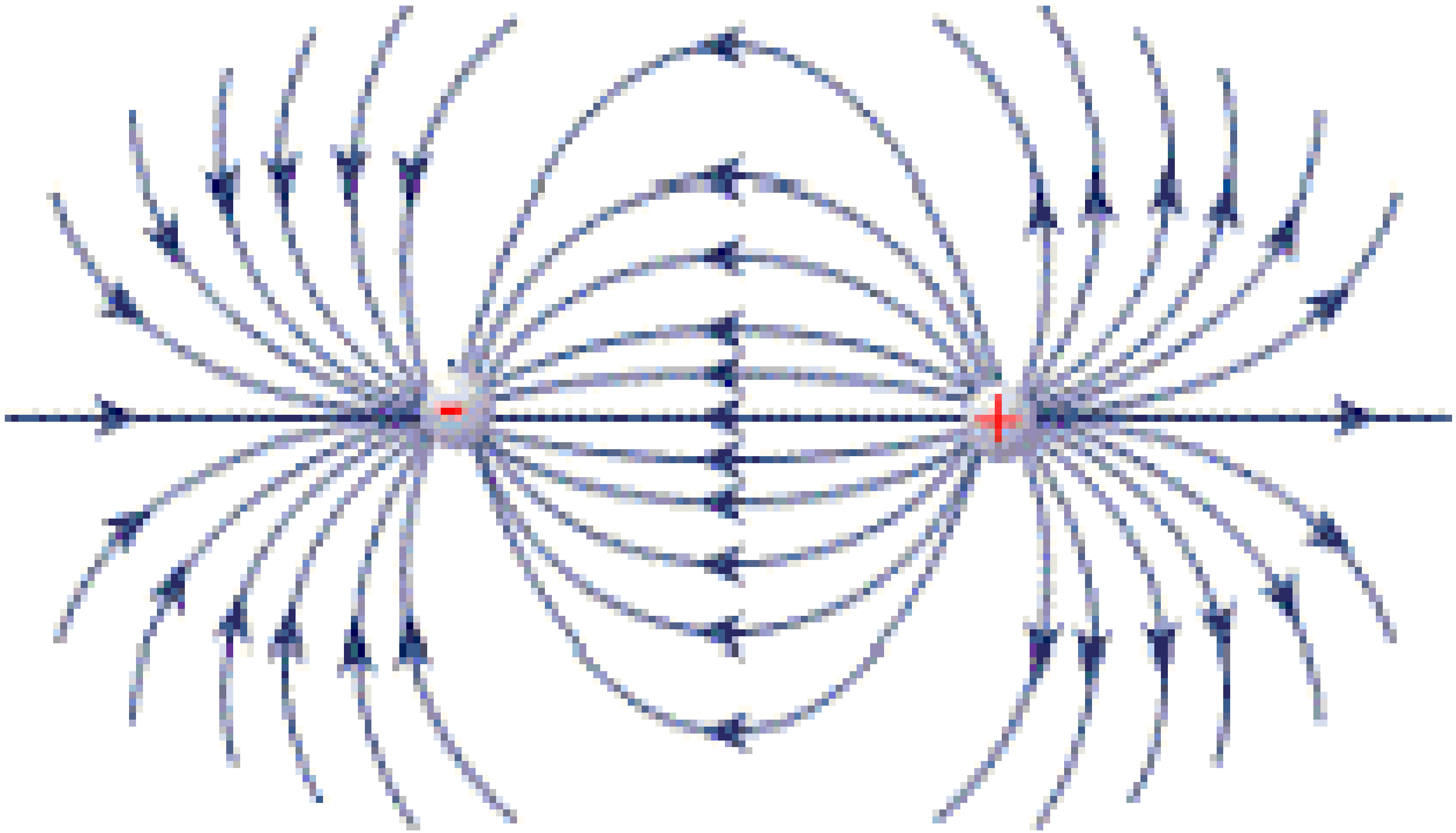
4. 特性



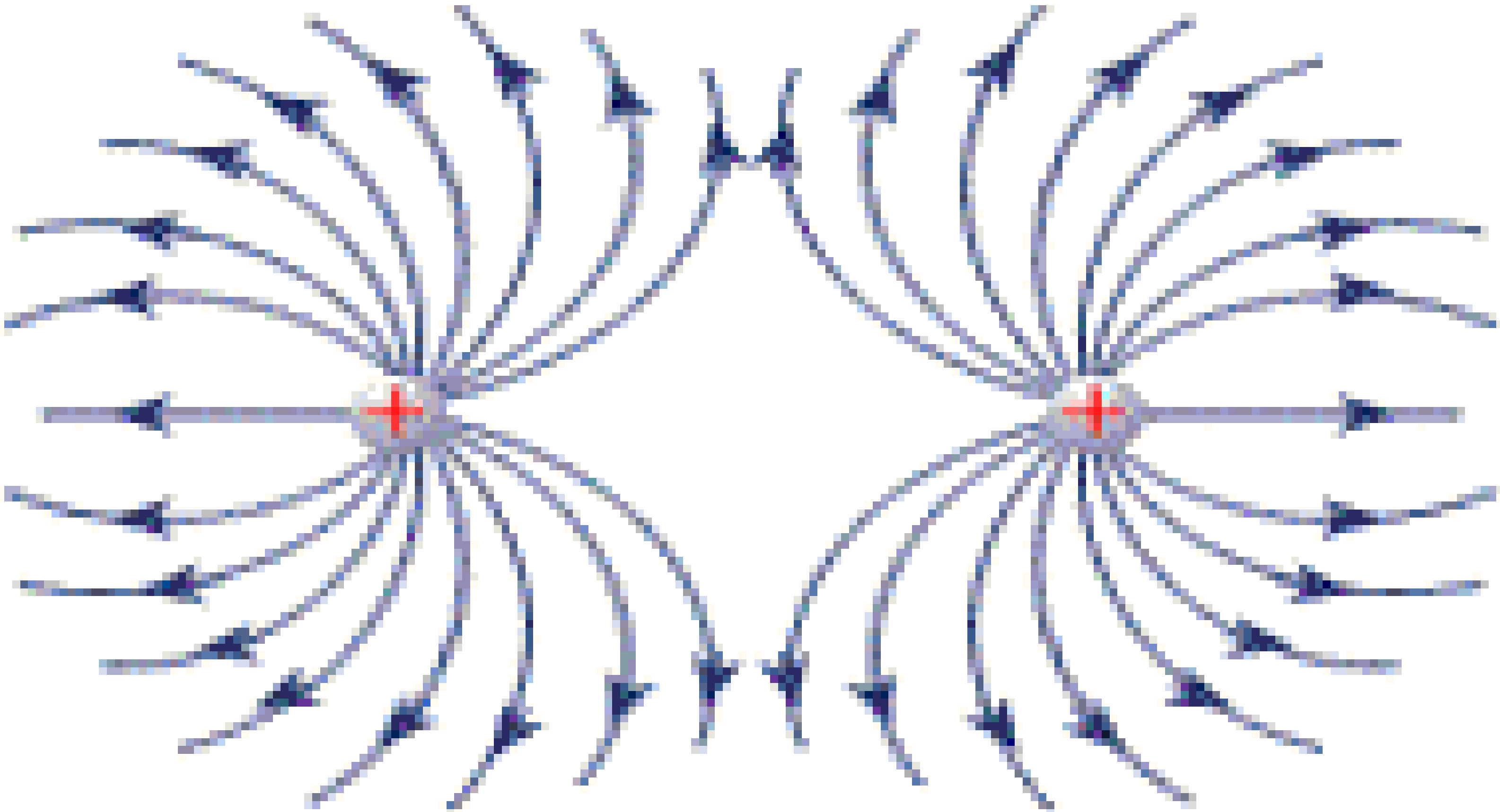
孤立正点电荷的电场。



孤立负点电荷的电场。

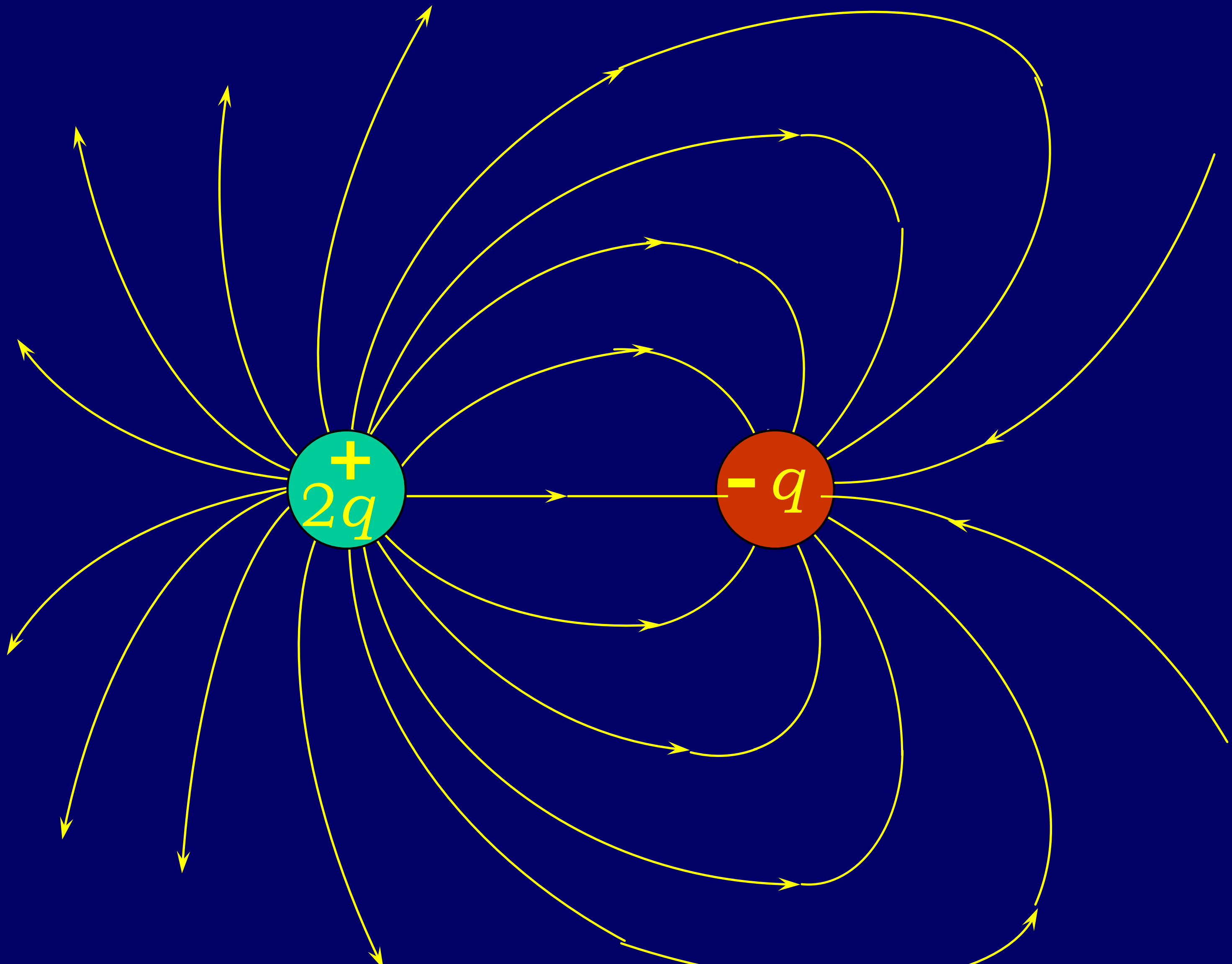


等量异种电荷的电场。

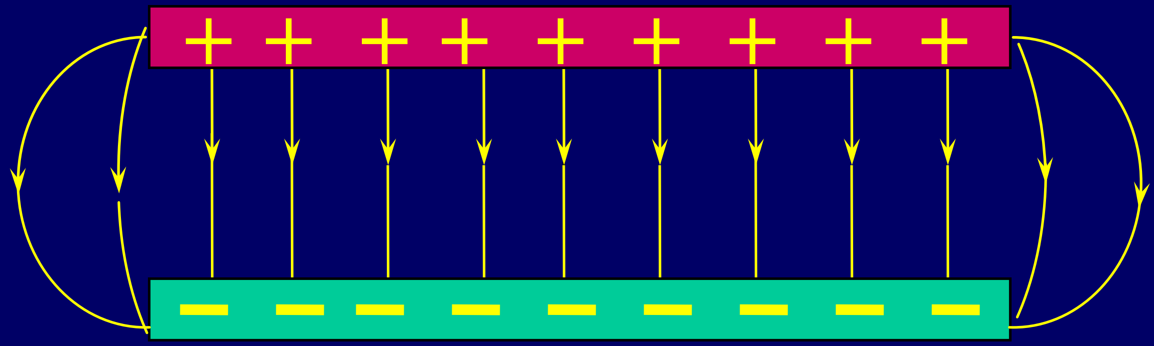


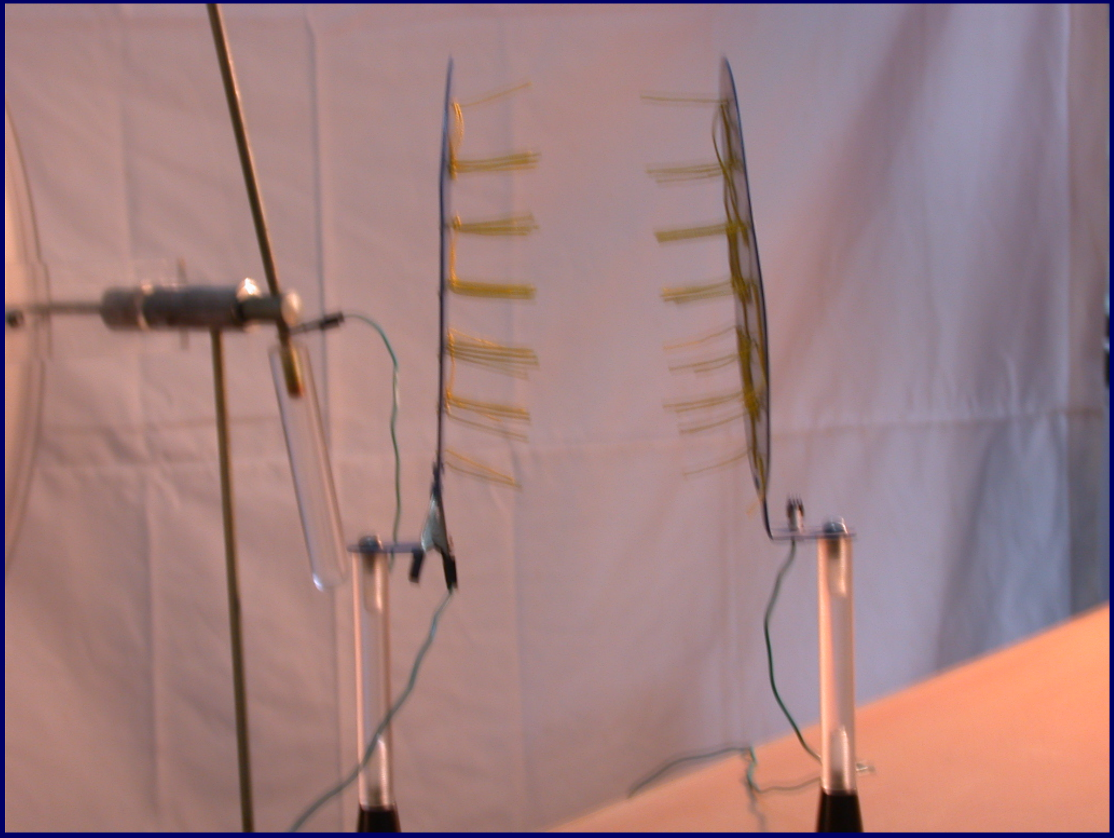
等量同种电荷的电场。

一对异号不等量点电荷的电场线



带电平行板电容器的电场线



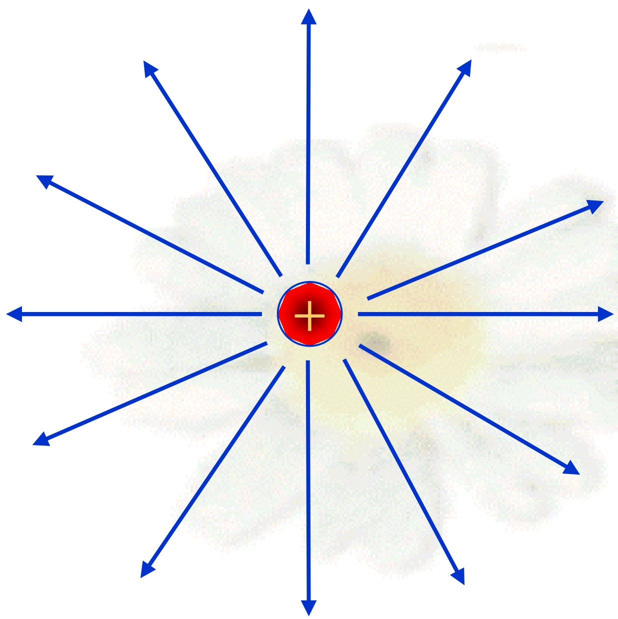


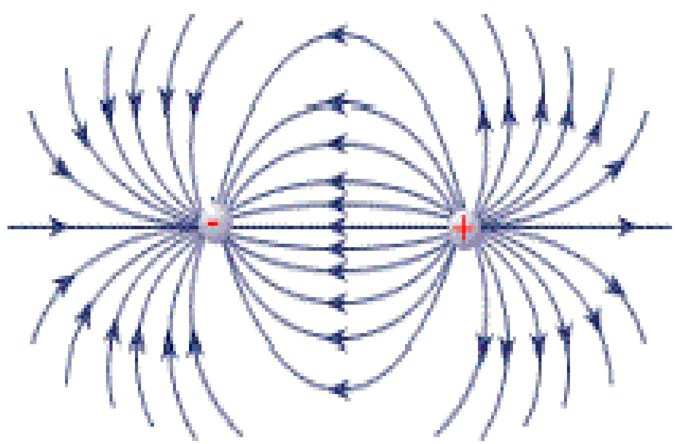
4. 特性

1） **电场线**始于正**电**荷, 止于**负电**荷或来自无**穷远**, 去向无**穷远**

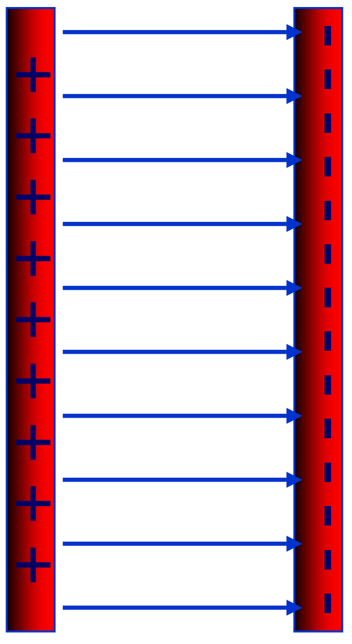
2） 静**电场电场线**是非**闭**合曲**线**.

3） 任意两条**电场线**不会相交.





等量异种电荷的电场.



§1-4 高斯定理

◆高斯定理反映通**过任意闭合曲面的电通量**所遵循的基本**规律**

研究**思路**：

电通量 $\xrightarrow{\text{类比}}$ **磁通量**

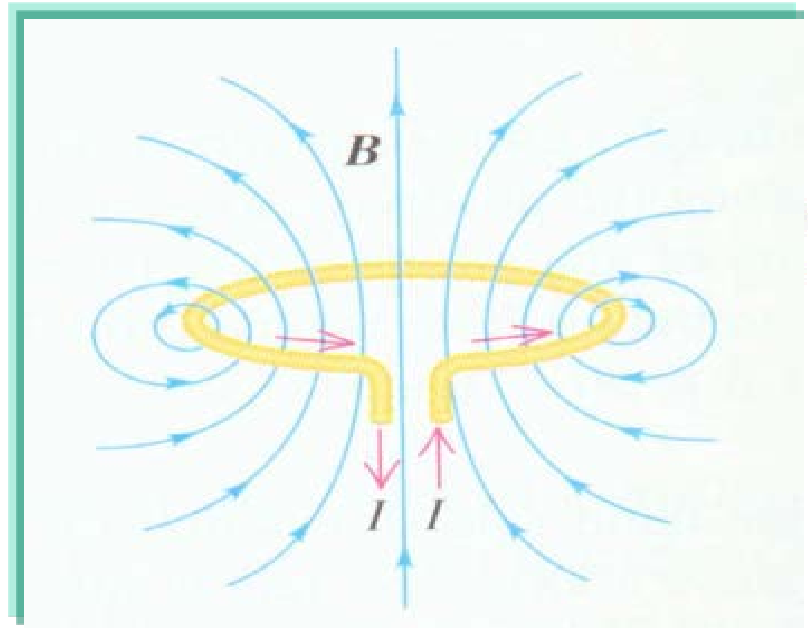
↓

高斯定理

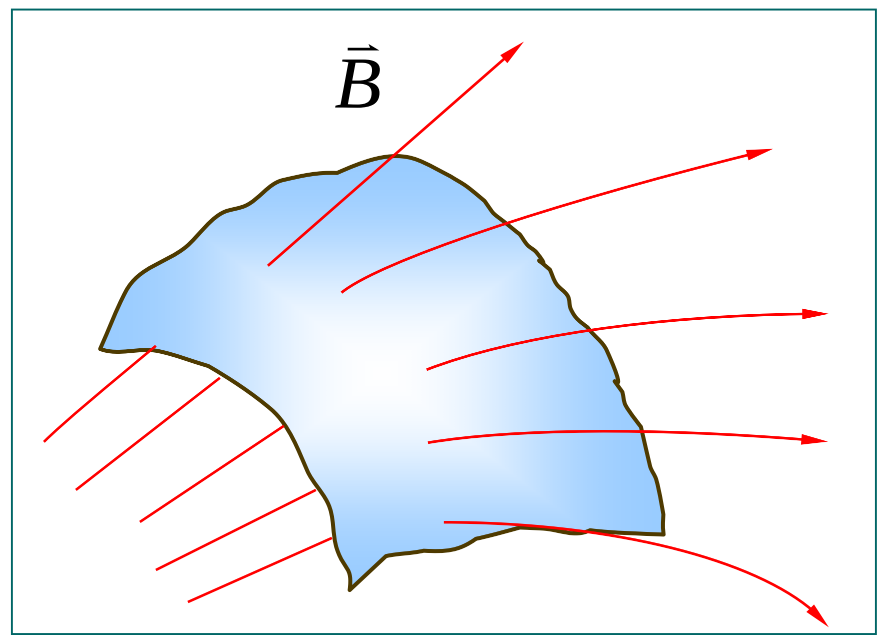
一、电通量

1、定义

回顾中学磁通量的定义



通过磁场中任意曲面的磁感应线的数目，称为通过该曲面的磁通量，用Φ_m表示。



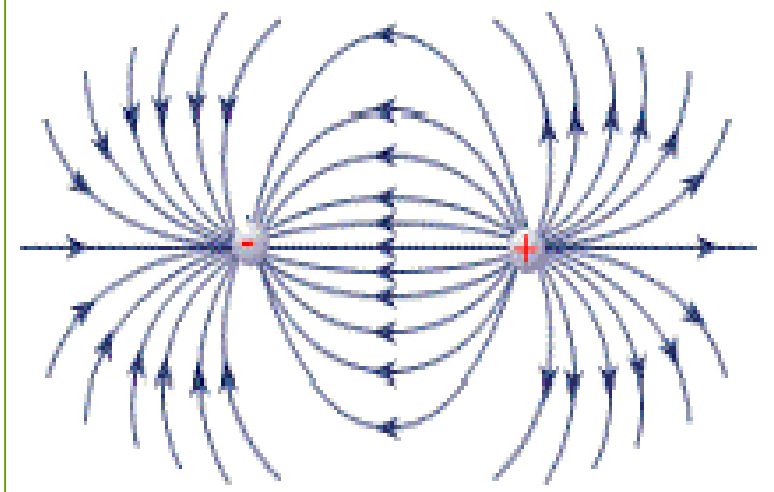
一、电通量

1、定义

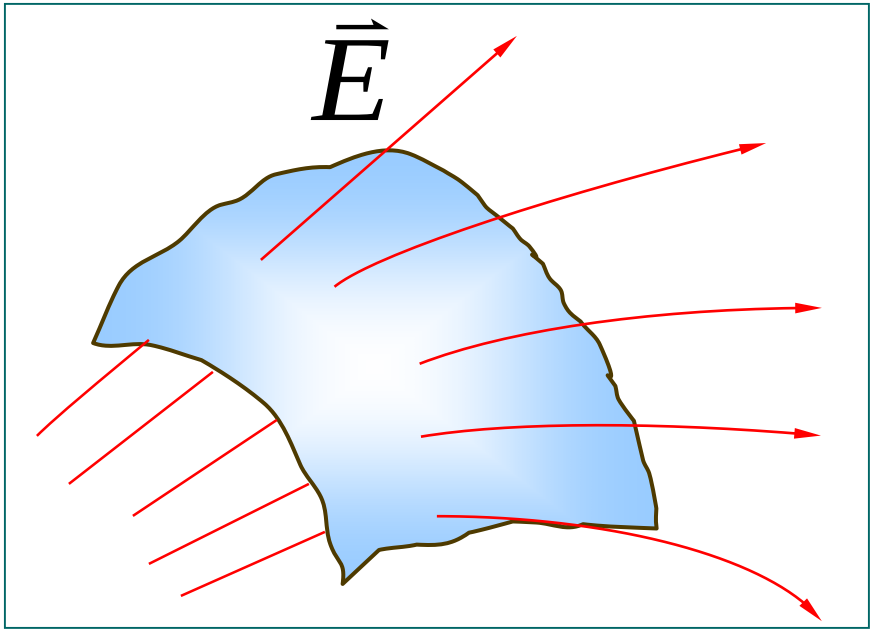
通过电场中任意曲面的电场线的数目，称为通过该曲面的电通量，用Φ_e表示。

$\phi_e = ?$

ϕ_e该如何计算



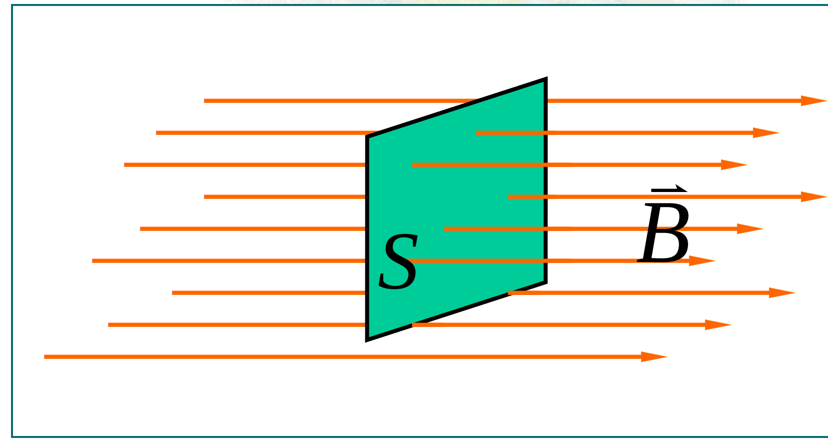
等量异种电荷的电场。



一、电通量

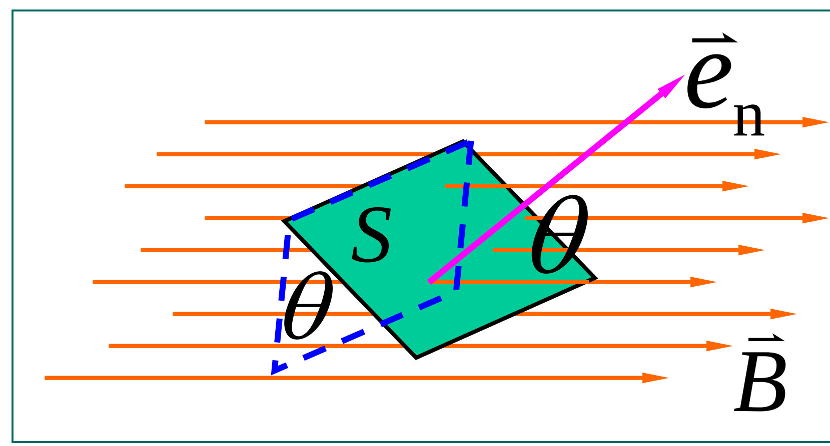
2、计算

回顾中学磁通量的计算



◆ 均匀磁场，$\vec{B}$垂直平面

$$\Phi_{\mathrm{m}} = BS$$

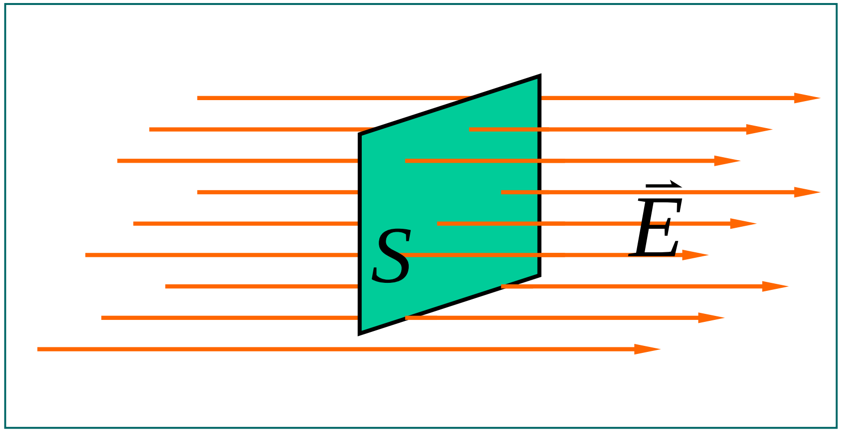


◆ 均匀电场，$\vec{B}$与平面夹角θ

$$\Phi_{\mathrm{m}} = BS\cos\theta$$

2、计算

（1）在匀强电场中, 若 $\vec{E} \perp S$

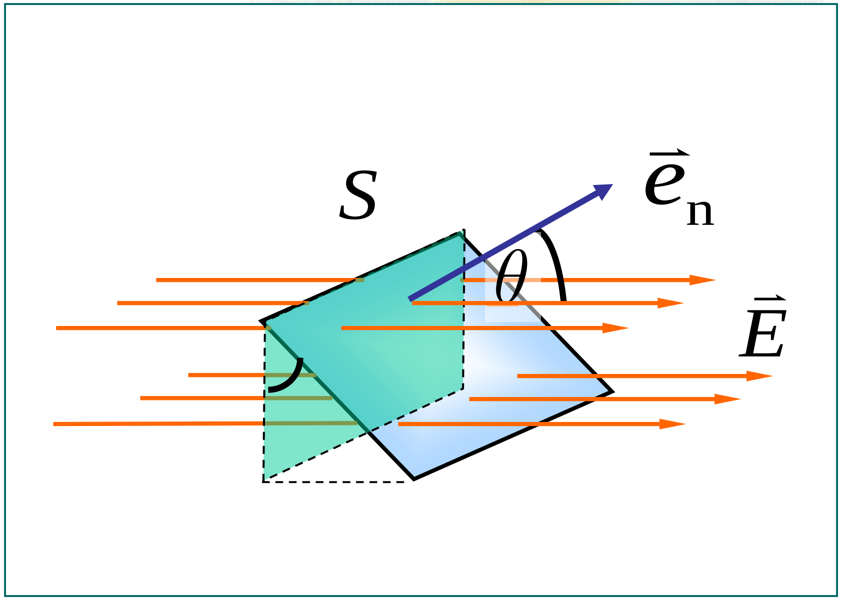


$$\phi_{\mathrm{e}} = ES$$

（2）匀强电场，

$\vec{E}$ 与平面夹角 θ.

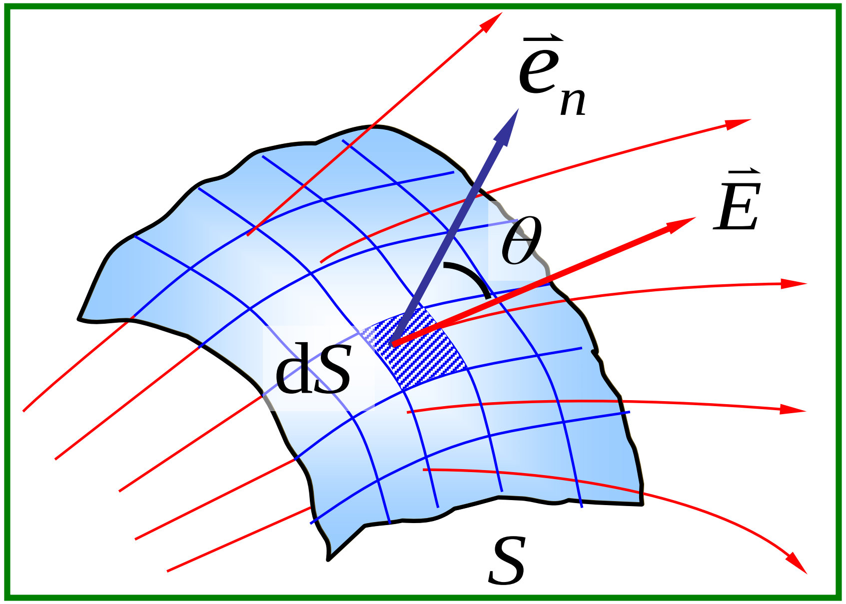
$$\phi_{\mathrm{e}} = ES\cos\theta$$



面积矢量：$\vec{S} = S\vec{e}_n$

$$\phi_{\mathrm{e}} = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

（3） 非匀强电场，任意曲面S 的电通量.

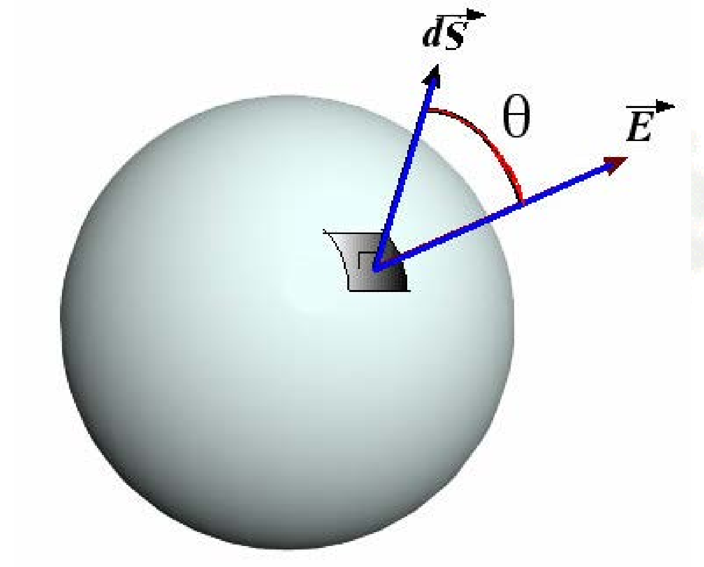


$$\mathrm{d}\phi_{\mathrm{e}} = E\cos\theta \mathrm{d}S = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\boxed{\phi_{\mathrm{e}} = \int \mathrm{d}\phi_{\mathrm{e}} = \int_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

（4） 闭合曲面的电通量

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



规定：

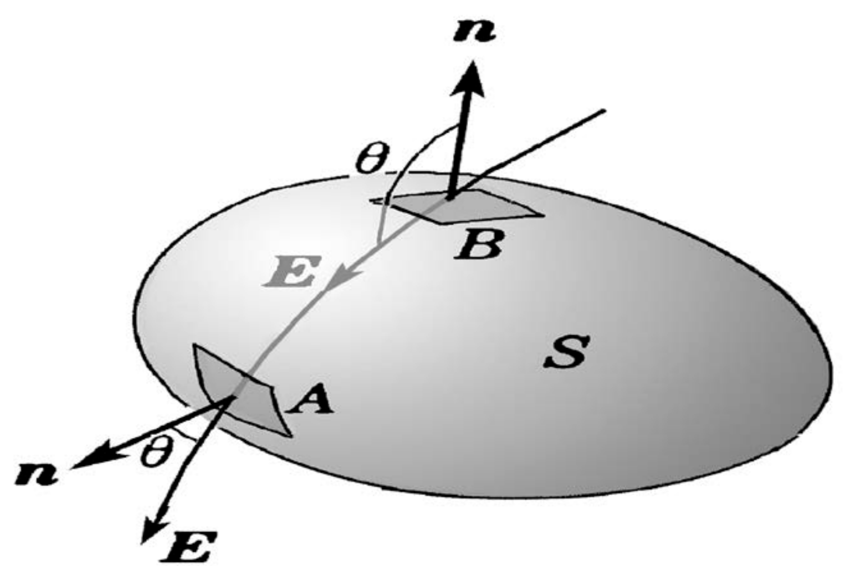
法线的正方向为指向闭合曲面的外侧。

穿入处 $: \theta > \frac{\pi}{2}, \quad d\phi_e < 0$

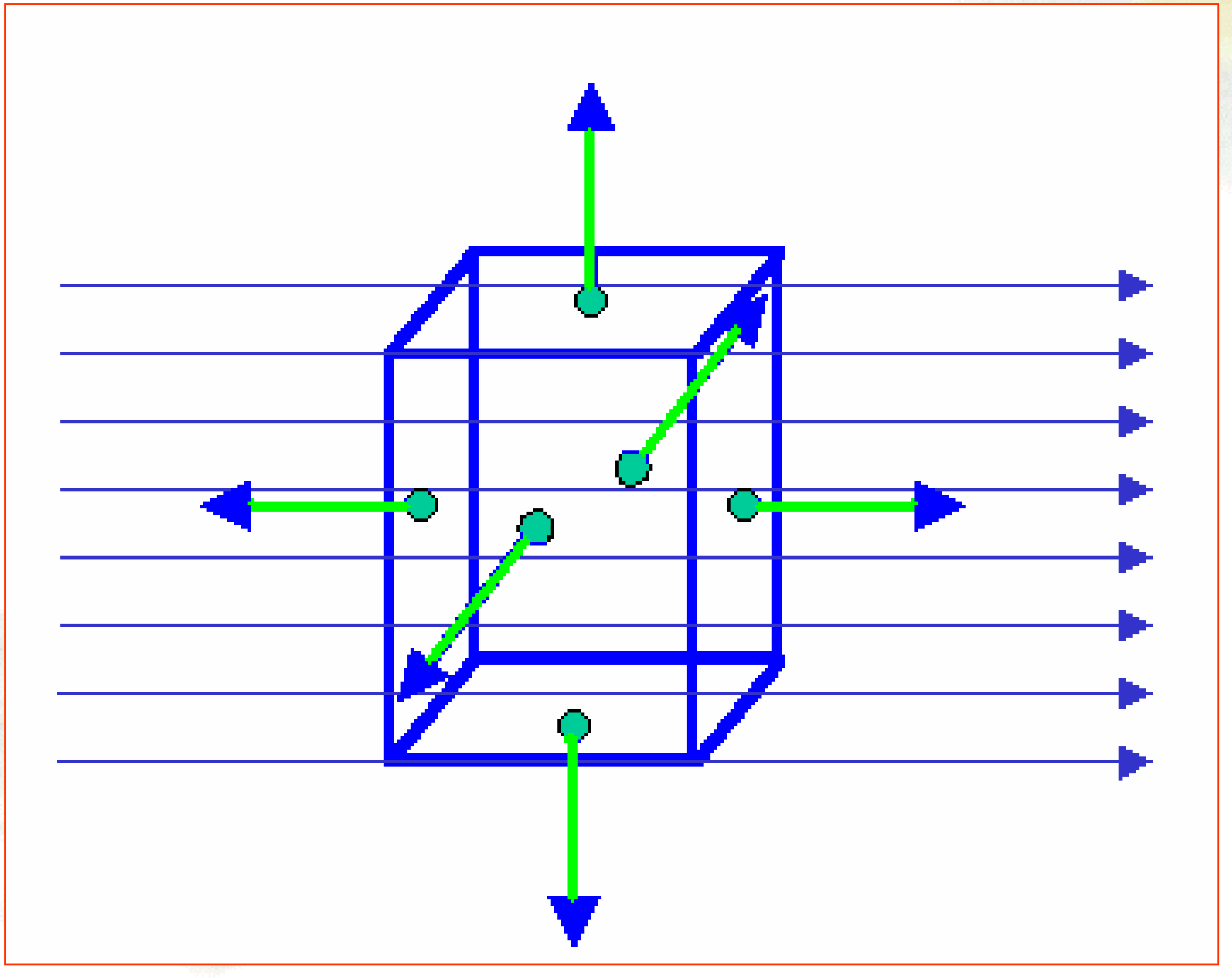
穿出处 $: \theta < \frac{\pi}{2}, \quad d\phi_e > 0$

若 $: N_{入} = N_{出}$

则 $: \phi_e = 0$



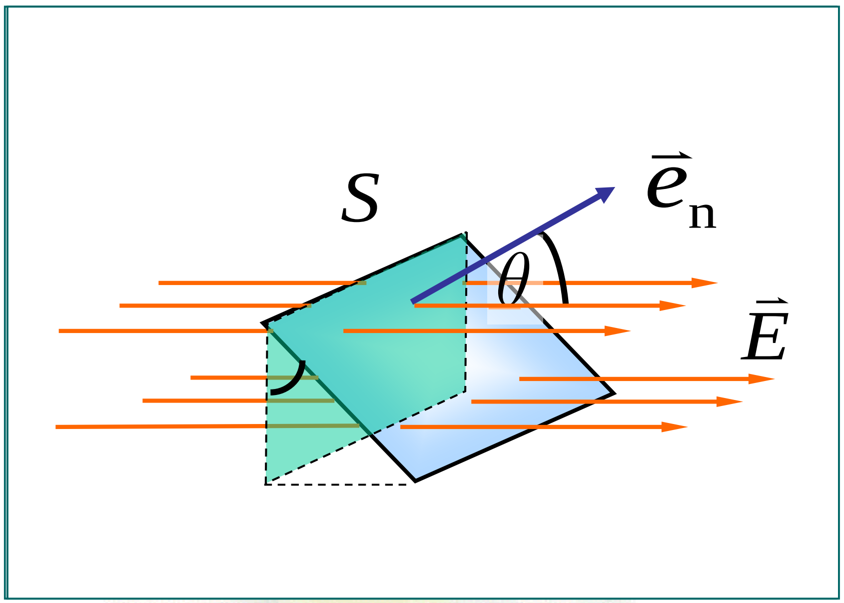
若：$\boxed{N_{入} = N_{出}}$ 则：$\boxed{\phi_e = 0}$

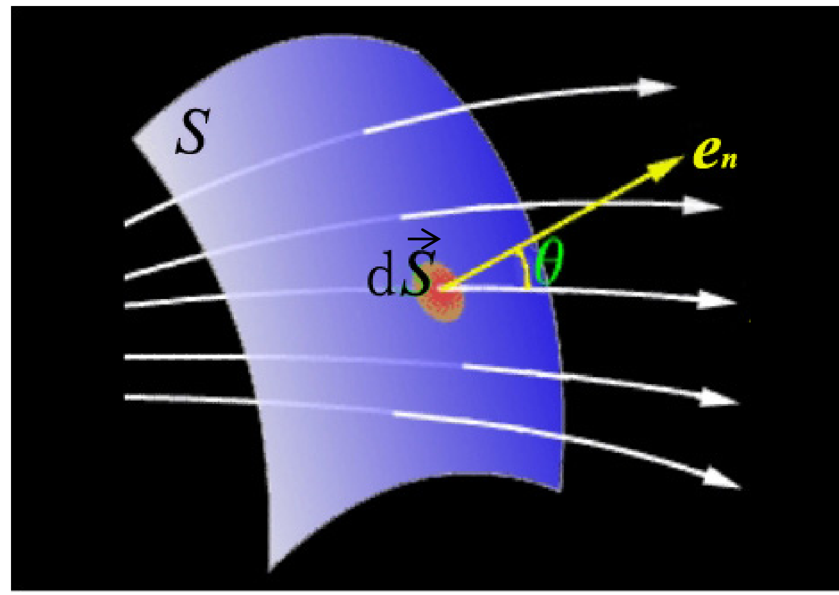


一、 电通量

1、定义

2. 计算





$$\phi_{\mathrm{e}} = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

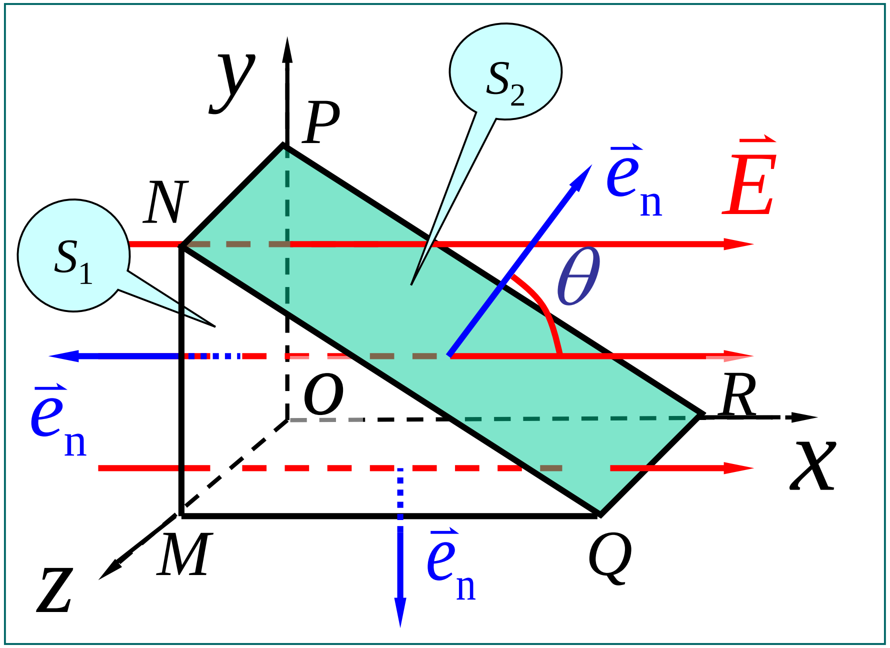
$$\phi_{\mathrm{e}} = \oint_S d\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

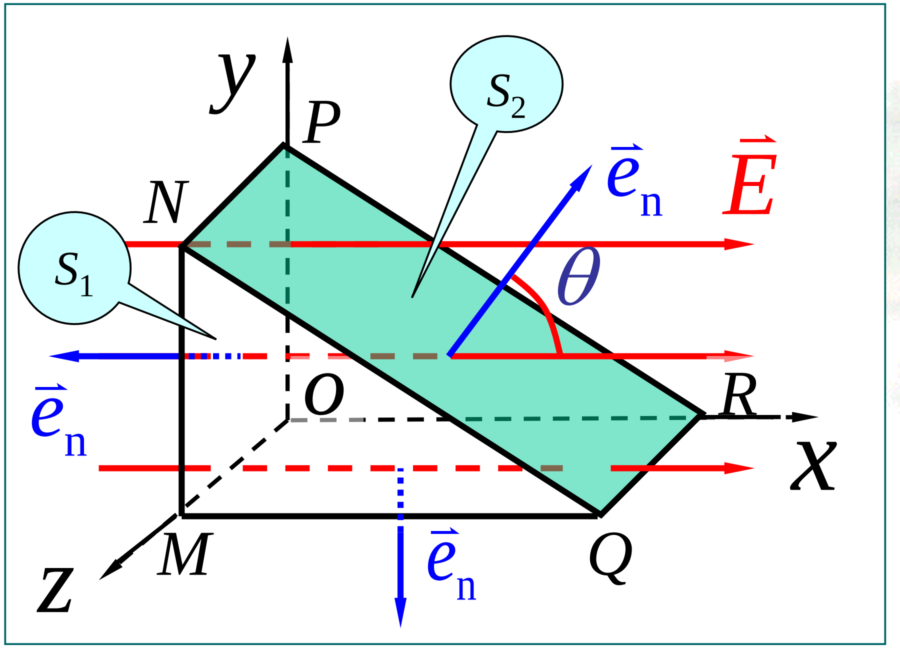
例1 三棱柱体放置在如图所示的匀强电场中. 求通过此三棱柱体的电场强度通量.

解

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \sum_{i=1}^{5} \Phi_{\mathrm{e}i}$$

$$= \Phi_{e1} + \Phi_{e2}$$





$$\Phi_{e1} = ES_1 \cos \pi = -ES_1$$

$$\Phi_{e2} = ES_2 \cos \theta = ES_1$$

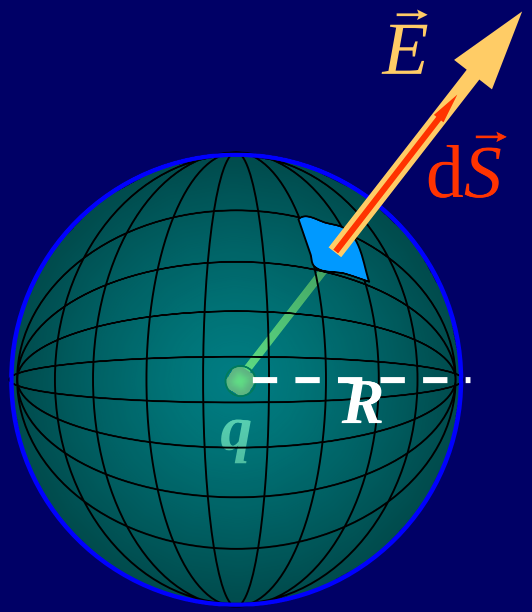
$$\boxed{\Phi_e = \sum_{i=1}^{5} \Phi_{ei} = 0}$$

例2：点电荷 **q** 位于球心处，求通过球面的电通量

$$\mathrm{d}\phi_e = \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= E\mathrm{d}S$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathrm{d}S$$



$$\phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

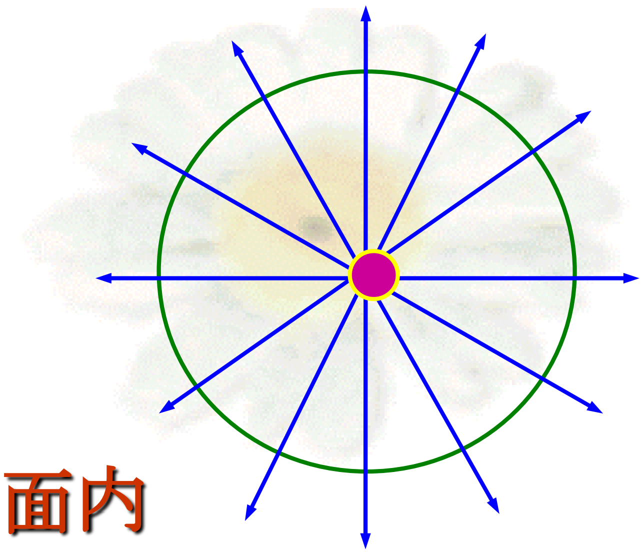
$$= \oint_S E\mathrm{d}S$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

思考几个问题？

点电荷在球面的球心处

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

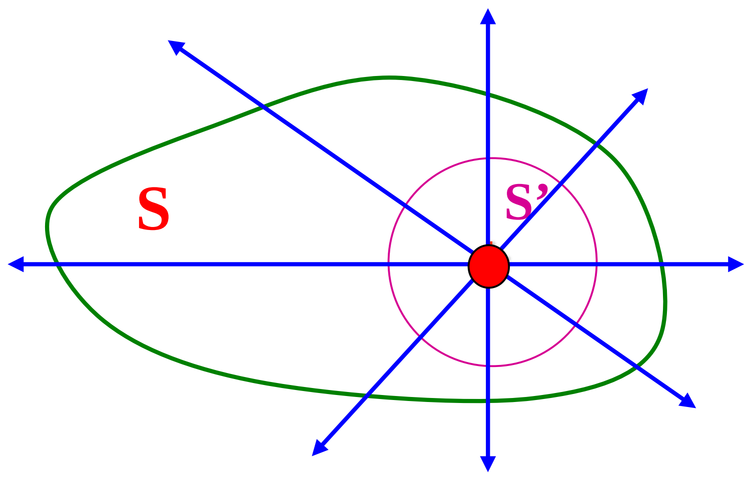


思考1：点电荷在任意形状的闭合曲面内

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ?$$

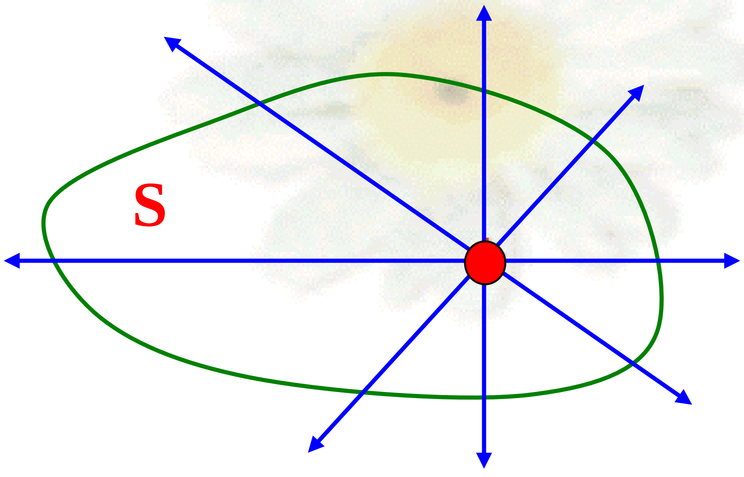
$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_0}$$



点电荷在任意形状的闭合曲面内

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

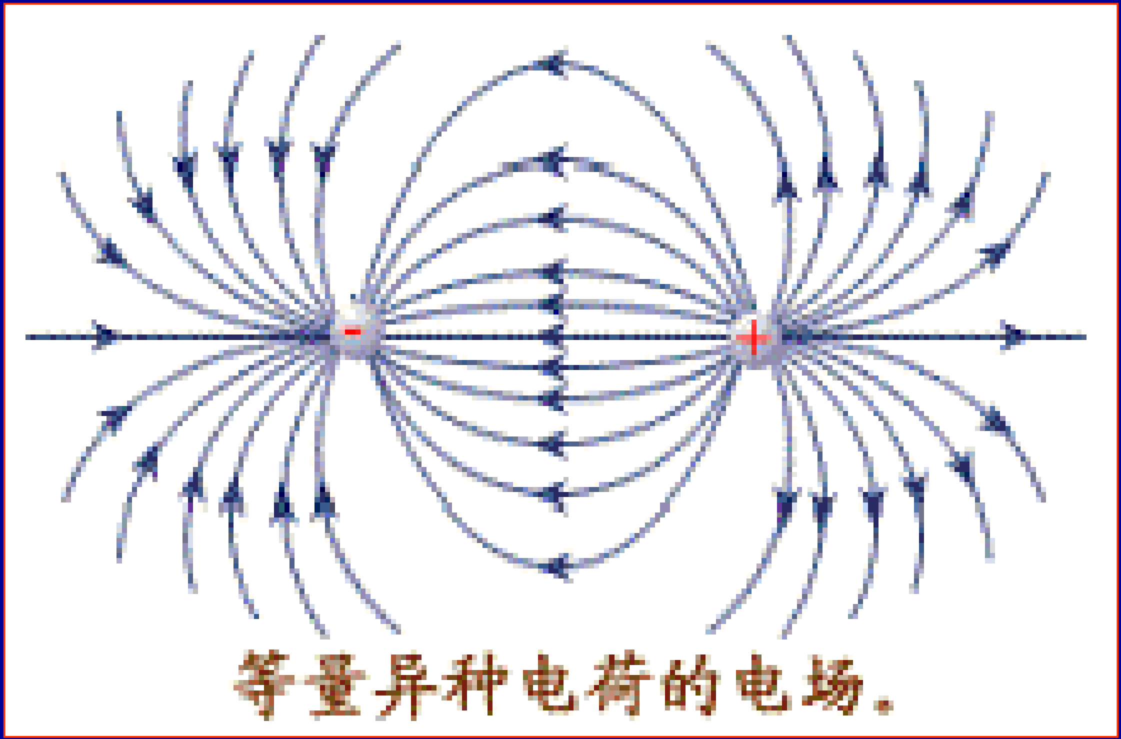


$$a.\quad q > 0 \Rightarrow \phi_e = \frac{q}{\varepsilon_0} > 0$$

电量为q的正电荷有q/ε_0条电场线由它发出伸向无穷远

$$b.\quad q < 0 \Rightarrow \phi_e = \frac{q}{\varepsilon_0} < 0$$

电量为q的负电荷有q/ε_0条电场线终止于它



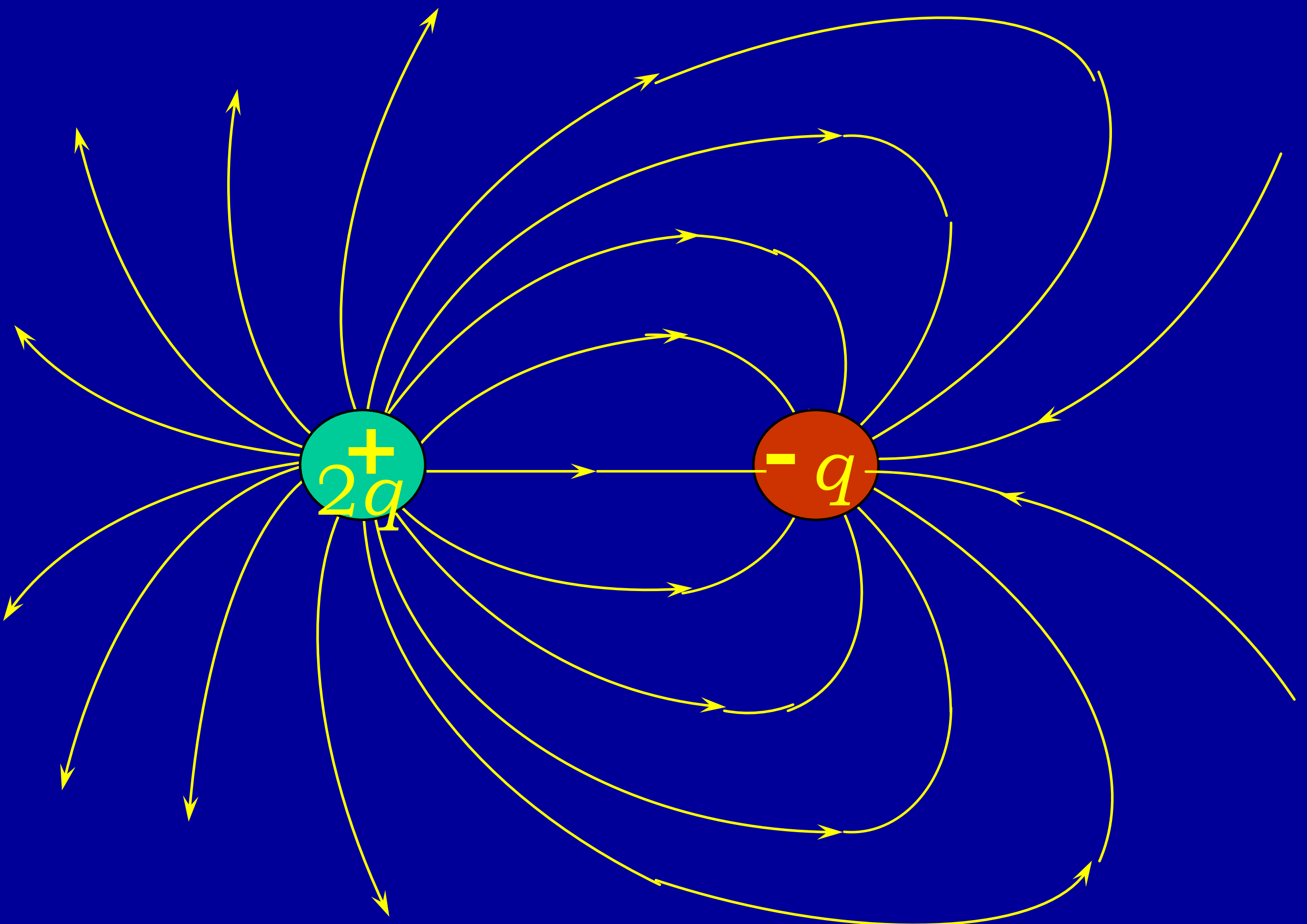
正电荷发出:$\dfrac{q}{\varepsilon_0}$

负电荷收到:$\dfrac{q}{\varepsilon_0}$

若带电体系中正，负电荷一样多，

则由正电荷发出的电场线全部终止到负电荷上.

若带电体系中正，负电荷不一样多, 若正电荷>负电荷, 则由正电荷出发的电场线部分终止到负电荷上, 部分终止到无穷远



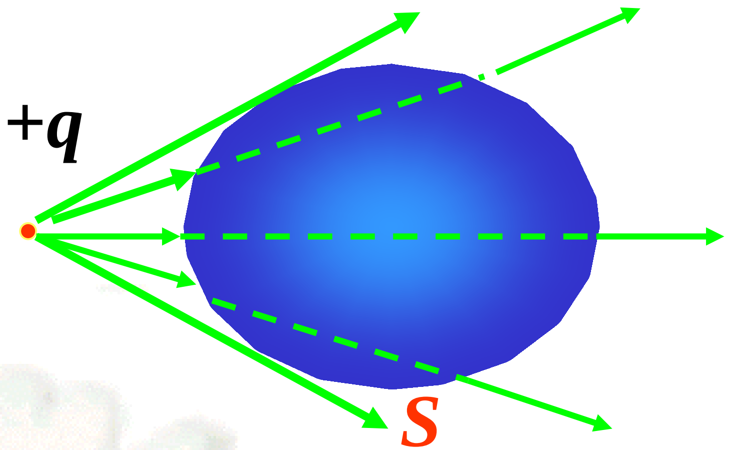
正电荷发出: $\dfrac{2q}{\varepsilon_0}$

负电荷收到: $\dfrac{q}{\varepsilon_0}$

无穷远收到: $\dfrac{q}{\varepsilon_0}$

思考**问题2**：

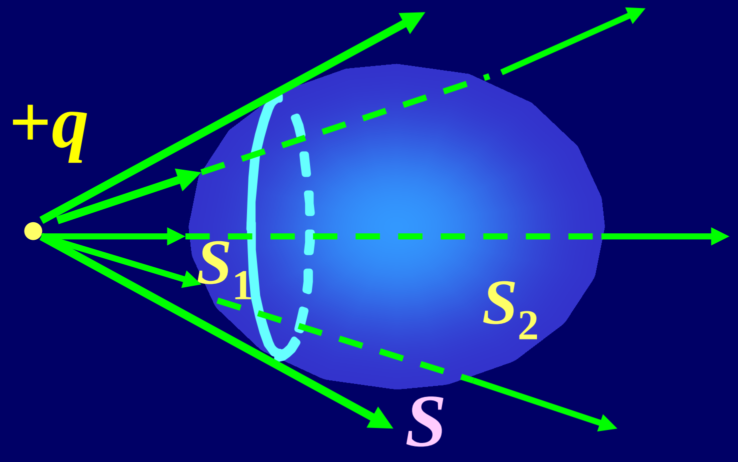
点**电**荷在**闭合曲面外，**通**过闭**合曲面的**电**通量？



$$\boxed{\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ?}$$

思考2：：点电荷在闭合曲面外

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ?$$



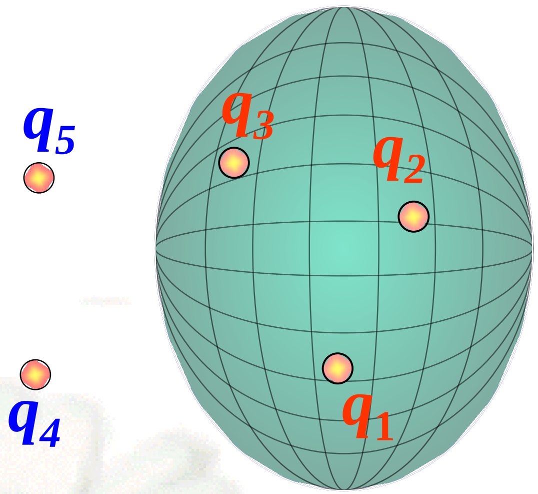
$$\phi_e = \phi_{e1} + \phi_{e2}$$

因为有几条电场线进面内必然有同样数目的电场线从面内出来。

$$\phi_e = \phi_{e1} + \phi_{e2} = 0$$

思考**问题3：**

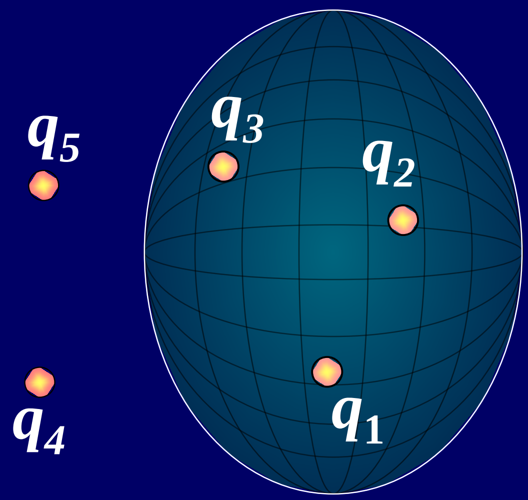
多个电荷存在，通过任意闭合曲面的电通量？



$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ?$$

思考3：多个电荷存在，通过任意闭合曲面的电通量？

$$\boxed{\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ?}$$



闭合面电通量为

$$\phi_e = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

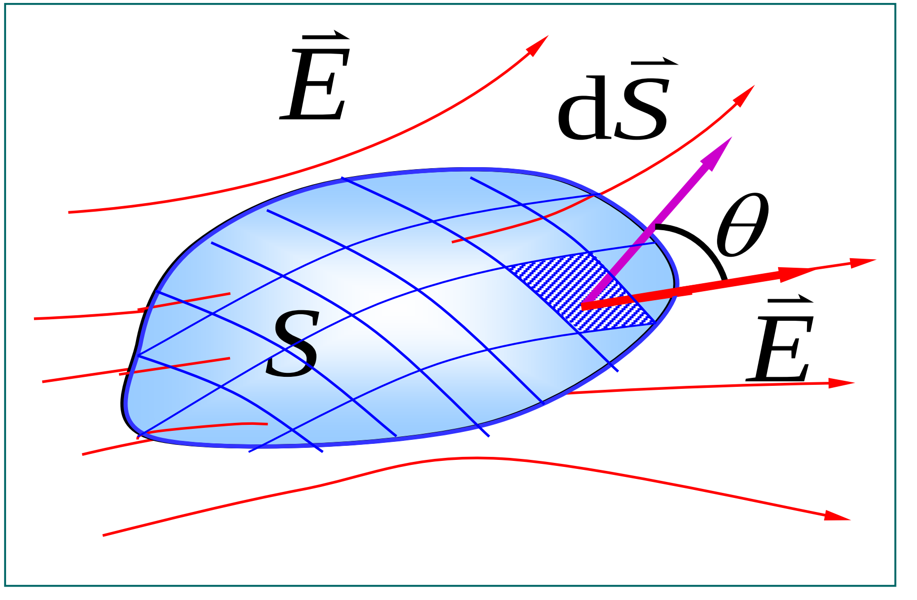
$$= \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0} + \frac{q_3}{\varepsilon_0} + 0 + 0$$

$$= \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\varepsilon_0}$$

§1-4 高斯定理

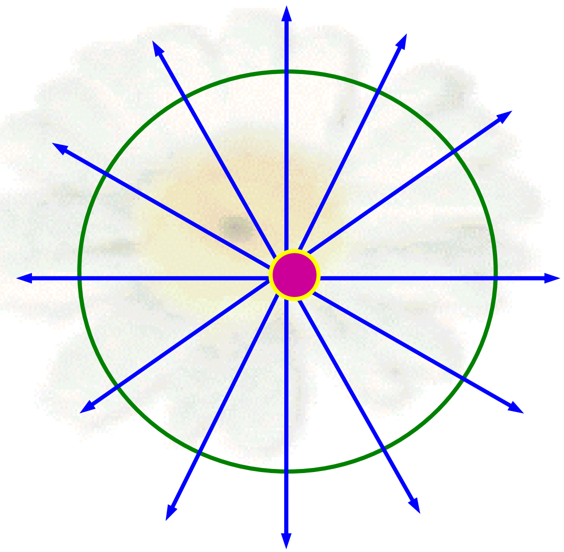
◆ 高斯定理回答:

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = ?$$



点电荷在球面的球心处

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

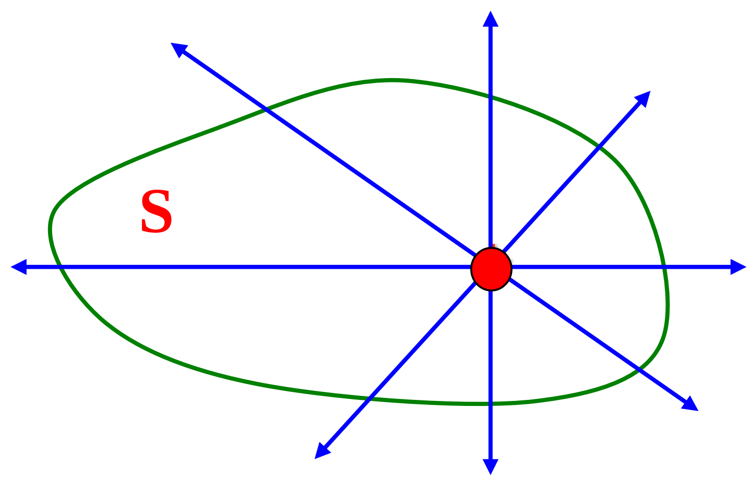


思考**问题1**：

点**电**荷在**任意形状**的**闭**合曲面内

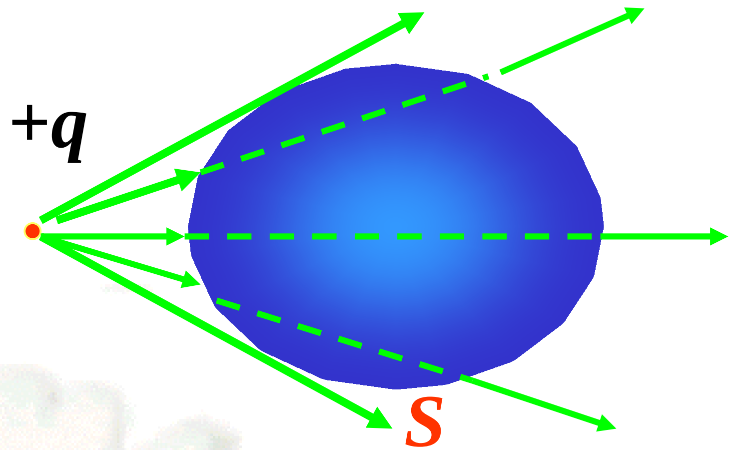
$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ?$$

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



思考**问题2**：

点**电**荷在**闭合曲面外，** 通**过闭**合曲面的**电**通量？

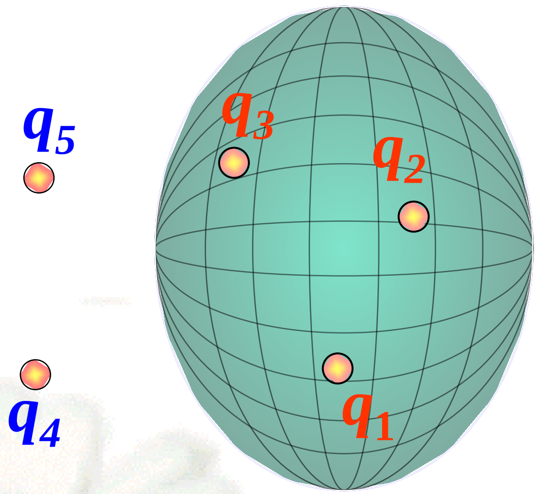


$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ?$$

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

思考问题3：

多个电荷存在，通过任意闭合曲面的电通量？



$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ?$$

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\varepsilon_0}$$

二. 高斯定理

$$\phi_{\mathrm{e}}=\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=?$$

1. 文字表述

成立条件：

真空；静电场

在真空的静电场中, 通过任一闭合曲面的电通量,

等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以 ε_0 。

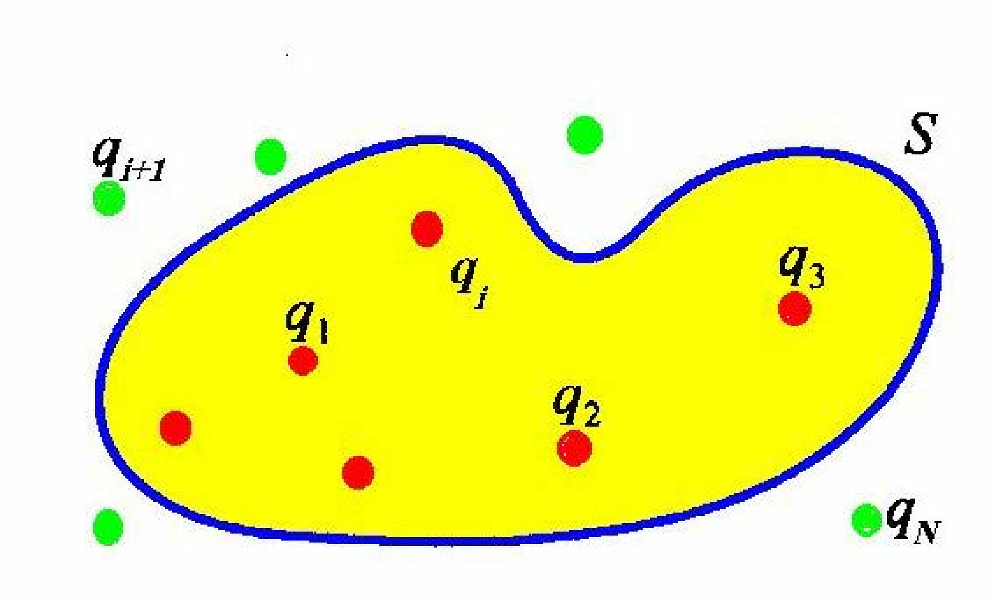
（闭合曲面称为高斯面）

在真空的静**电场**中，通**过**任一**闭**合曲面的**电**通量，

等于**该**曲面所包**围**的所有**电**荷的代数和除以 ε_0 。

2. 高斯定理的表达式

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_{in}$$



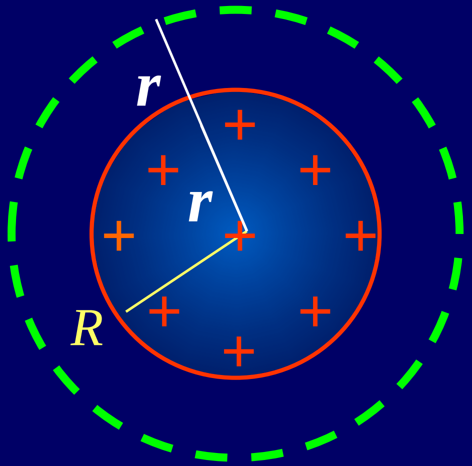
一均匀带电球体，体密度为 ρ

取同心球面为高斯面

- 球外 ($r > R$)

$$\sum q_{内} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{\varepsilon_0}}$$

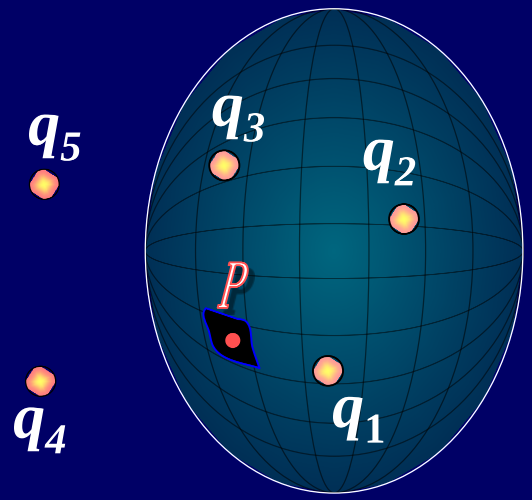


- 球内 ($r < R$)

$$\sum q_{内} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{\varepsilon_0}}$$

3、$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{in}$的理解



闭合面电通量为

$$\phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\varepsilon_0}$$

1) 通**过**任意**闭**合曲面的**电**通量只决定于它所包**围**的**电**荷的代数和，**闭**合曲面外的**电**荷**对电**通量无**贡**献。

P 点的电场强度

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_5$$

2) 高斯定理中的**电场强**度是指高斯面上的**场强**，由封**闭**曲面内、外**电**荷共同**产**生

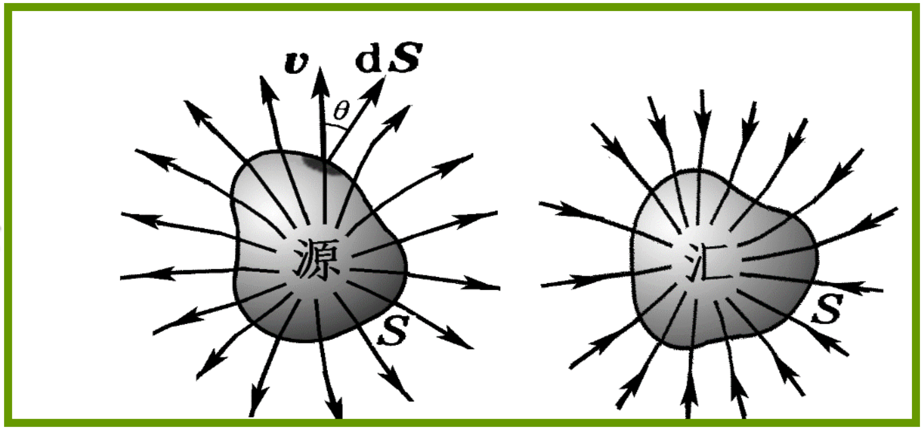
3、$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{in}$的理解

3) **该**定理可用于求解高度**对**称的**电场**分布

4) 揭示了**电场**与**场**源之**间**的**联**系，
说明静**电场**是有源场；？

$$\sum q_{in} > 0 \Rightarrow \Phi_e > 0$$

表明电场线从正电荷发出，
所以正电荷是静电场的源头

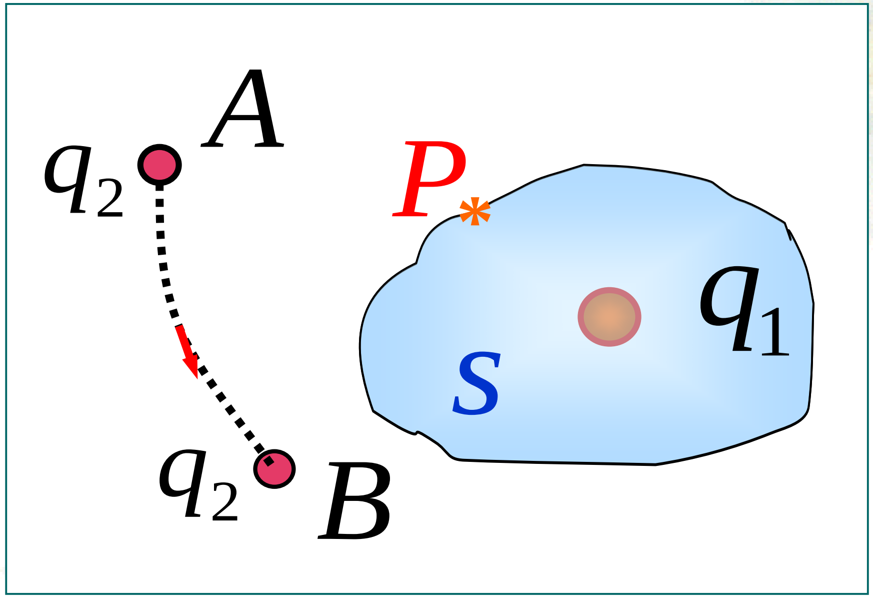


$$\sum q_{in} < 0 \Rightarrow \Phi_e < 0$$

表明有电场线穿入闭合曲面而终止于负电荷，
所以负电荷是静电场的尾。

静电场是有源场

讨论



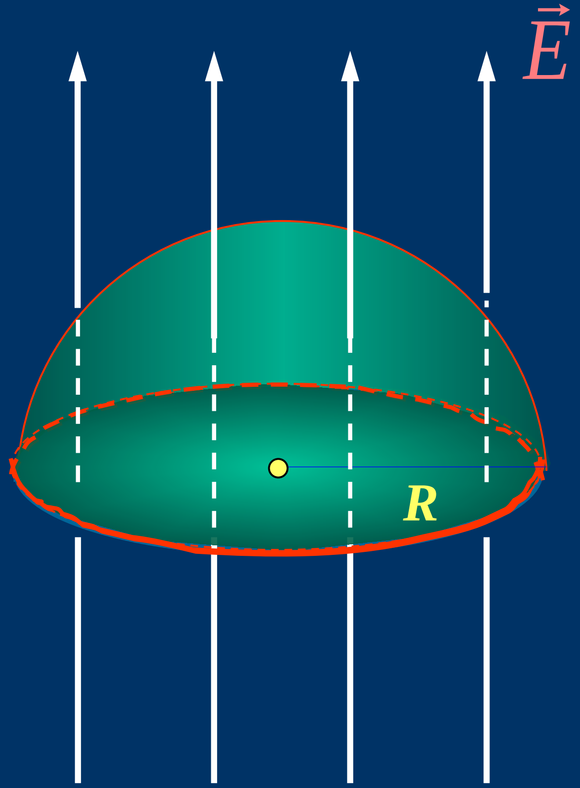
◆ 将q_2从 A 移到 B

点 P 电场强度是否变化?

穿过高斯面 S 的 Φ_e有否变化?

例 均匀电场中有一个半径为R 的半球面

求 通过此半球面的电通量。



方法： 构成一闭合面，电通量

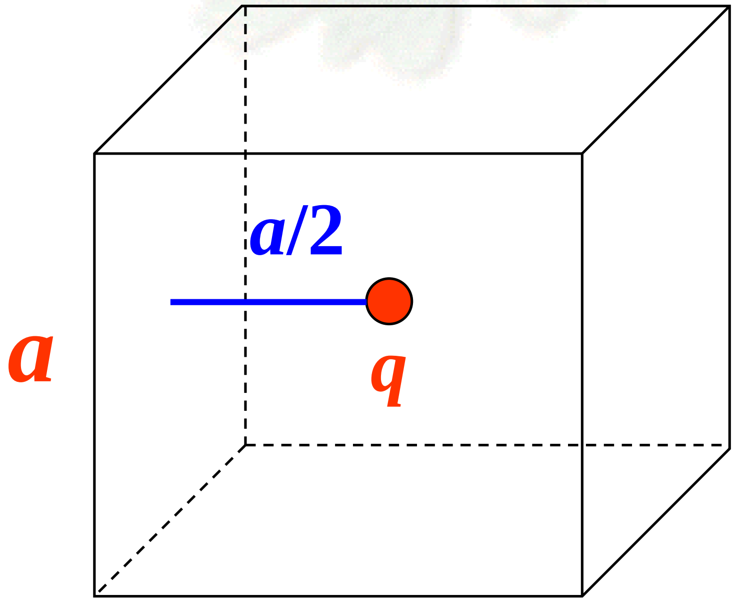
$$\Phi_e = \int_{\text{半球面}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{\text{底面}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\int_{\text{半球面}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\int_{\text{底面}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\boxed{\phi_{\text{半球面}} = \pi R^2 E}$$

有一边长为a的正方形平面，在其中垂线上距中心为$\frac{a}{2}$处有一点电荷q，则通过该平面的电场强度通量为多少？

$$\phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



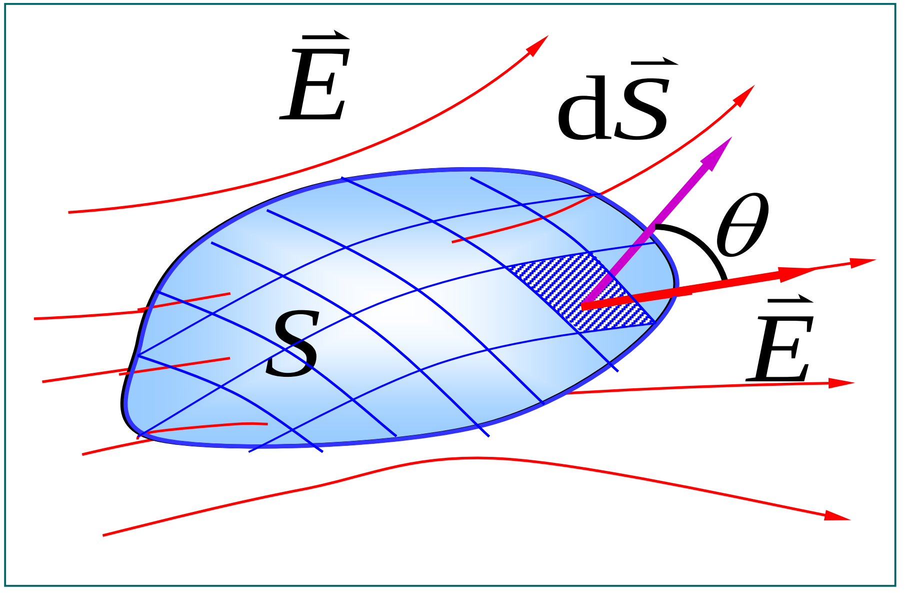
则通过任意平面的电场强度通量为：

$$\phi_e = \frac{q}{6\varepsilon_0}$$

§1-4 高斯定理

◆ 高斯定理回答：

$$\phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = ?$$

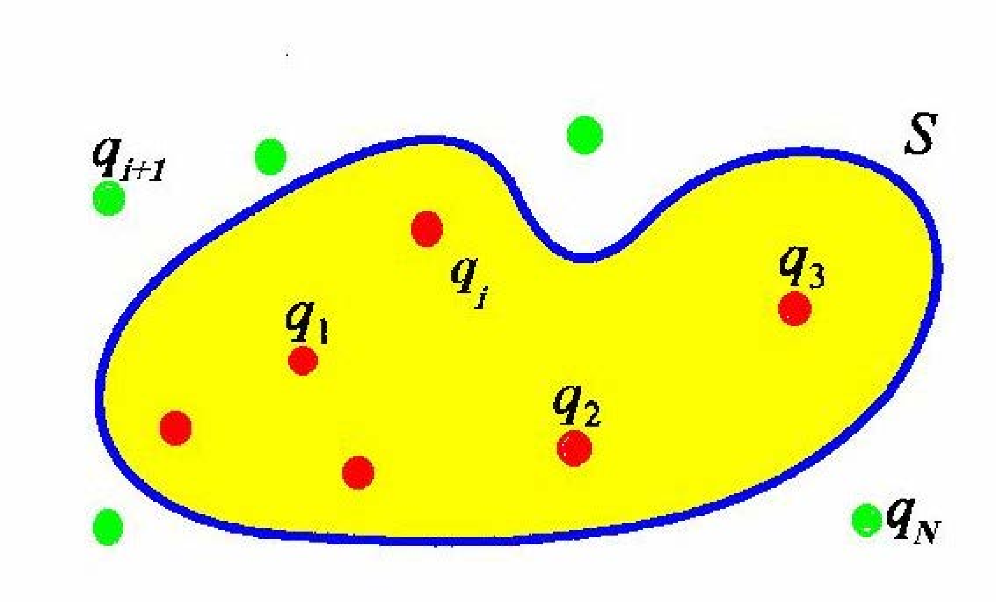


在真空的静**电场**中，通**过**任一**闭**合曲面的**电**通量，

等于**该**曲面所包**围**的所有**电**荷的代数和除以 ε_0 。

高斯定理的**表达式**

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_{in}$$



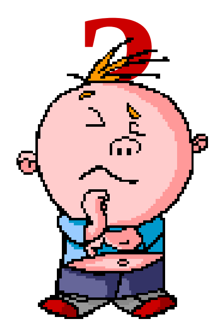
4. 高斯定理的**应用**

求解三类**对称电场**（**球对称；轴对称；面对称**）

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{in}$$

为什么只能求解对称性电场中的$\vec{E}$

如何求对称性电场中的$\vec{E}$



$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{in}$$

求解场强步骤：

（1）对称性分析；（**应**用的条件）

（2）根据对称性选择合适的高斯面；（解**题**的关键）

- 通过所求点;
- 高斯面上各点场强大小相等,各面元与场强垂直
- 选取规则形状

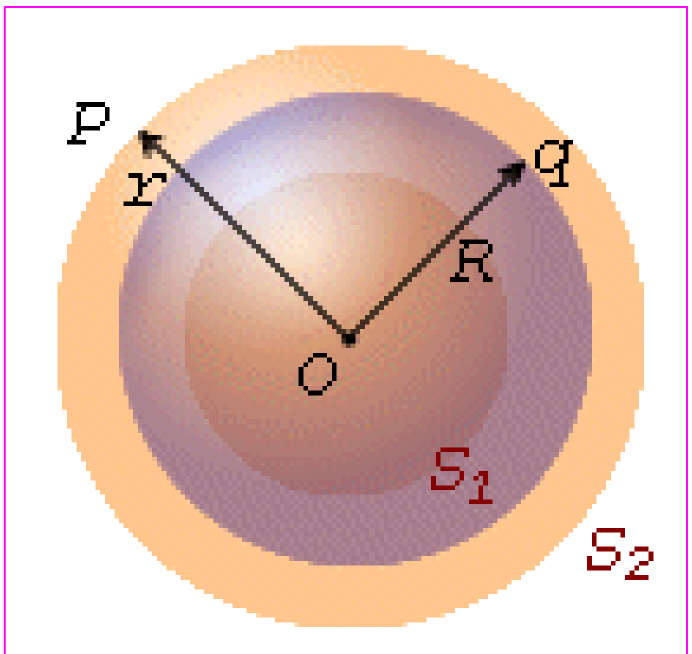
（3）应用高斯定理计算;

$$\left.\begin{aligned} &\phi_e = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = ? \\ &\sum q_{in} = ? \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \phi_e = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E = ?$$

4. 高斯定理的应用

求解三类对称电场

第一类：球对称电场

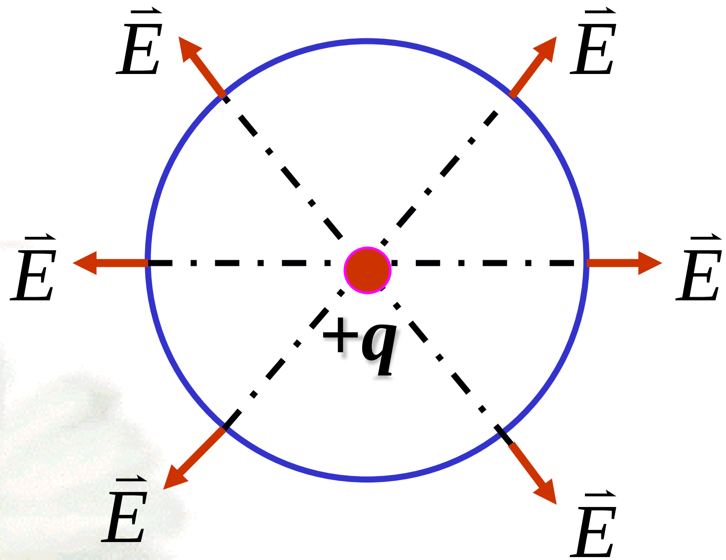


球对称分布：

包括点电荷、
均匀带电的球面、
球体和多层同心球壳
激发的电场

点电荷电场场强分布规律：

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$



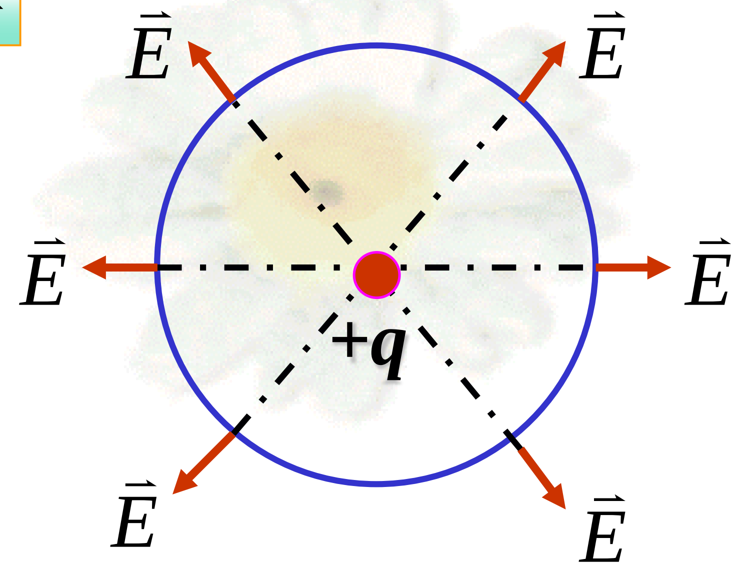
点**电**荷**电场**具有**球对**称性

例1：求点电荷电场场强分布规律

点**电**荷**电场**分布具有**球对称性**

选择以**场**点到球心的距离**为**半径的

同心球面为高斯面,如**图**所示

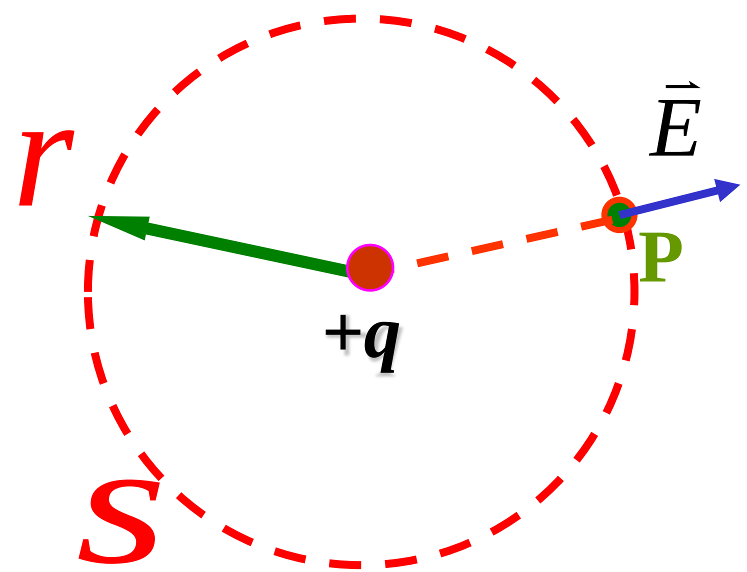


$$\phi_e = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = E 4\pi r^2$$

$$\sum_{s（内）} q_i = q$$

$$由\ \phi_e = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$



例2 均匀**带电球面**激发电场的场强分布

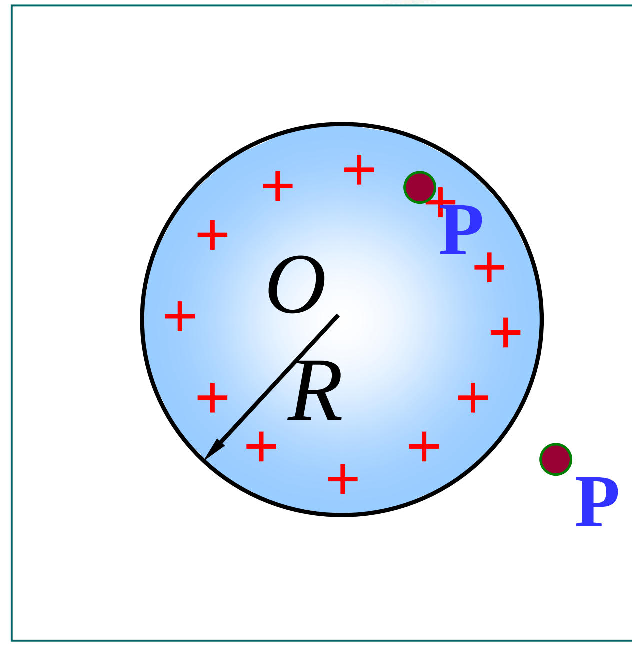
一半径为R，均匀带电 Q 的球面 .
求球面内外任意点的电场强 度.

（1） $0 < r < R$

$\vec{E} = ?$

（2） $r > R$

$\vec{E} = ?$

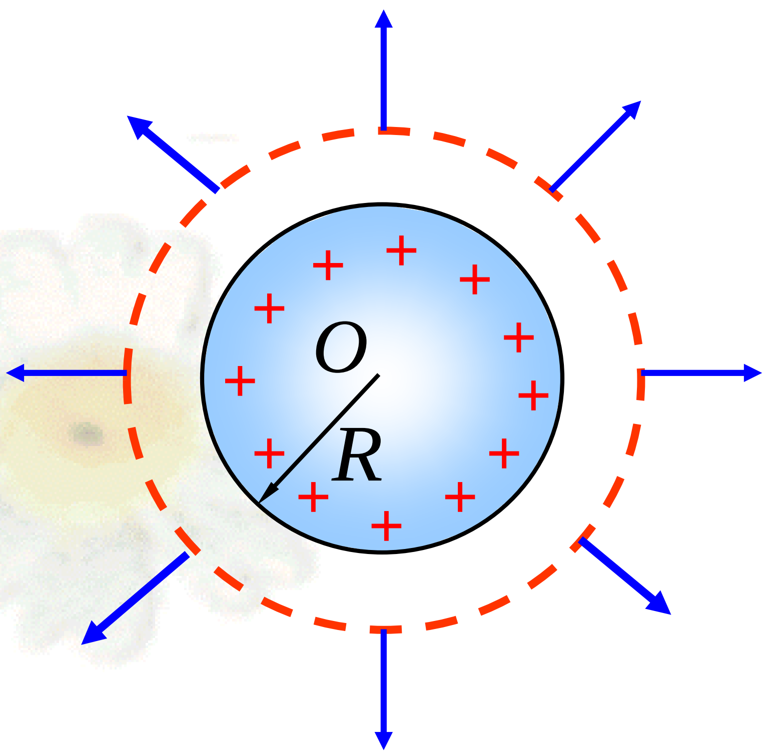


解　（1）对称性分析：球对称

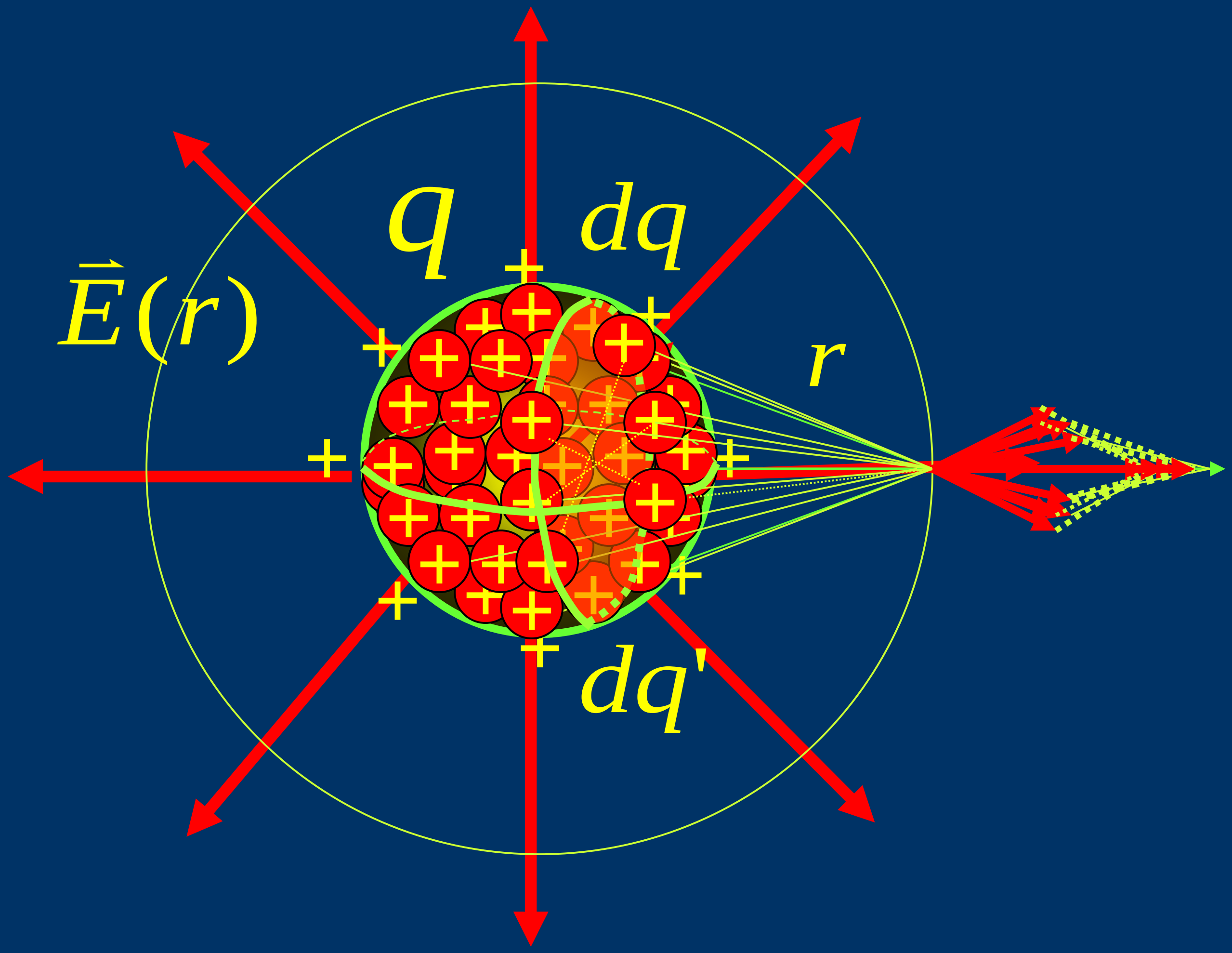
球**对**称**电场场强**分布特点

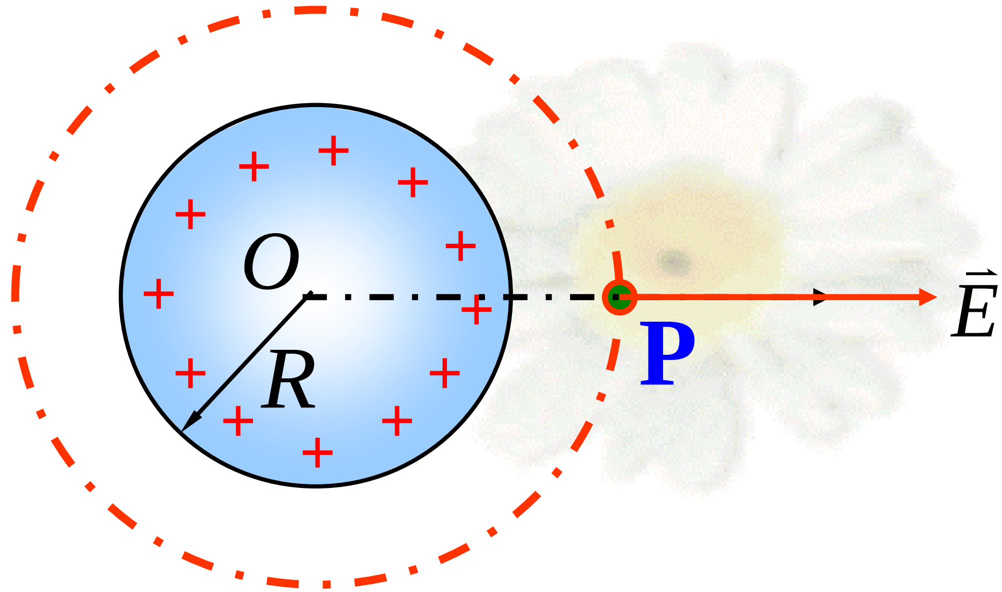
到球心距离相等的各点场强大小相等，

方向沿球径方向



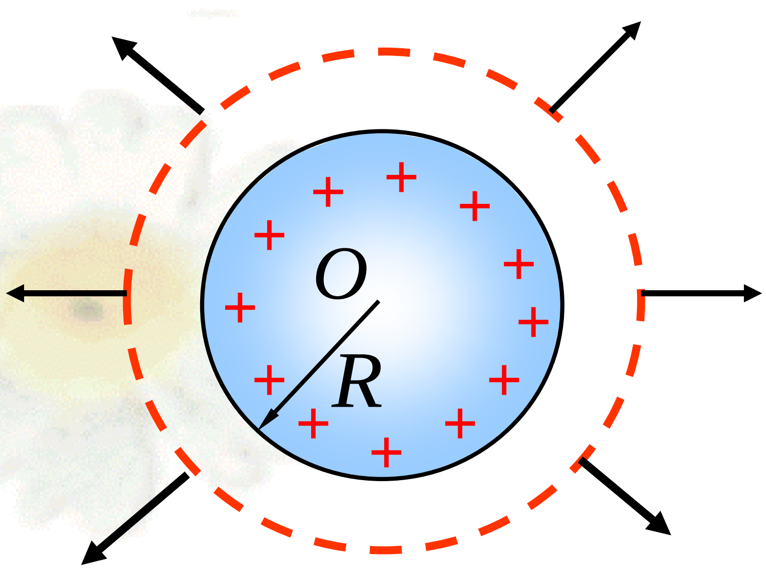
分析对称性





方向：过场点沿球径方向

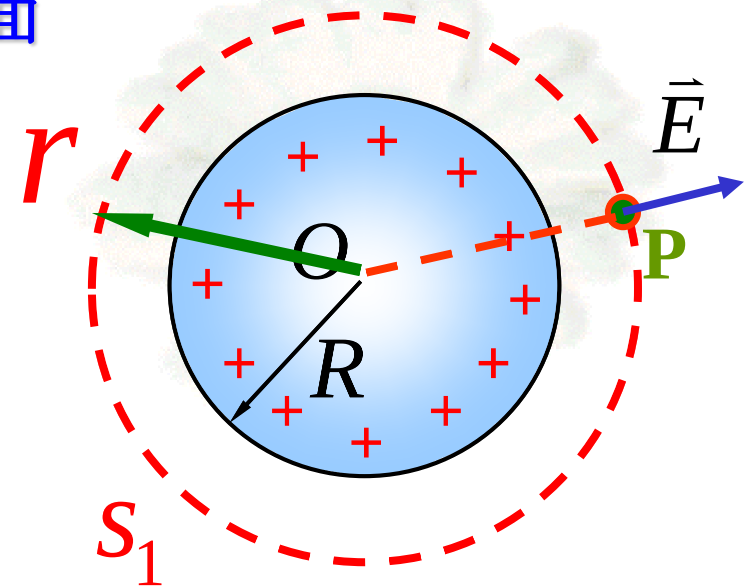
大小：到球心距离相等的各点所处环境相同,所以场强大小相等



（2）根据**对**称性**选择**合适的高斯面

（1）$r > R$

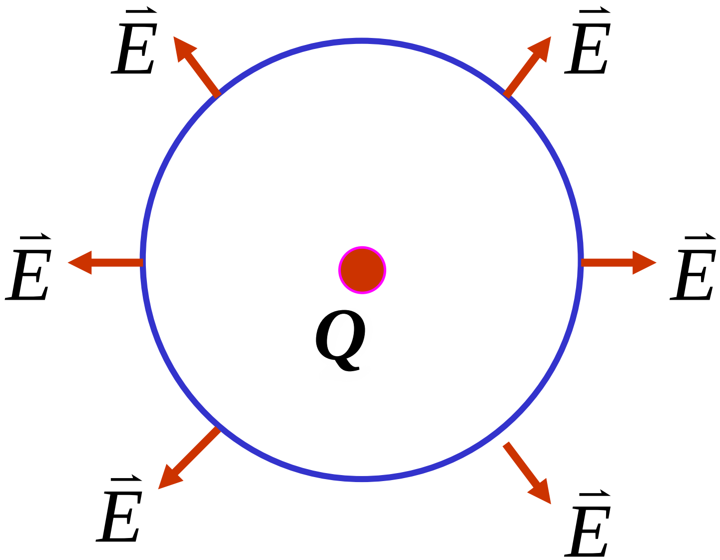
选择以**场**点到球心的距离**为**半径的同心球面**为**高斯面,如**图**所示



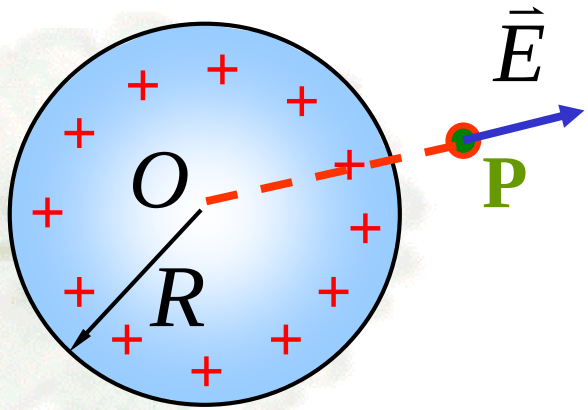
$$\phi_e = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = E 4\pi r^2$$

$$\sum_{s（内）} q_i = Q$$

由 $\phi_e = \dfrac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$ ⟹ $4\pi r^2 E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ ⟹ $\boxed{E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$

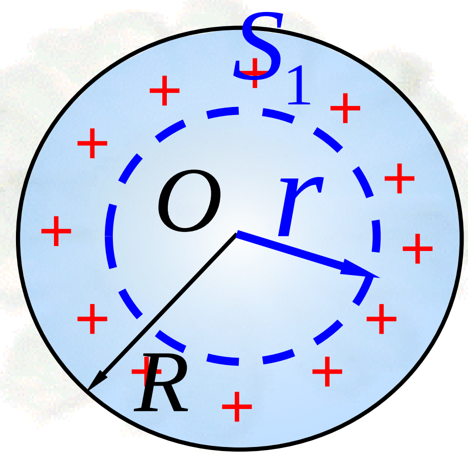


$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

（2）　$0 < r < R$



选择以**场**点到球心的距离**为**半径的

同心球面为高斯面,如**图**所示

$$\phi_e = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = E 4\pi r^2$$

$$\sum_{s（内）} q_i = 0$$

由 $\phi_e = \dfrac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$ $\Rightarrow$ $4\pi r^2 E = 0$

$$\boxed{\vec{E} = 0}$$

例1 均匀带电球面的电场强度

（1）$r > R$：

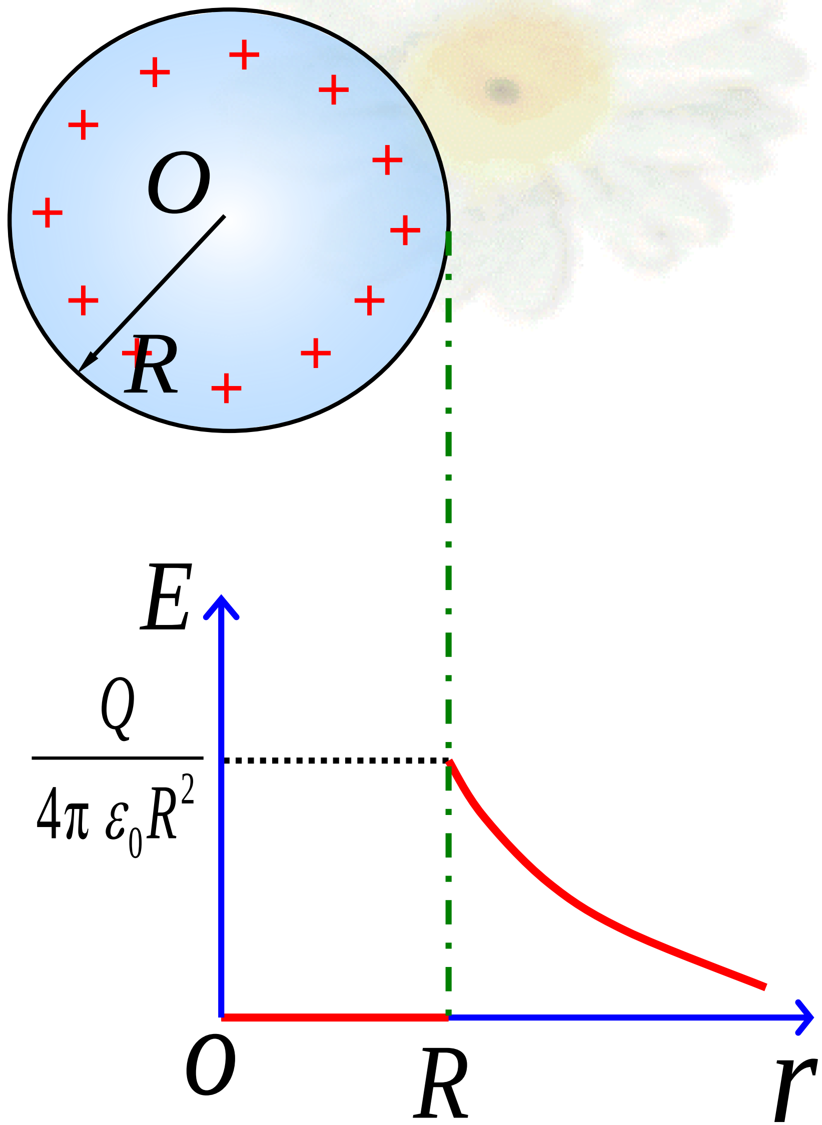
$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

（2）$0 < r < R$：

$$\vec{E} = 0$$

（3）$r = R$：

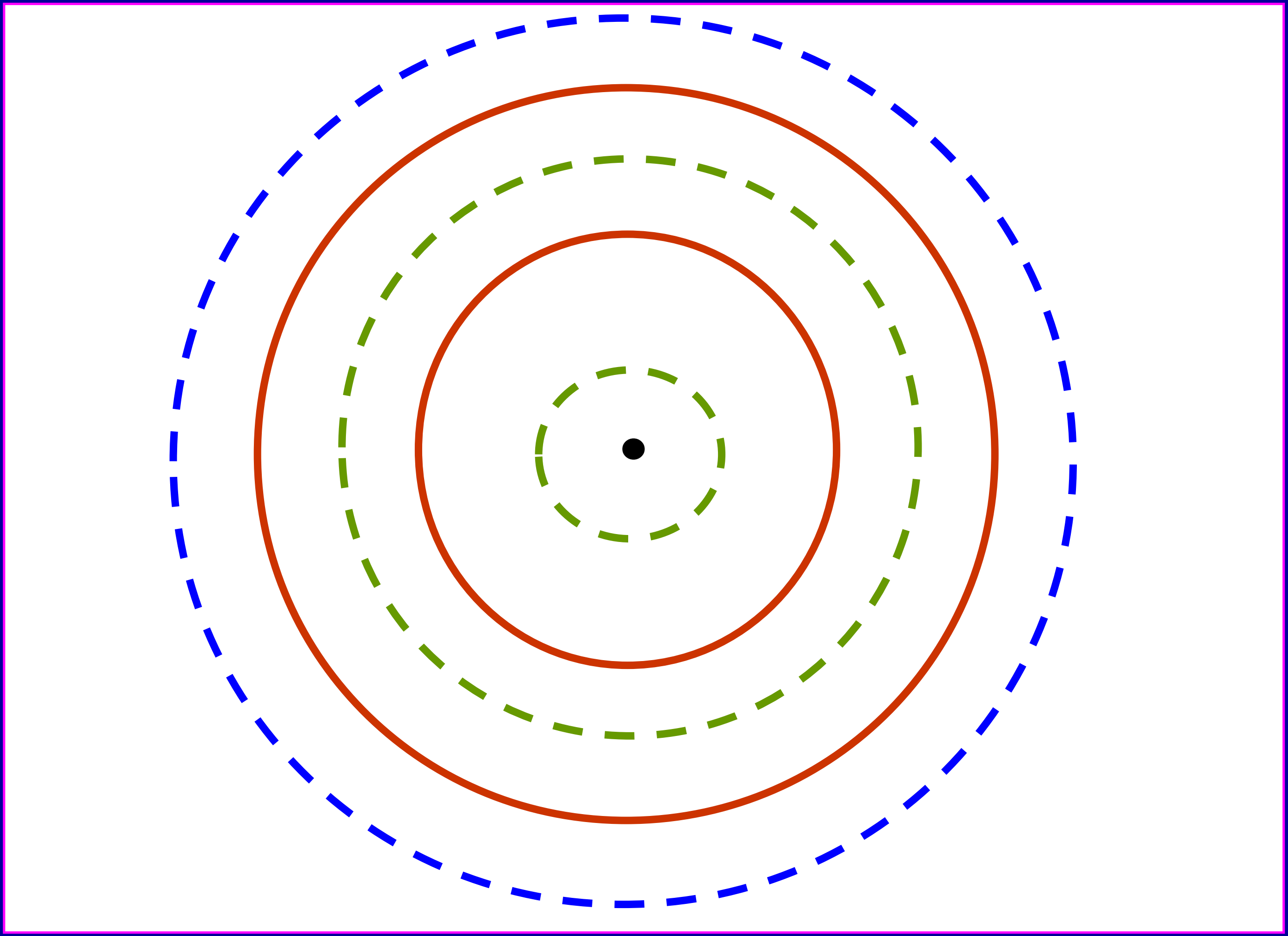
$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$



例3：求同心带电球面的电场分布

已知Q_1、Q_2、R_1、R_2

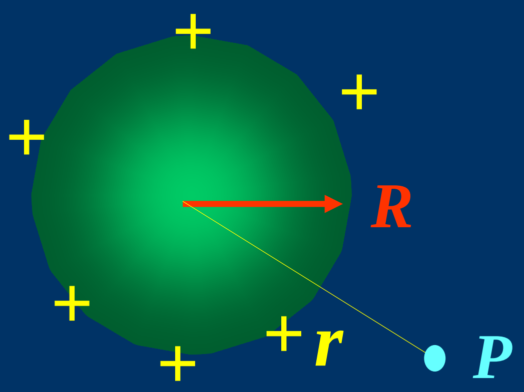
$$\phi_e = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E 4\pi r^2$$



例3：求同心带电球面的电场分布

已知Q_1 、Q_2、R_1 、R_2

解： 对于单个球面

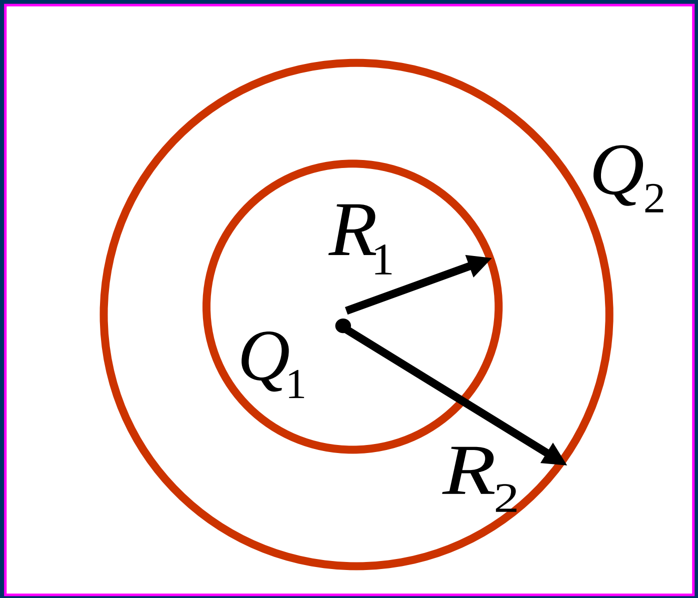


$$E = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

由电场叠加原理

$$E = E_1 + E_2$$

$$E = \begin{cases} 0 & \boxed{0 < r < R_1} \\ \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \boxed{R_1 < r < R_2} \\ \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \boxed{r > R_2} \end{cases}$$



例4 均匀带电球体的电场强度

$\vec{E}$ 分布具有球对称性。

取同心球面为高斯面，

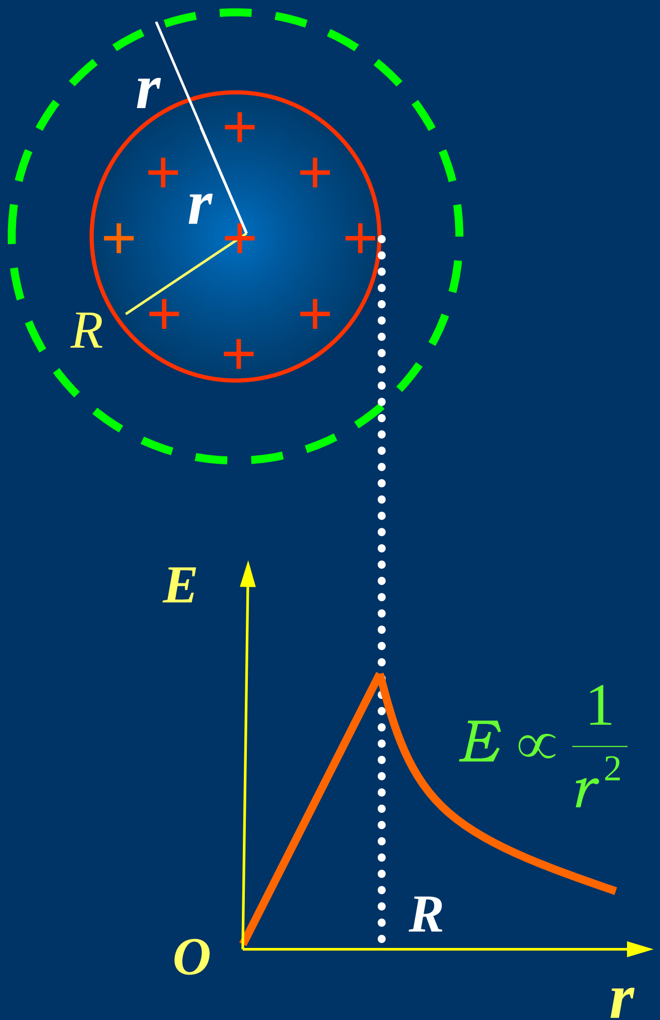
$$\phi_e = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E 4\pi r^2$$

- 球外 $(r > R)$

$$\sum q_{内} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \qquad \therefore E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}$$

- 球内 $(r < R)$

$$\sum q_{内} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \qquad \therefore E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}$$



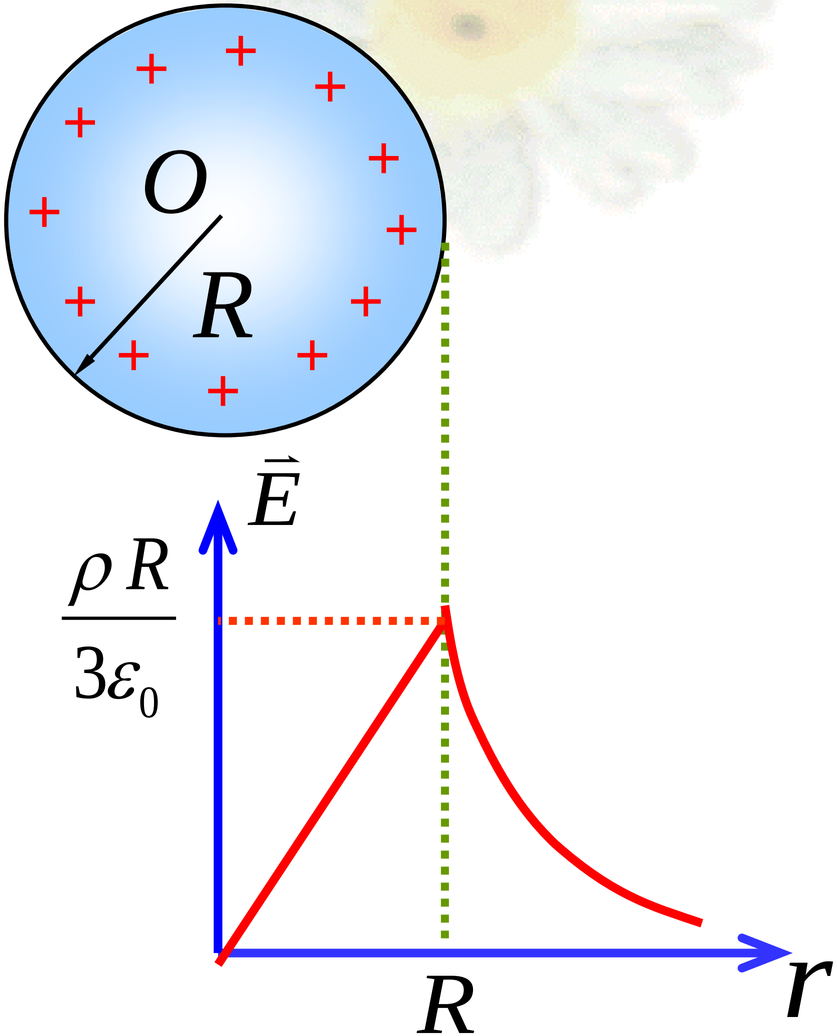
$E \propto \frac{1}{r^2}$

例4 均匀带电球体的电场强度

（1） $r > R$: $\vec{E} = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

（2） $r < R$: $\vec{E} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r$

（3） $r = R$: $\vec{E} = \dfrac{\rho R}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r$



一带电球体，体密度为 $\boxed{\rho = kr}$

$$\phi_e = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E 4\pi r^2$$

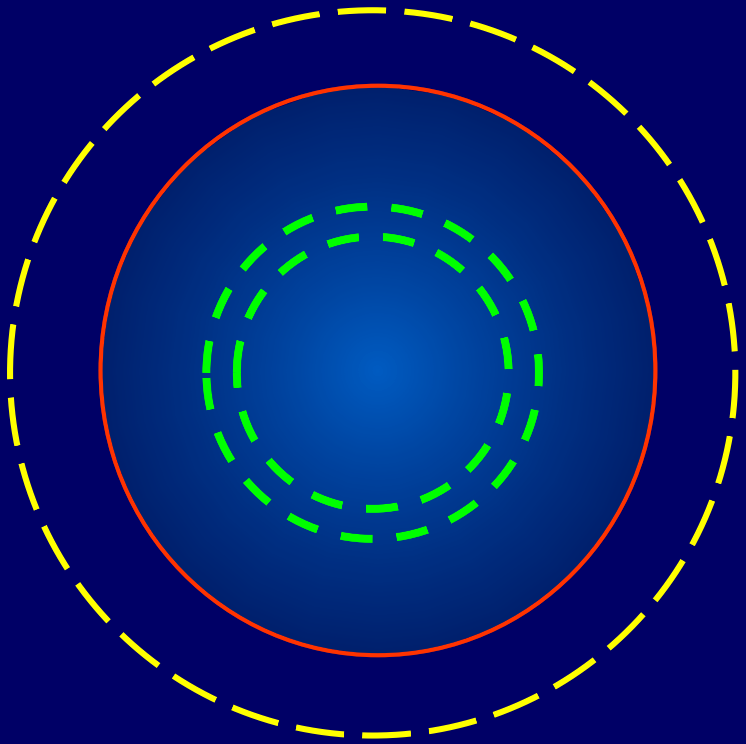
$$\sum q_{内} = ?$$

$$\boxed{\mathrm{d}q = \rho 4\pi r^2 dr}$$

$$\boxed{\sum q_{in} = \int \mathrm{d}q = \int_0^R k 4\pi r^3 dr}$$

$$\boxed{\sum q_{in} = k\pi R^4}$$

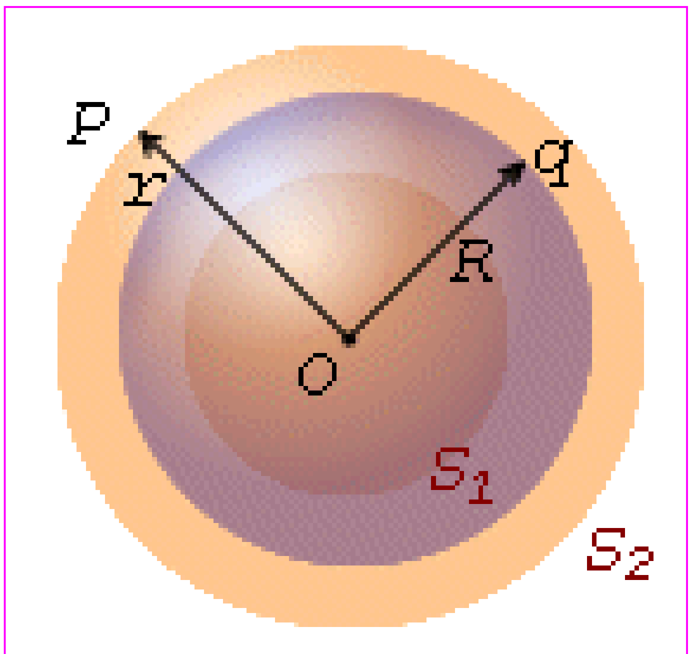
$$\therefore E = \frac{k}{4\varepsilon_0}\frac{R^4}{r^2}$$



4. 高斯定理的应用

求解三类对称电场

第一类：球对称电场



球对称分布：

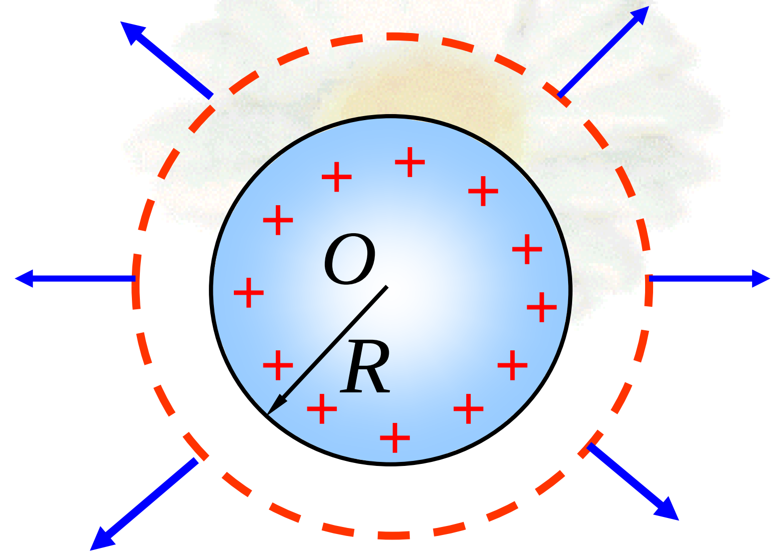
包括点电荷、
均匀带电的球面、
球体和多层同心球壳
激发的电场

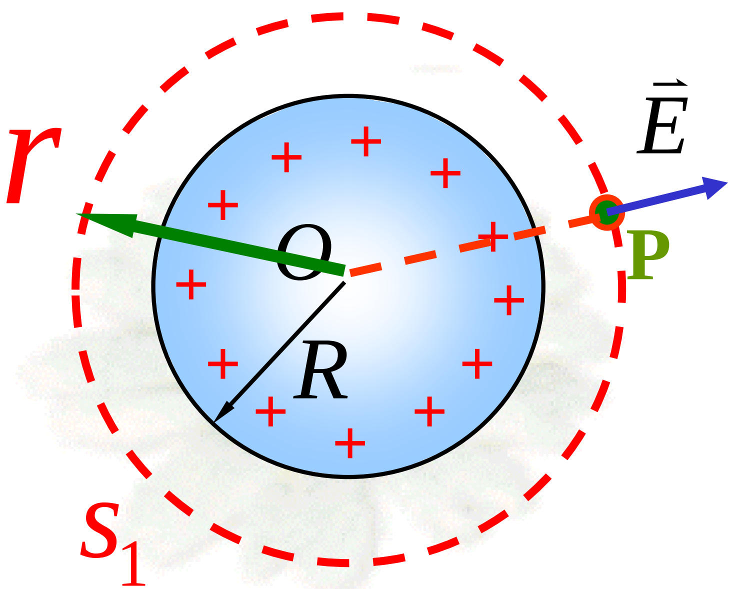
总结：球对称电场

球对称电场场强分布特点

到球心距离相等的各点

场强大小相等, 方向沿球径方向



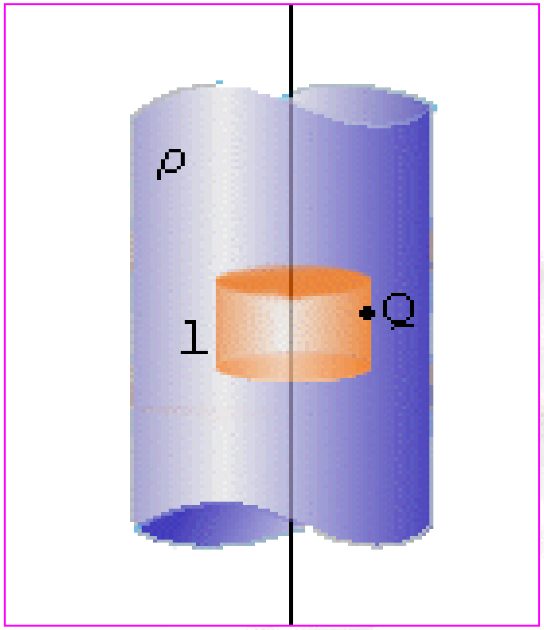


$$\phi_e = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = E 4\pi r^2$$

4. 高斯定理的应用

求解三类对称电场

第二类：轴对称电场



轴对称分布：

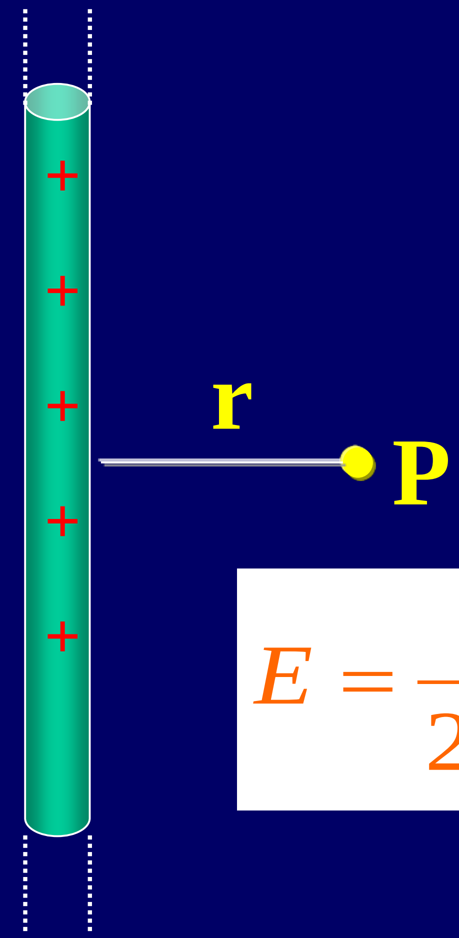
包括无限长均匀带电的直线；

无限长均匀带电圆柱面,

圆柱体；

例3 已知“无限长”均匀带电直线的电荷线密度为$+\lambda$

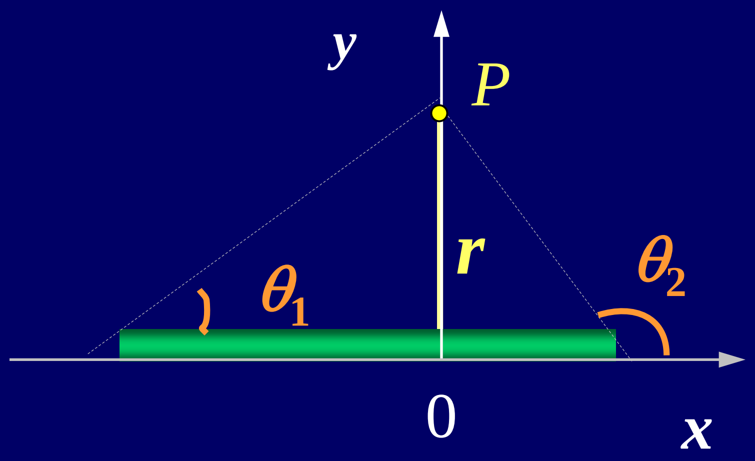
求 距直线r 处一点P 的电场强度



$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\boxed{E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)}$$

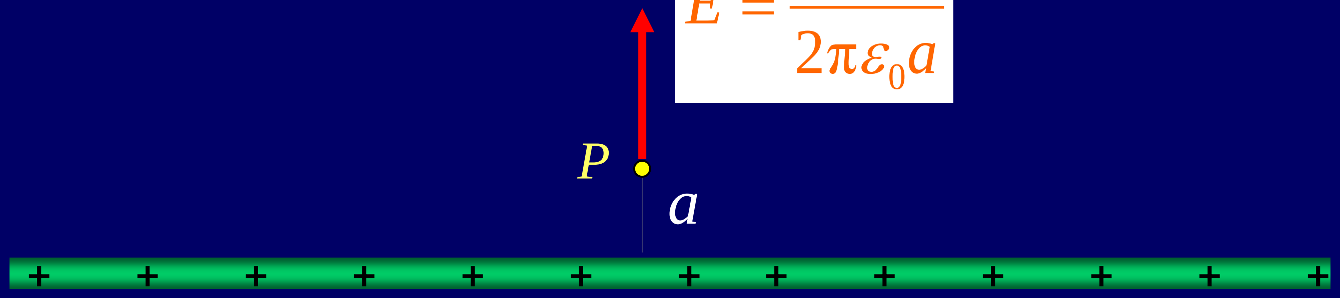
$$\boxed{E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)}$$



讨论 无限长带电直线

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 &= 0 \\ \theta_2 &= \pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad E_x = 0 \qquad E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}}$$

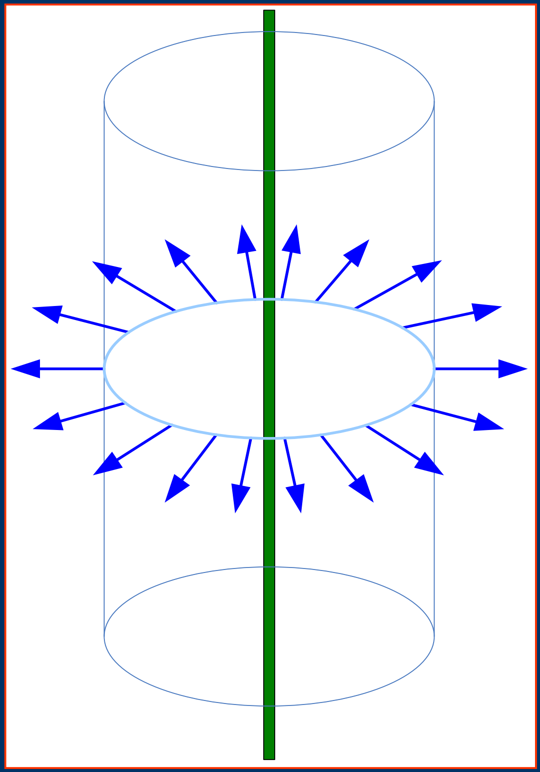


例3 已知“无限长”均匀带电直线的电荷线密度为$+\lambda$

求 距直线r处一点P的电场强度

解 对称性分析：轴对称

到无限长带电直线距离相等的各点
场强大小相等, 场强方向垂直于细棒, 呈辐射状



思考：

高斯面如何选择？

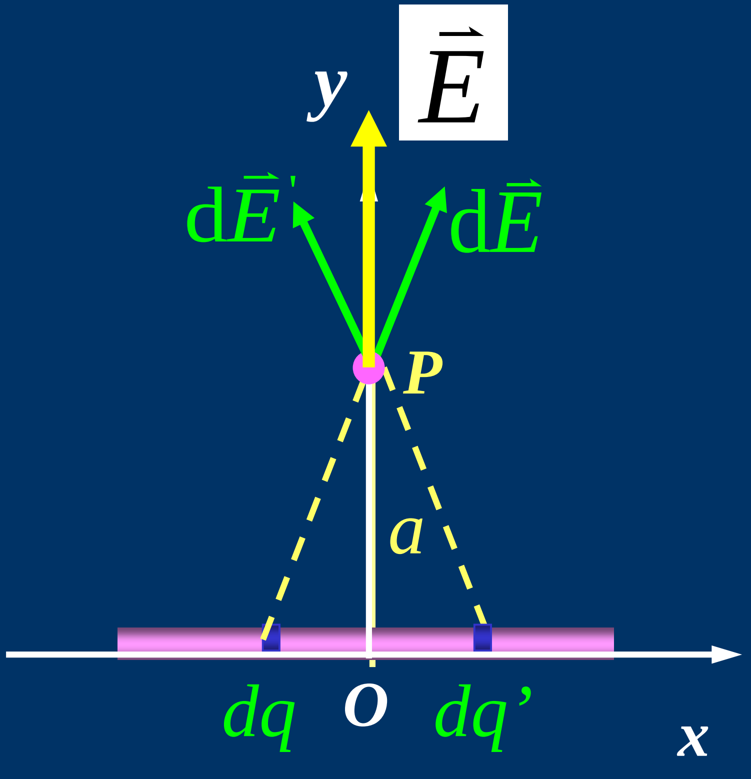
教材21页例题2

有限长带电直线中垂线上场强分布

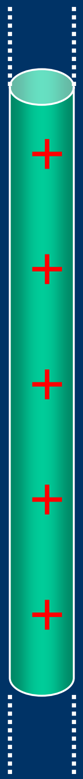
电荷元分布
关于y轴对称

$$\boxed{E_x = \int \mathrm{d}E_x = 0}$$

$$\therefore E = E_y = \int \mathrm{d}E_y$$



无限长均匀带电直线的场强



无限长带电直线外的**每一点**都可是视为直线的**中点**,所以直线外**各点**都可看作直线**中垂线上的点**.

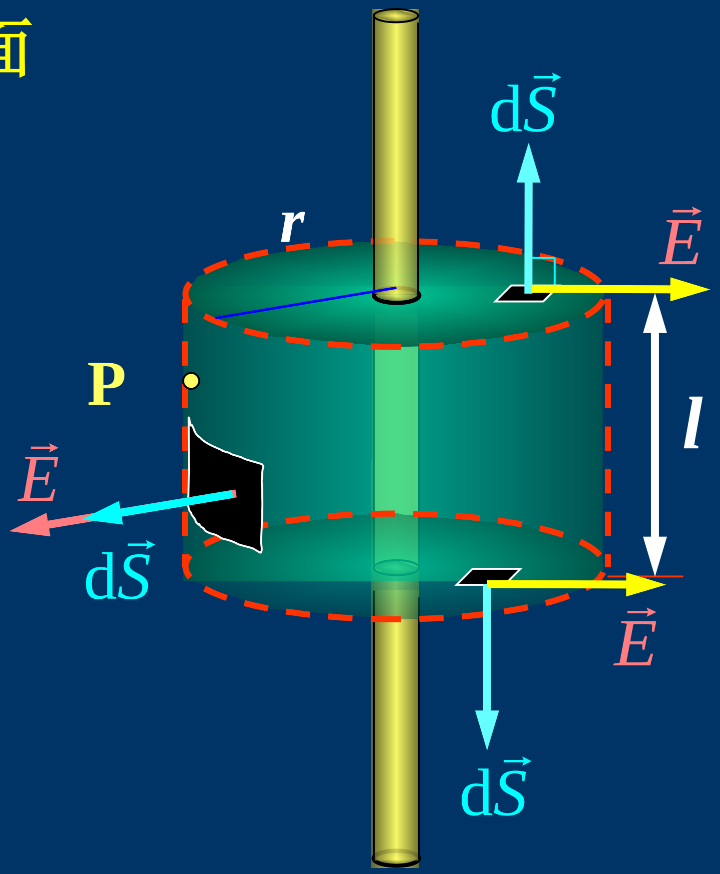
所以无限长带电直线场强分布特点为:

到直线距离相等的各点场强大小相等,

方向均垂直于细棒,呈辐射状

过P点作一个以带电直线为轴，

以l 为高的圆柱形闭合曲面S 作为高斯面



$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \int_{侧} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{上底} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{下底} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \int_{侧} E dS = E\int_{侧} dS$$

$$= E\cdot 2\pi r\cdot l$$

$$\sum_{s（内）} q_i = \lambda l$$

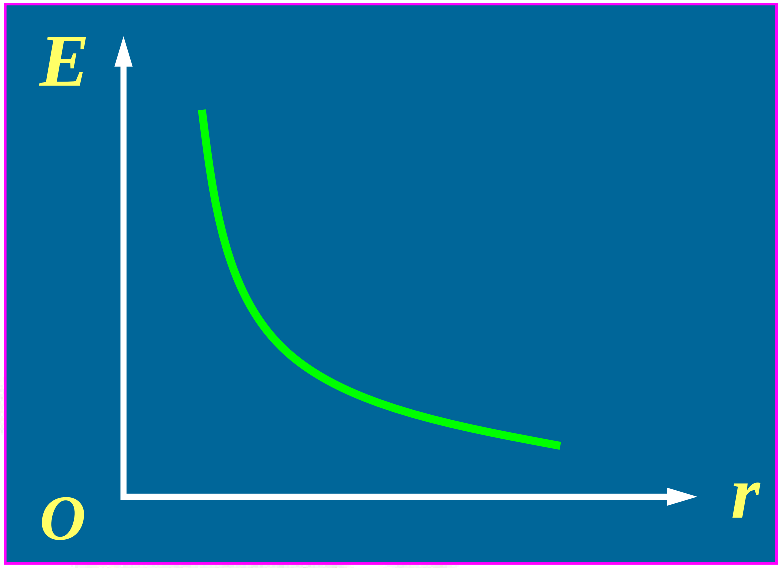
$$由\ \phi_e = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

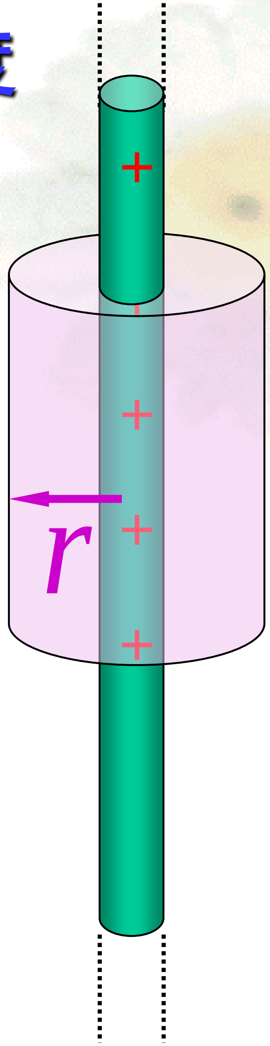
$$\Rightarrow$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\ \varepsilon_0 r}$$

“无限长”均匀带电直线的电场强度

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



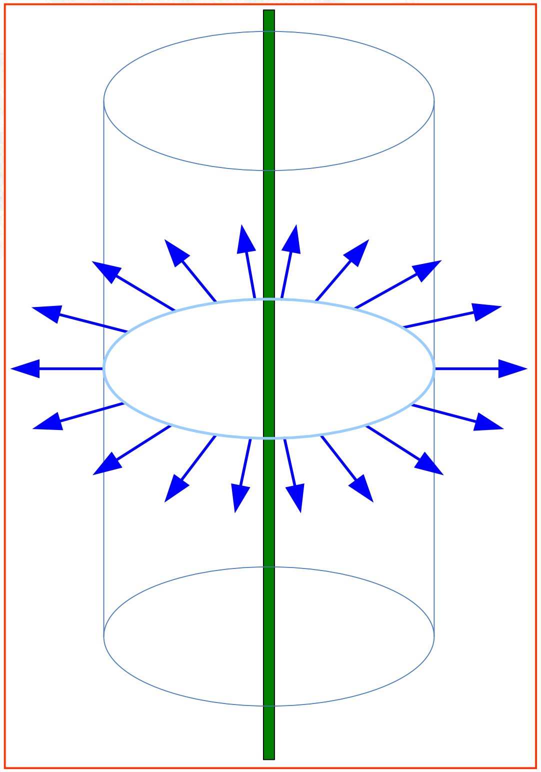


总结：轴对称电场

轴对称电场场强分布特点

到轴线距离相等的各点

场强大小相等，方向与轴线垂直

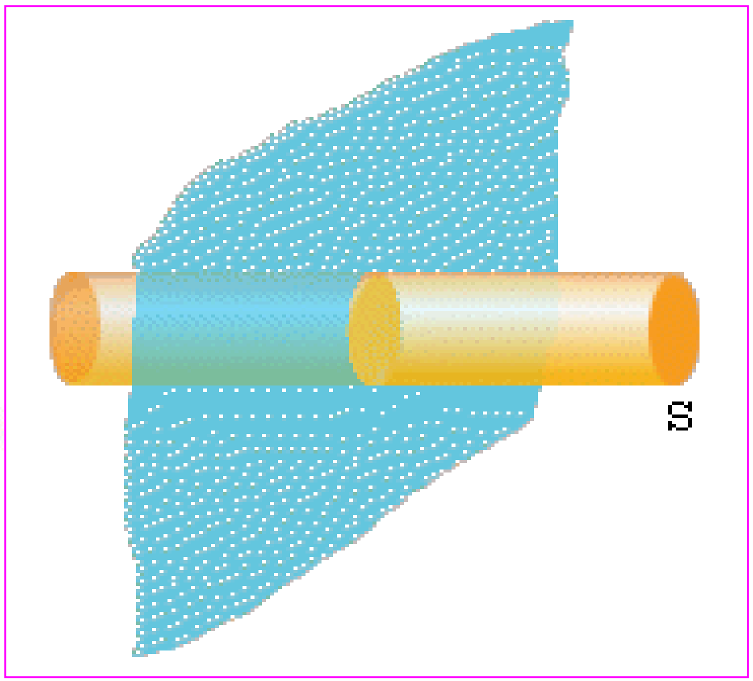


$$\phi_e = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = E2\pi rl$$

4. 高斯定理的应用

求解三类对称电场

第三类：面对称电场



面对称分布：

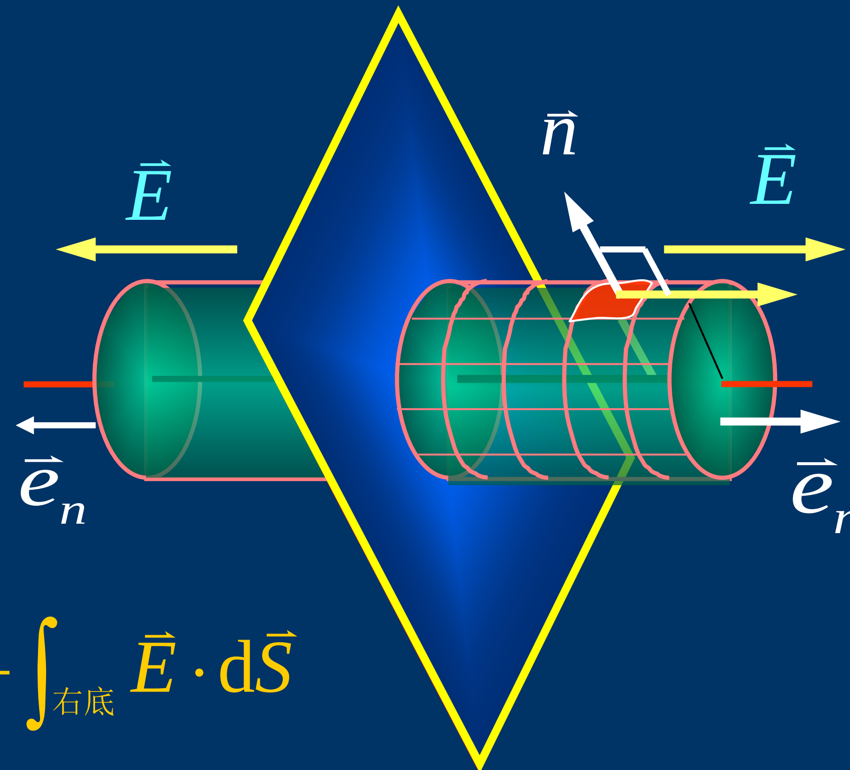
包括无限大的均匀带电平面，平板等

例 已知“无限大”均匀带电平面上电荷面密度为σ

求 电场强度分布

解 电场强度分布具有面对称性

选取一个圆柱形高斯面



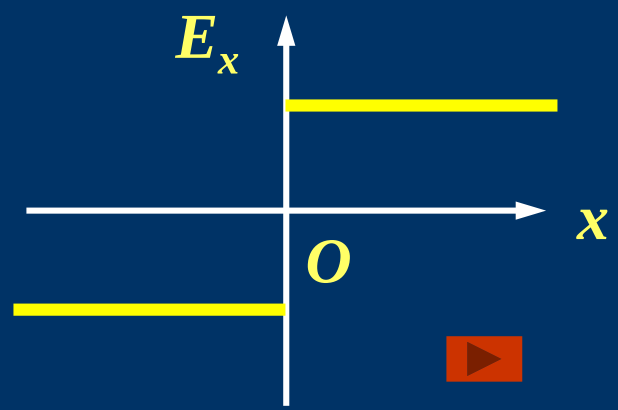
$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_{\text{侧}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{\text{左底}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{\text{右底}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

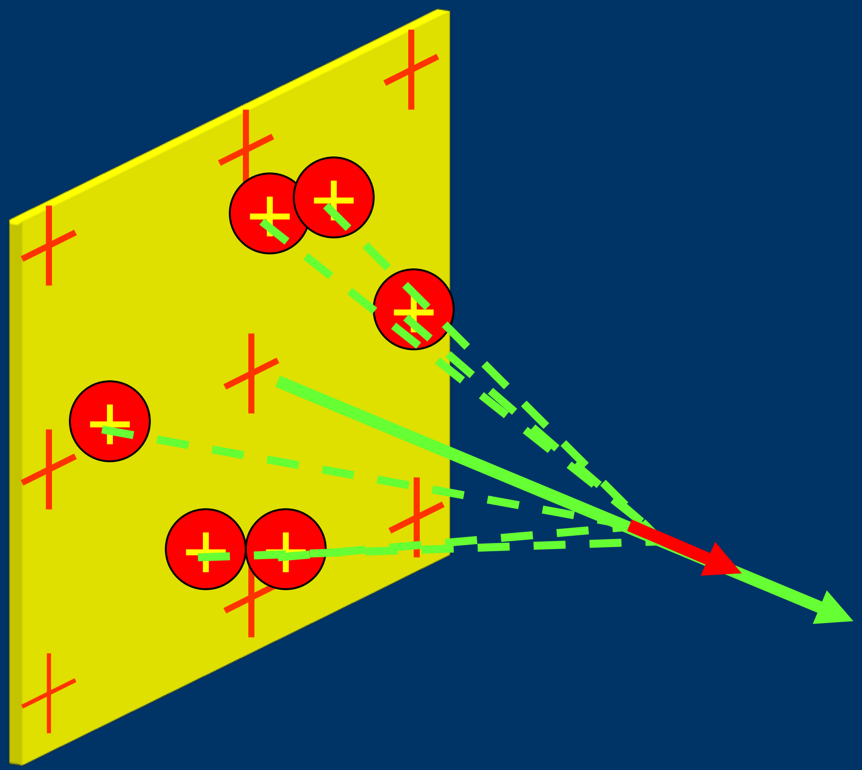
$$= 0 + ES + ES = 2ES$$

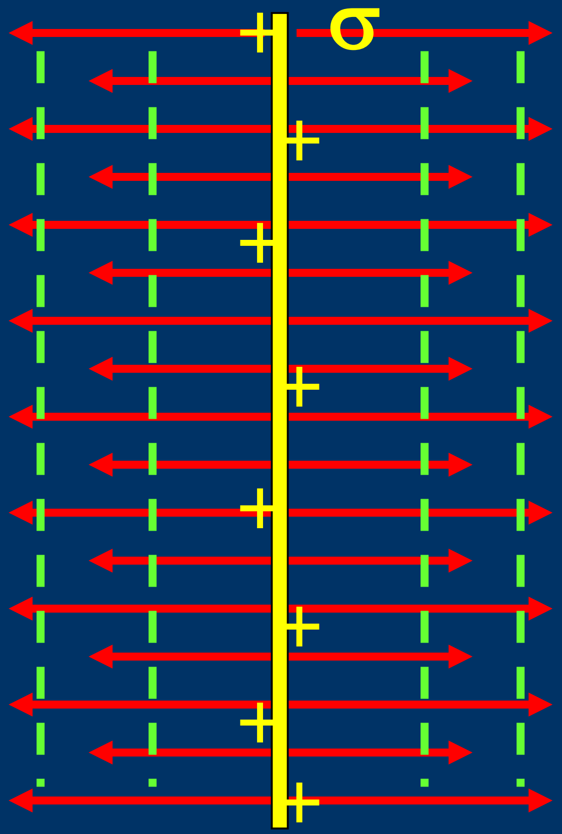
根据高斯定理有

$$2ES = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



对称性分析



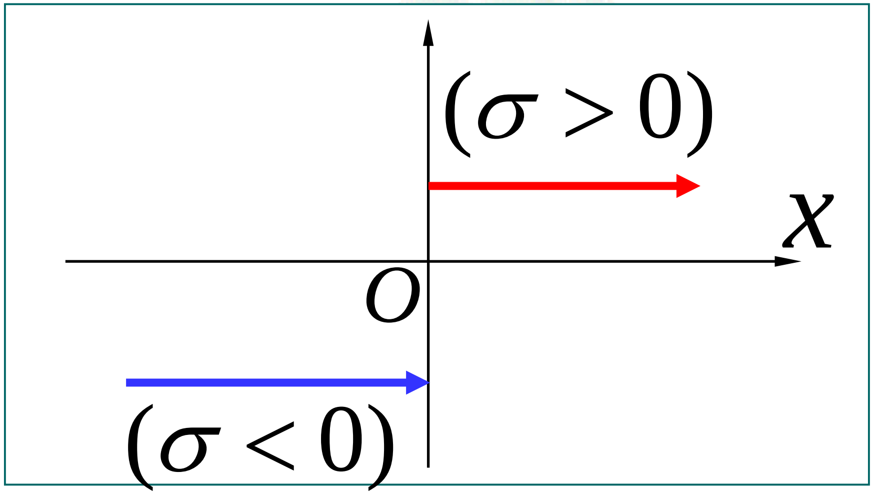


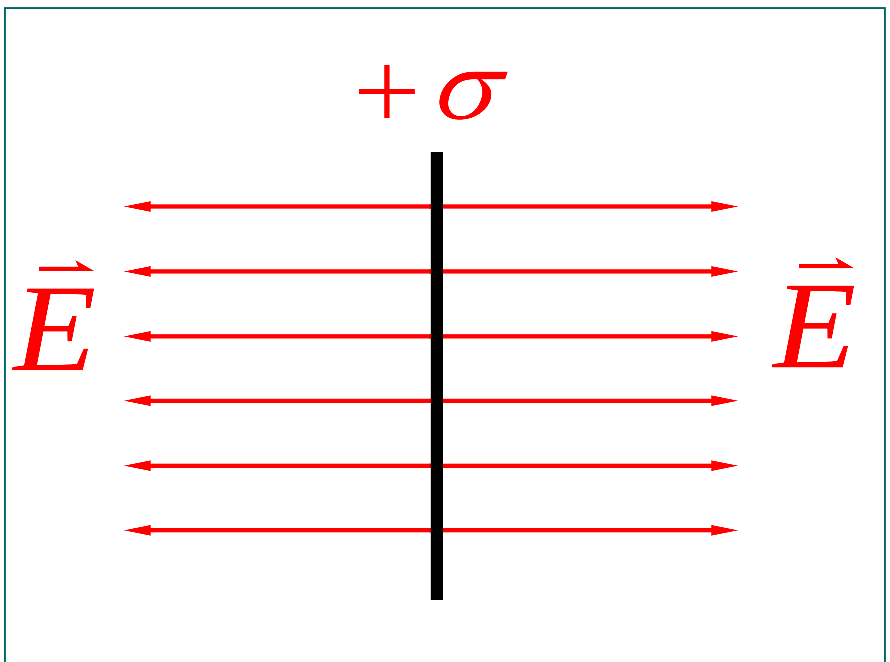
结论：

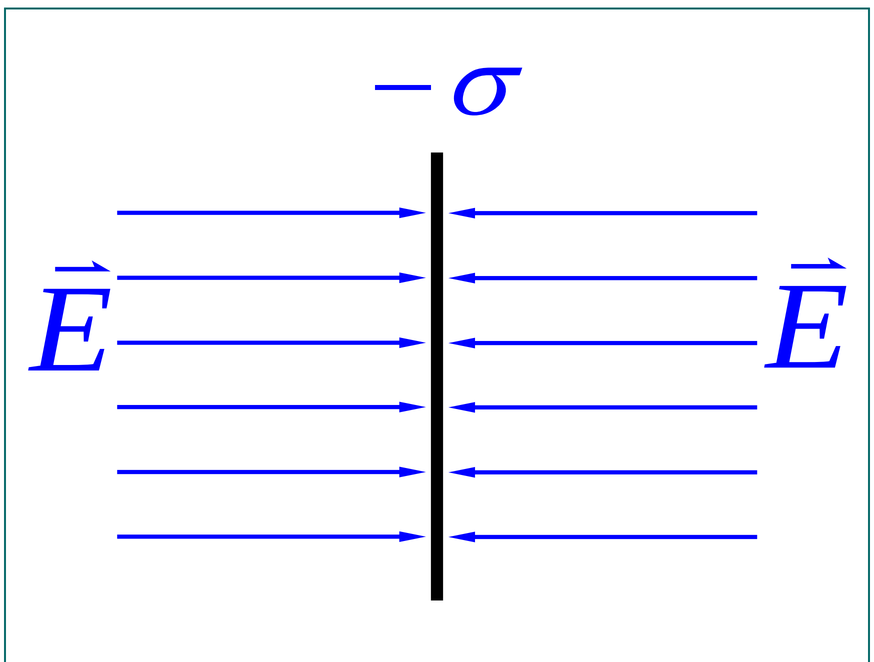
与带电面距离相等的各点场强相等，

方向与面垂直。

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

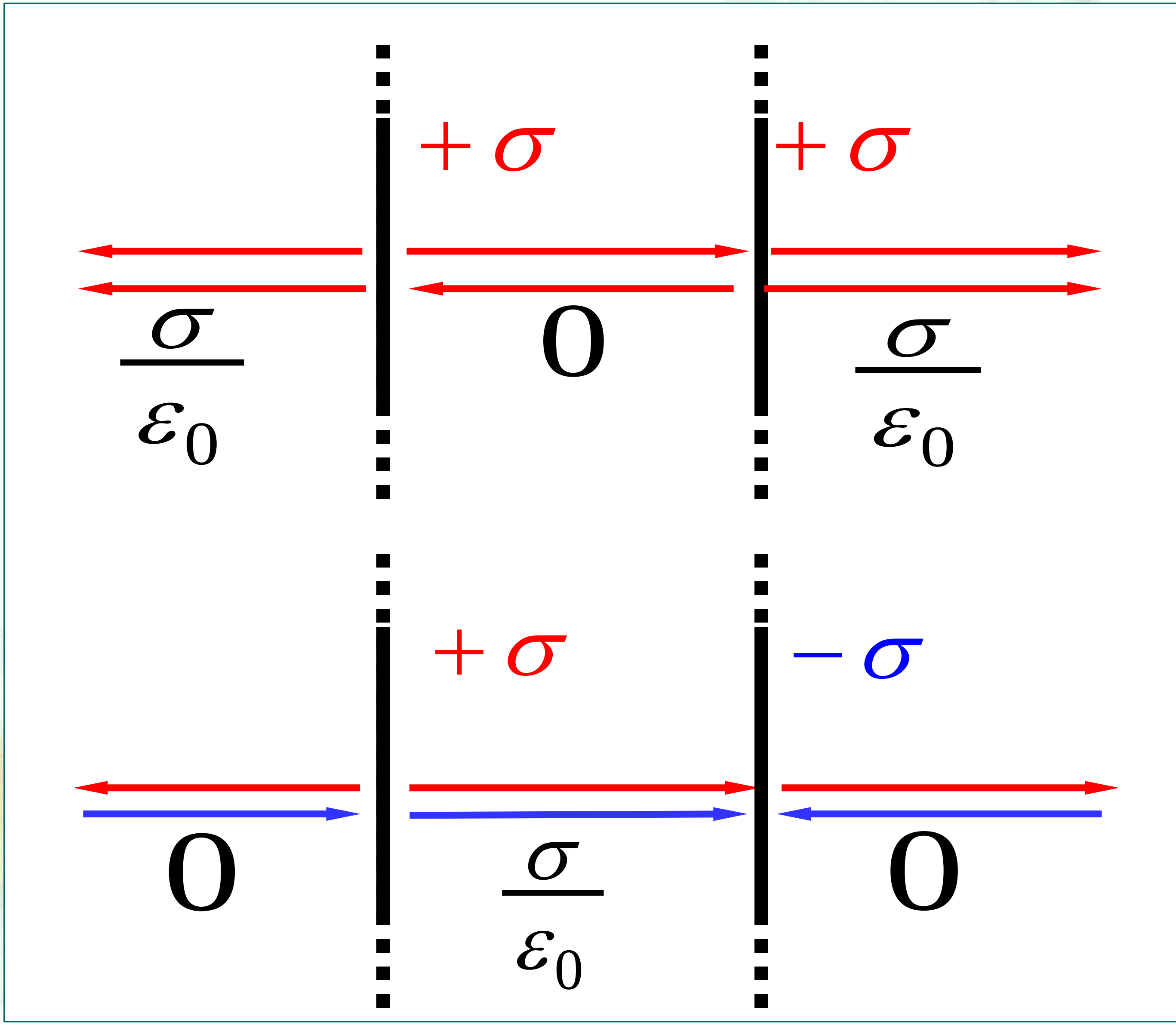






讨论

无限大带电平面的电场叠加问题

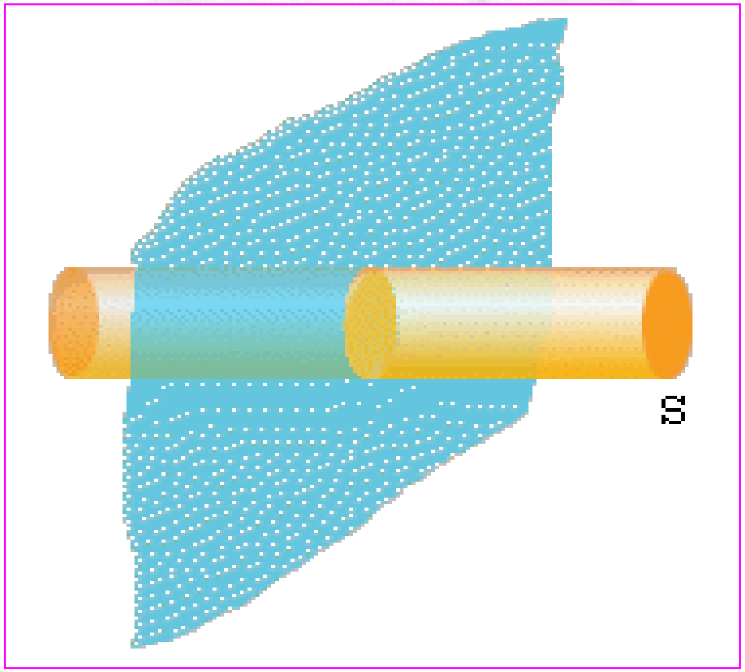


总结：面对称电场

面对称电场场强分布特点

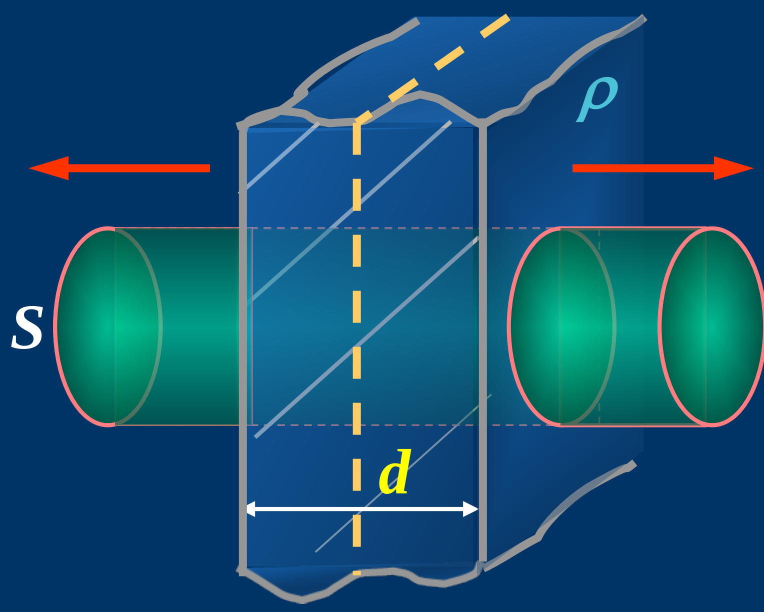
到带电面距离相等的各点

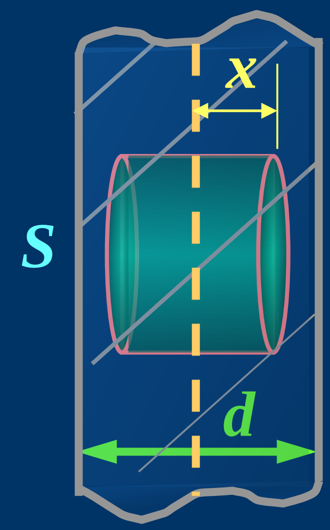
场强大小相等, 方向与面垂直



$$\phi_e = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = 2ES$$

作业1-16　无限大均匀带电板（厚度为d）





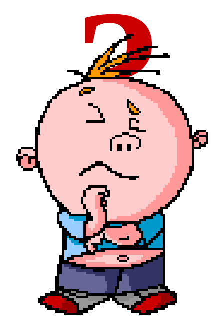
4. 高斯定理的**应用**

求解三类**对称电场**

$$\phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{\mathrm{in}}$$

为什么只能求解对称性电场中的$\vec{E}$

如何求对称性电场中的$\vec{E}$



总结： 静电场的高斯定理适用于一切静电场；

高斯定理并不能求出所有静电场的分布。

高斯定理求解电场分布

↑

场强 E 能否提出积分号 $\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$

↑ ↑

带电体电荷分布的对称性 | 建立的高斯面是否合适

电荷均匀分布

球面、球体 ⟶ 球面

无限大平面、平板 ⟶ 圆柱面

无限长圆柱面、圆柱体 ⟶ 圆柱面


第一章
真空中的静电场

§1-1 电荷和电荷守恒定律

§1-2 库仑定律

§1-3 电场和电场强度

§1-4 高斯定理

§1-5 静电场的环路定理 电势能

§1-6 电势 电势差

§1-7 等势面 电势与场强的微分关系

§1-5 静电场的环路定理　电势能

§1-6 电势　电势差

§1-7 等势面　电势与场强的微分关系

电荷 ⇄ 电场 ⇄ 电荷

- **电场对**置于其中的其它**电**荷施以力的作用。

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}$$

- 当**电**荷在静**电场**中移**动时**，**电场**力作功

问题：

静**电场**中**电场**力作功具有什么特点？

§1-5 静电场的环路定理

电势能

本节研究思路

一、研究静电场力做功的特点

二、静电场的环路定理

三、电势能

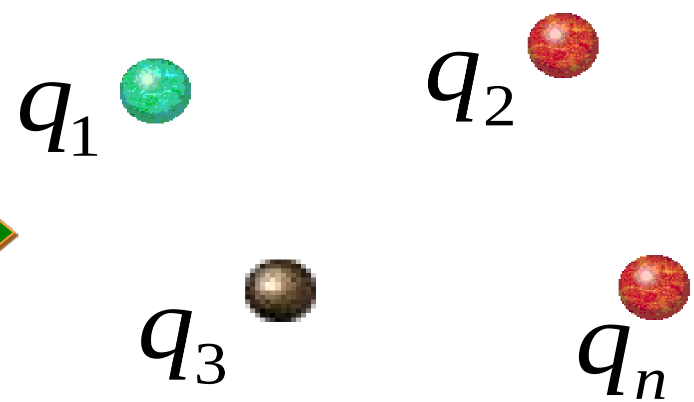
一、静电场力做功的特点

q

先研究：

单个**点电荷电场**中

电场力做功的特点



再研究：

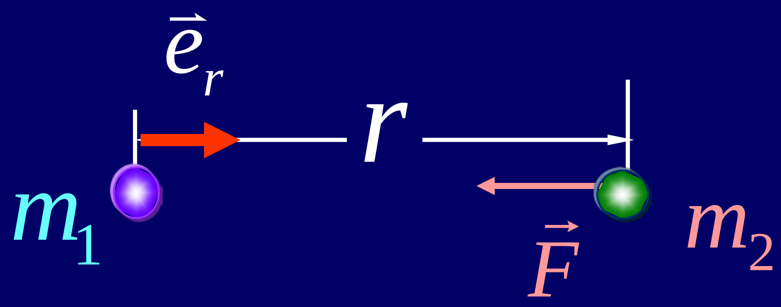
点电荷系统电场中

电场力做功的特点

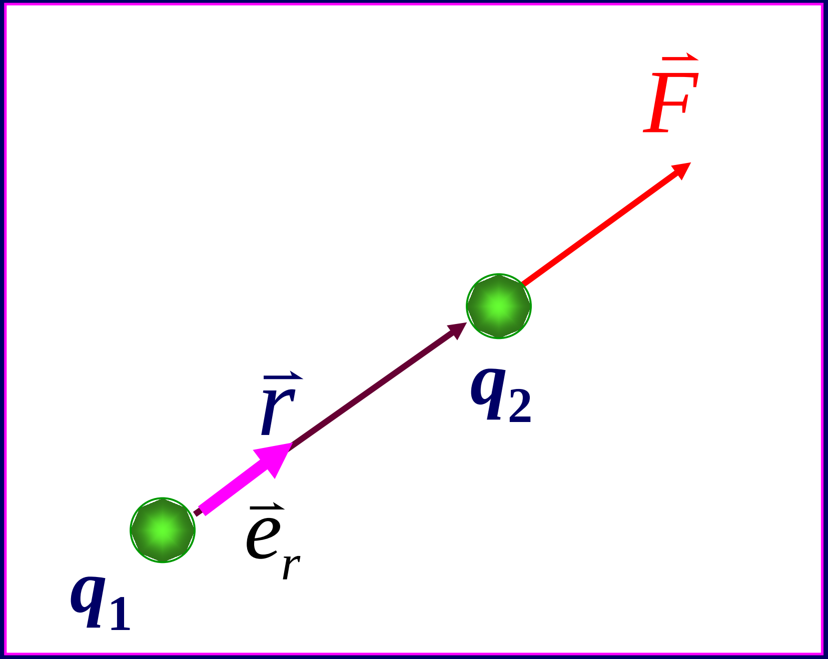
1. 点电荷产生的电场中电场力做的功(类比；推导）

(1) 类比万有引力做功

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_r$$

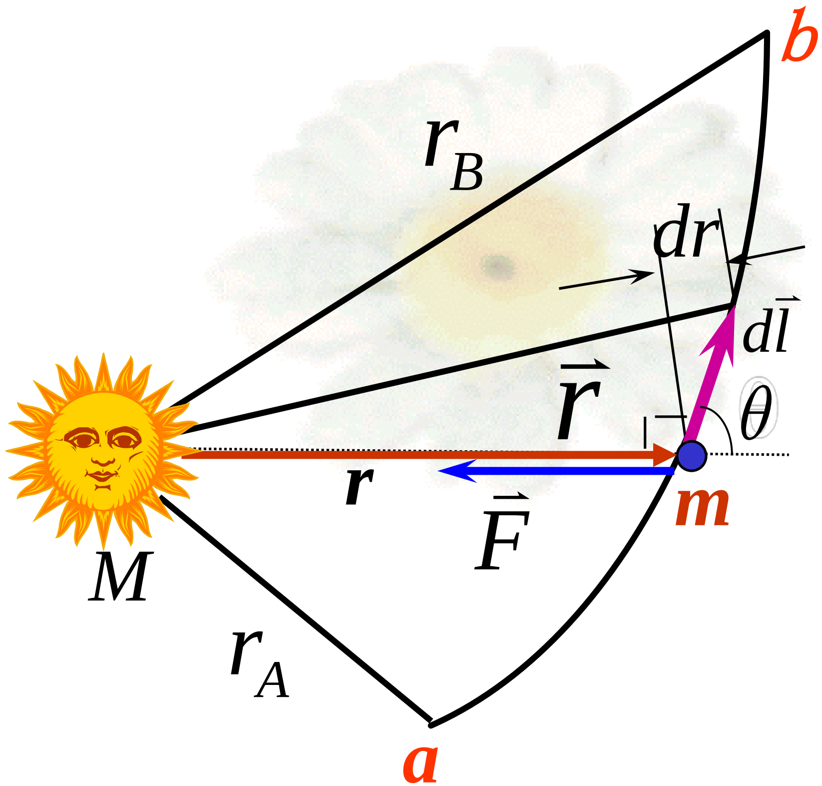


$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r$$



$$A_{ab}=\int_{r_a}^{r_b}-G\frac{mM}{r^2}\,\mathrm{d}\,r$$

$$\boxed{A_{ab}=GmM\left(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_a}\right)}$$

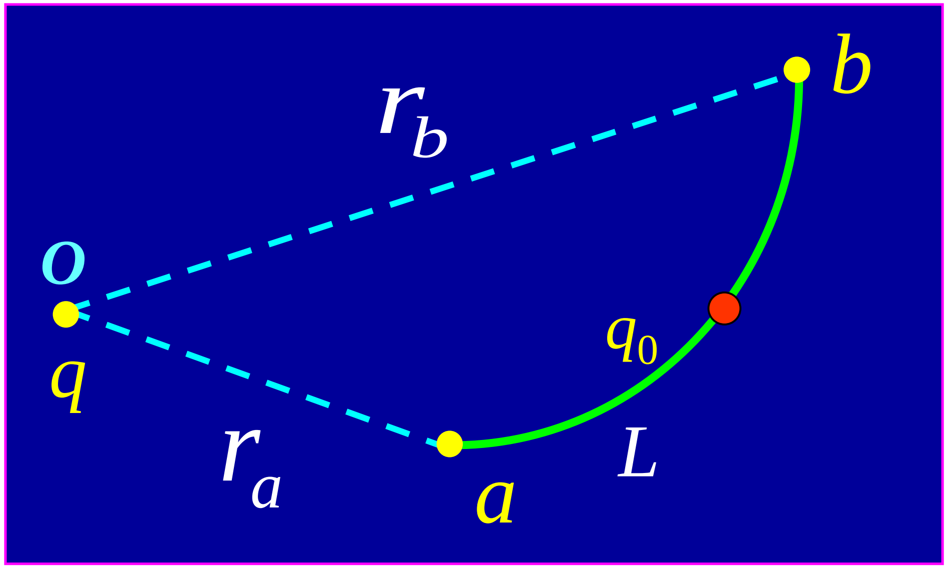


类比得到：

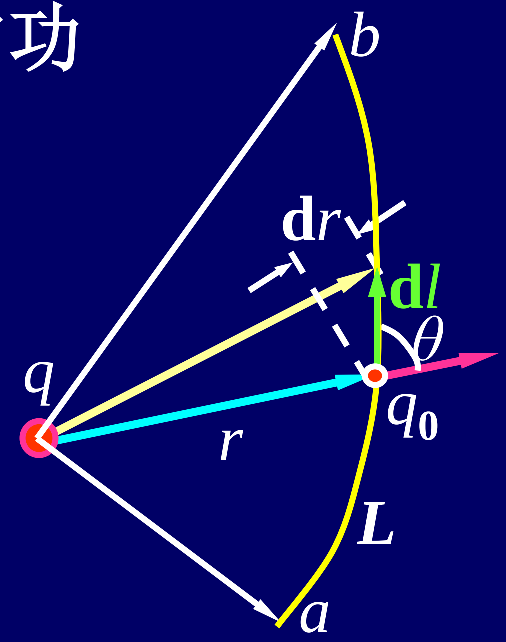
点**电**荷**电场**中静**电**力所做的功

$$A_{ab}=\int_{r_a}^{r_b}\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$A_{ab}=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$



(2). 推导点电荷产生的电场中电场力做的功



q_0 在场中受力 $\boxed{\vec{F}=q_0\vec{E}=q_0\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \text{ :变力}}$

q_0 的位移元 $\boxed{\mathrm{d}\vec{l}}$

电场力作元功 $\boxed{\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}}$

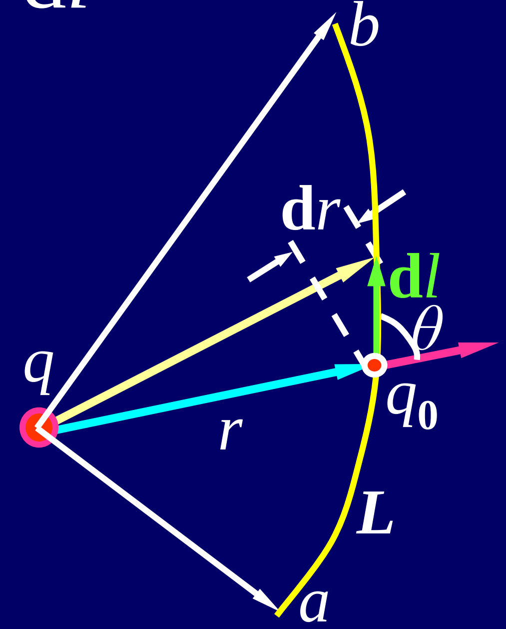
其中 $\cos\theta\,\mathrm{d}l=\mathrm{d}r$ 则 $\mathrm{d}A=q_0E\mathrm{d}r$

$a\rightarrow b$ 电场力做的总功: $\boxed{A_{ab}=\int_{r_a}^{r_b} q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}}$

$a \rightarrow b$电场力做的总功：$A_{ab} = \int_{r_a}^{r_b} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

故 $A_{ab} = \int_{r_a}^{r_b} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{r_a}^{r_b} q_0 E \mathrm{d}r$

$$= \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$



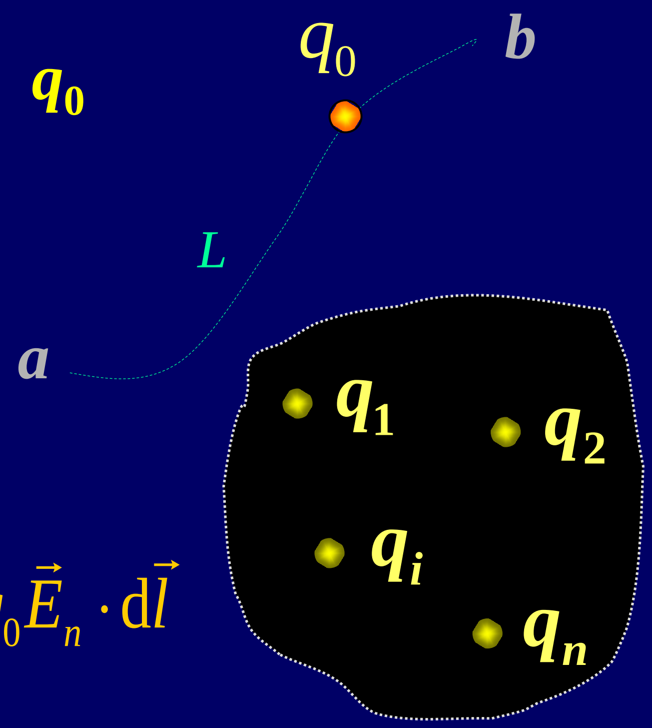
结论：

点电荷电场中静电场力做功与路径无关，

只由始末位置决定。

2. 点电荷系统产生的电场

在电荷系q_1、q_2、…产生的电场中，移动 q_0



$$A_{ab}=\int_{a(L)}^{b} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{a(L)}^{b} q_0(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots\vec{E}_n)\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{a(L)}^{b} q_0\vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_{a(L)}^{b} q_0\vec{E}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\cdots+\int_{a(L)}^{b} q_0\vec{E}_n\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

每一项都与路径无关

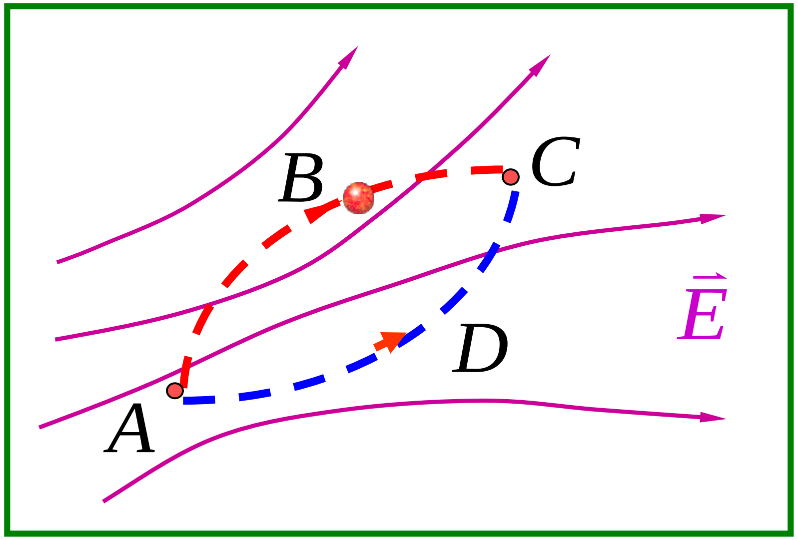
结论：

点电荷系统电场中，电场力移动q_0 做功**与路径无关**

3、静电场力做功的特点

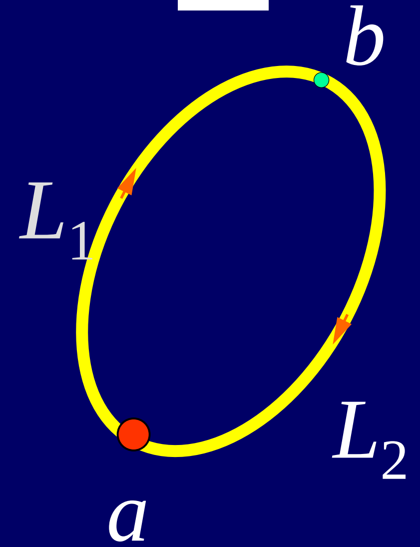
静电场力做功与路径无关，只由始末位置决定。

$$\int_{ABC} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{ADC} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



二、静电场的环路定理

在静电场中，沿闭合路径移动q_0，电场力做功A= 0



$$A=\oint_l q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{a(L_1)}^{b} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_{b(L_2)}^{a} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{a(L_1)}^{b} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}-\int_{a(L_2)}^{b} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=0$$

q_0 由 a 点经 L_1 到达 b 点所做的功

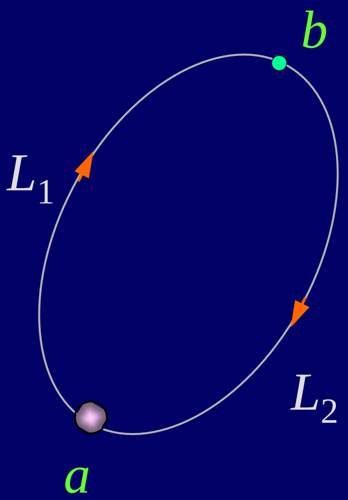
q_0 由 a 点经 L_2 到达 b 点所做的功

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

静电场的环路定理

在静电场中，沿闭合路径移动q_0，电场力做功A= **0**

$$\int_{a(L_1)}^{b} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{a(L_2)}^{b} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

反映

静电力是保守力

静电场是保守力场

总结真空中静电场的两个基本定理

高斯定理	环路定理
反映闭合曲面**电通量**的规律	反映**静电场力做功**的特点
$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$	$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$
静电场是**有源场**	静电场是**保守场**

三、电势能W

1. 电势能的引入

2. 两点电势能的差

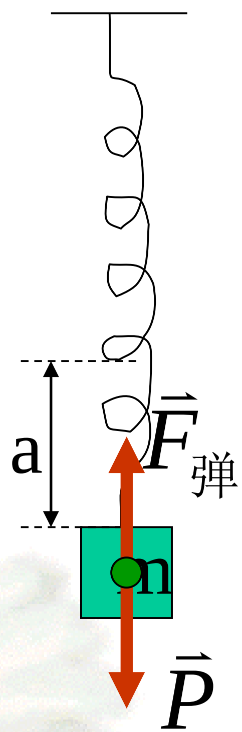
$$W_{PP_0} = W_P - W_{P_0} = ?$$

3. 某点的电势能

$$W_P = ?$$

回顾力学中的**势能**

◆引入**势**能的条件：系**统**内部存在保守力



例：物体、地球和**弹簧为**研究系**统**，

系**统**内存在重力**势**能和**弹**性**势**能

回顾力学中的**势能**

◆**保守力作功**等于**势能**增量的**负值**, 或等于**势能的减少量**

$$A_{保} = -\left(E_{p2} - E_{p1}\right) = E_{P1} - E_{P2}$$

$$E_{p_1} = \int_{p_1}^{"0"} \vec{F}_{保} \cdot d\vec{r}$$

◆**势能具有相对性，势能差是绝对的**

三、电势能W

1. 电势能的引入

$$\boxed{\oint_l \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0}$$

$\Downarrow$

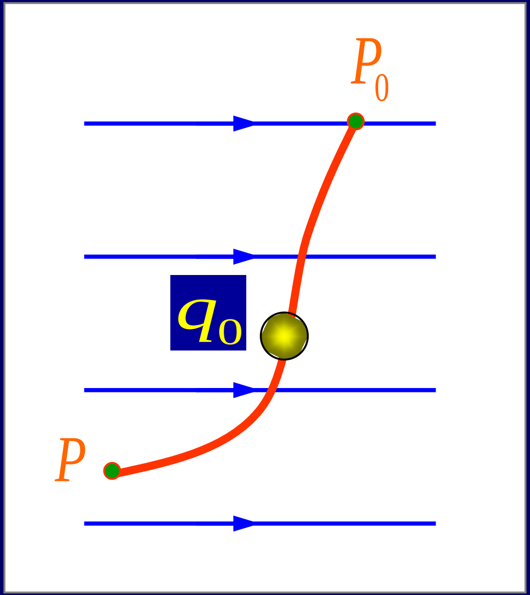
静**电场**是保守力**场**

$\Downarrow$

引入电势能

2. 电势能的差 $\boxed{W_{PP_0}=W_P-W_{P_0}=?}$

（1）定义 ⇐ $A_{保}=E_{P1}-E_{P2}$



q_0在P、P_0两点电势能之差

等于把 q_0 自 P 点移至 P_0点电场力所做的功

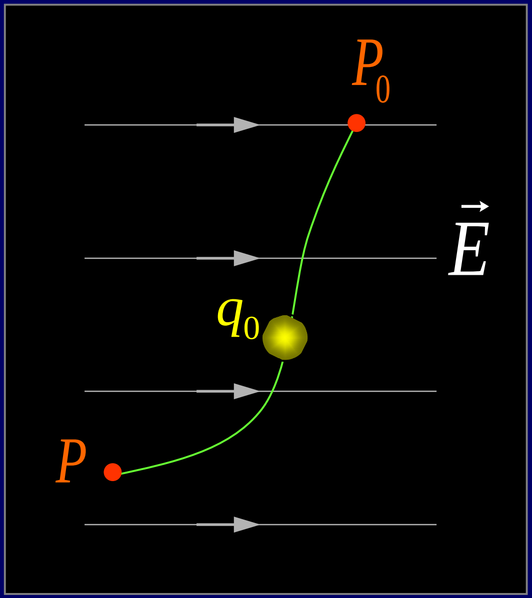
（2）表达式

$$\boxed{W_P-W_{P_0}=A_{PP_0}}$$

$$\boxed{A_{PP_0}=\int_P^{P_0}q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

$$\boxed{W_{PP_0}-W_{P_0}=\int_P^{P_0}q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

$$W_{PP_0} = A_{PP_0} = \int_P^{P_0} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



3. 电势能

取P_0点为势能零点　$W_{P0} = W_{“0”} = 0$

q_0 在电场中某点 P 的电势能：

$$W_P = A_{p\to"0"} = \int_P^{"0"} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

q_0在场中某点P的电势能

等于将q_0从该点P经任意路径移到零势能点时电场力对q_0所作的功。

$$W_{PP_0} = A_{PP_0} = \int_P^{P_0} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$W_P = A_{P\to"0"} = \int_P^{"0"} q_0 \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$$

说明

(1) 电荷在某点的电势能与零点有关，而两点的差值与零点无关。

(2) 选电势能零点习惯和原则：

●当(源)电荷分布在有限范围内时，一般选在无穷远处。

$$W_P = \int_P^{\infty} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

●对无限（长、大）带电体系，必须选有限远处电势能为零。

$$W_P = \int_P^{Q} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

(3) 电势能应属于 q_0 和产生电场的源电荷系统共有。

例 如图所示，在带电量为 Q 的点电荷所产生的静电场中，有一带电量为q 的点电荷

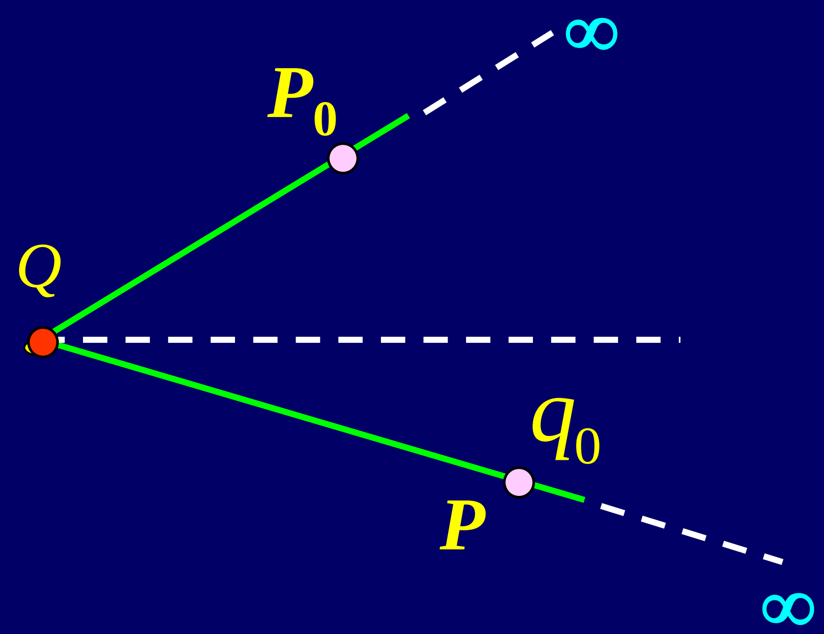
求 q_0 在P 点和 P_0 点的电势能

$$A_{P\to P_0}=\int_{P(L)}^{P_0} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_P}-\frac{1}{r_{P_0}}\right)$$

而：$A_{P\to P_0}=W_P-W_{P_0}$

$$\therefore W_P=\frac{q_0Q}{4\pi\varepsilon_0 r_P} \qquad W_{P_0}=\frac{q_0Q}{4\pi\varepsilon_0 r_{P_0}}$$



§1-5 静电场的环路定理　电势能

§1-6 电势　电势差

§1-7 等势面　电势与场强的微分关系

电势 φ

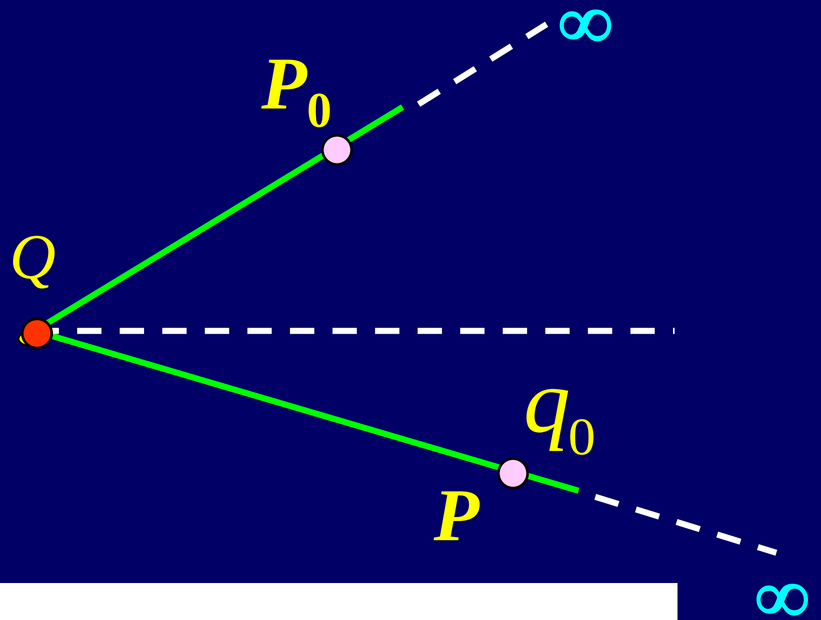
电势能 W

静电场的环路定理

§1-6 电势 电势差

一．电势的定义

1、q_0在点电荷Q的电场中
电势能的特点



$$W_P = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0 r_P}$$

结论1：

电势能不**仅**与**源电荷**和研究点位置有关，**还与检验电**荷有关

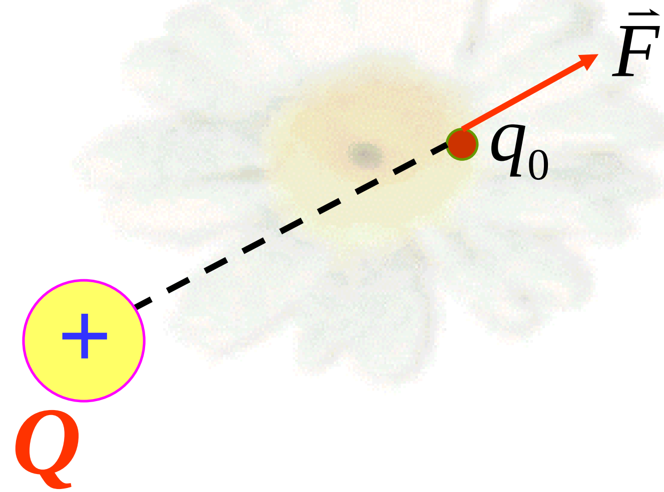
$$\frac{W_P}{q_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_P}$$

结论2：电荷在点**电场**中某点具有的**电势能与电荷电量**的比值

只与**场源电**荷和研究点的位置有关，与**检验电**荷无关

回顾检验电荷在点电荷电场中的受力特点

$$\vec{F}=\frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$



结论1：

F不仅源电荷和研究点位置有关，还与检验电荷有关。

$$\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

结论2：

F 与q_0之比只与场源电荷Q和电场中各点位置有关与检验电荷无关

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$$

一. 电势的定义

$$\frac{W_P}{q_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_P}$$

结论：**电**荷在点**电场**中某点具有的**电势能与电荷电量的比值**

只与场源电荷和研究点的位置有关，与检验电荷无关

$$\varphi_P = \frac{W_P}{q_0}$$

静**电场**中**某点的电势**，

等于**单位正电荷处**在**该**点**时**的**电势能**

$$\varphi_P = \int_P^{"0"} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

静**电场**中某点的**电势**

也等于将**单位正电荷从该点经**任意路径

移至电势参考点时，**电场**力所作的功。

◆讨论 $$\varphi_P = \frac{W_P}{q_0} = \int_P^{"0"} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

（1）电势是描述静电场中各点“能量”性质的物理量，

与试验电荷无关，仅有场源和研究点位置决定

类比：电场强度 $$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

电场强度是描述静电场中各点“力”性质的物理量，

与试验电荷无关，仅有场源和研究点位置决定

◆讨论 $\varphi_P = \frac{W_P}{q_0} = \int_P^{"0"} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

（2）电势是**标量**，有正负、高低之分。

（3）**正电荷**在电场力作用下从**高**电势点**移向低**电势点

（4）沿电场线方向**电势逐点降低。**

- 在同一根电场线上找不到电势相同的两点；
- 同一根电场线起点电势高于终点电势。

教材59页思考题：

1-10；1-12；1-13；1-14.

◆讨论 $\varphi_P = \dfrac{W_P}{q_0} = \int_P^{"0"} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

（5）电势的值是相对的，与电势零点的选择有关

◆ 对有限大带电体，通常选无限远处电势为零

$$\boxed{\varphi_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

◆对无限大带电体，通常选有限远处Q电势为零

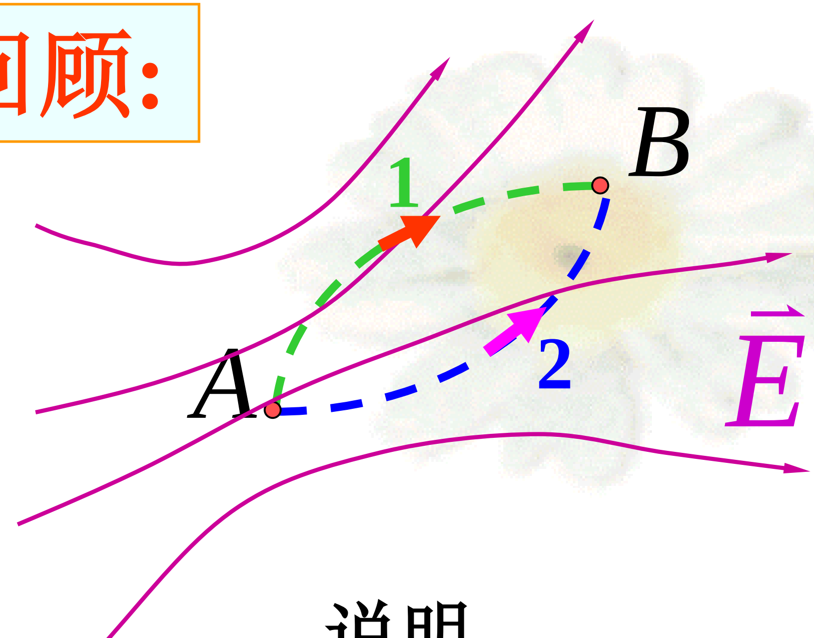
$$\boxed{\varphi_P = \int_P^{Q} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

§1-5 静电场的环路定理　电势能

§1-6 电势　电势差

§1-7 等势面　电势与场强的微分关系

知识回顾:



静电场力**做功的特点:**

$$\int_{A1B} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{A2B} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\boxed{\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0}$$

:静电场的**环路定理** $\xrightarrow{\text{说明}}$ 静电场**是保守力场**

引入 → 电势能 ***W***

$$W_{PP_0} = \int_P^{P_0} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \qquad W_P = \int_P^{\text{参}} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

引入 → 电势 φ

$$\boxed{\varphi_P = \frac{W_P}{q_0} = \int_P^{"0"} \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

二、电势差（又叫电压）

$$\boxed{U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B}$$

$$\because \varphi_P = \frac{W_P}{q_0}$$

$$\boxed{U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{W_{AB}}{q_0}}$$

$$\because W_{AB} = A_{AB}$$

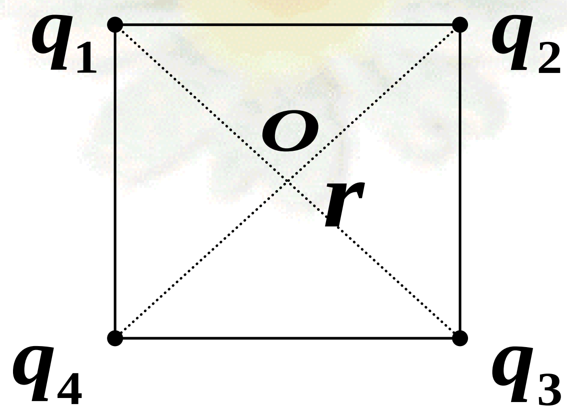
静**电场**中*A*, *B* 两点的**电势差数值**上等于

单位正电荷在*A*, *B* 两点所具有的**电势**能的差

一个重要推论公式：

$$A_{AB} = W_{AB} = q_0(\varphi_A - \varphi_B)$$

例1： 已知正方形顶点有四个等量的电点荷 $4.0\times10^{-9}C$ r=5cm



①将 $q_0 = 1.0\times10^{-9}c$ 从 $\infty \longrightarrow 0$ 电场力所作的功

$$\boxed{A_{\infty o} = q_0(\varphi_\infty - \varphi_o)}$$

② 求该过程中电势能的改变

$$\boxed{W_{\infty o} = A_{\infty o}}$$

$$U_{AB}=\varphi_A-\varphi_B$$

$$\because \varphi_A=\int_A^{"0"}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\therefore U_{AB}=\int_A^{"0"}\vec{E}\cdot d\vec{l}-\int_B^{"0"}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_A^{"0"}\vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_{"0"}^{B}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\boxed{U_{AB}=\int_A^{B}\vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

（任意路径）

静**电场**中*A*, *B* 两点的**电势差数值**上也等于

把**单**位正**电**荷在*A*点移到*B* 点**电场**力所做的功

电势差是一个**绝对量**，它与**电势**零点**选择**无关

$$\varphi_P = \frac{W_P}{q_0} = \int_P^{"0"} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

◆**对应电场**中**确定的点,就有确定的电势**

如何**求解给**定**电场**中的**电势分布?**

三. 电势的计算（▲）

三. 电势的计算

电势的计算将介绍两种方法:

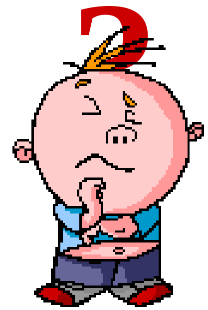
方法一:

根据电势定义式, $\boxed{\varphi_p = \int_p^{"0"} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$

由已知场强分布, 求电势分布

方法一、运用电势的**定义式**计算电势：

$$\varphi_p = \int_p^{"0"} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



◆要求**场强分布规律**已知；

◆要求**选择简**便的**积分路径**。

$\vec{E} // d\vec{l}$ → 沿着**场强**方向**选择积**分路径

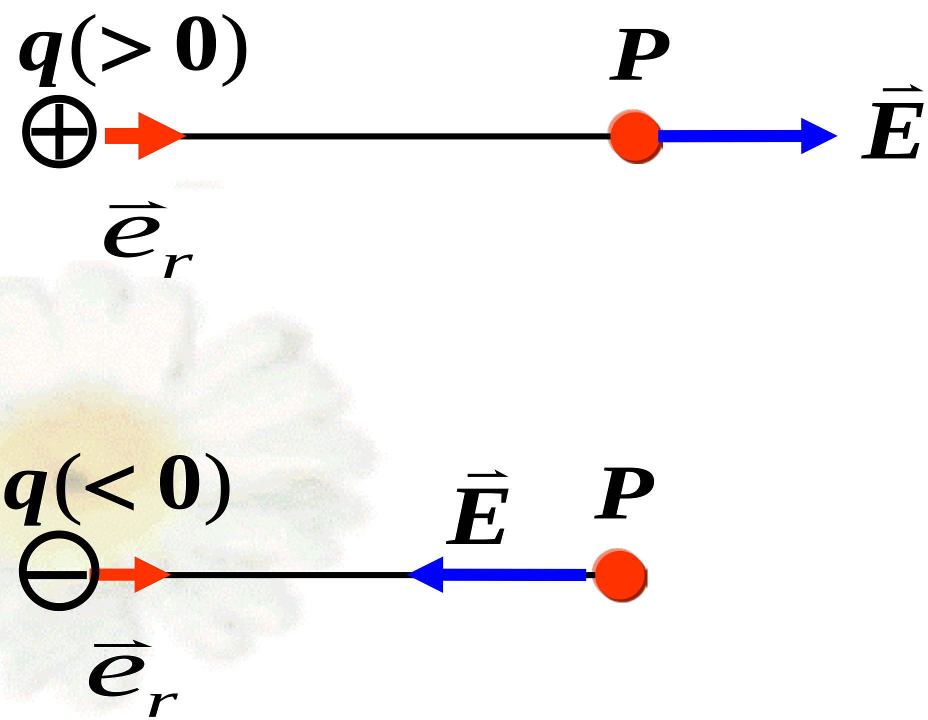
◆ 要求**选择**合适的**电势参考点**

点电荷电场的

场强分布**规律**

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

$\vec{e}_r$：从源点指向场点的单位矢量



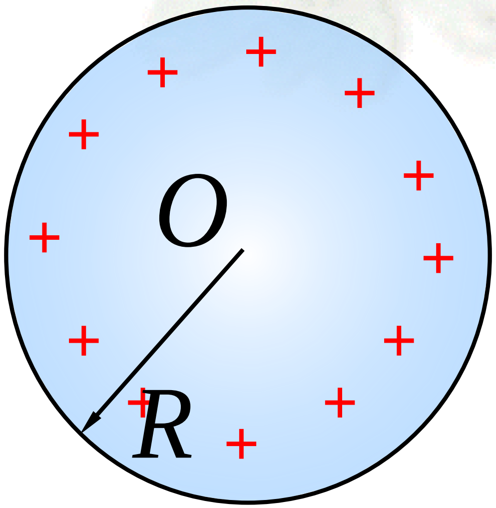
均匀带电球面的电场强度

（1）$r > R$:

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

（2）$0 < r < R$:

$$\boxed{\vec{E} = 0}$$



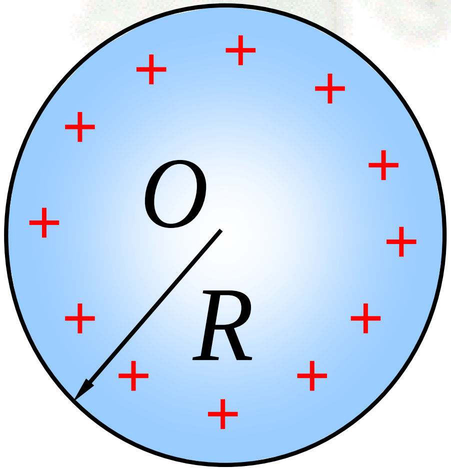
均匀带电球体的电场强度

（1） $r > R:$

$$\boxed{E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}}$$

（2） $r < R:$

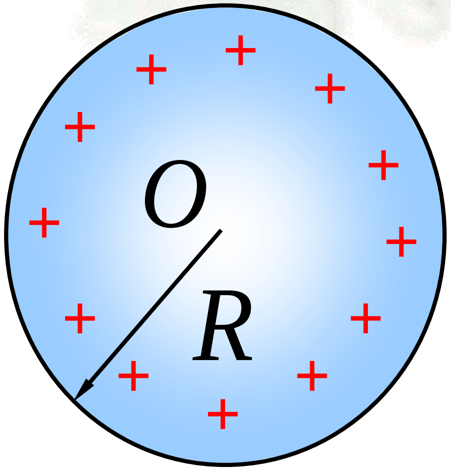
$$\boxed{E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}}$$



均匀带电球体的电场强度

（1）$r > R$:

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

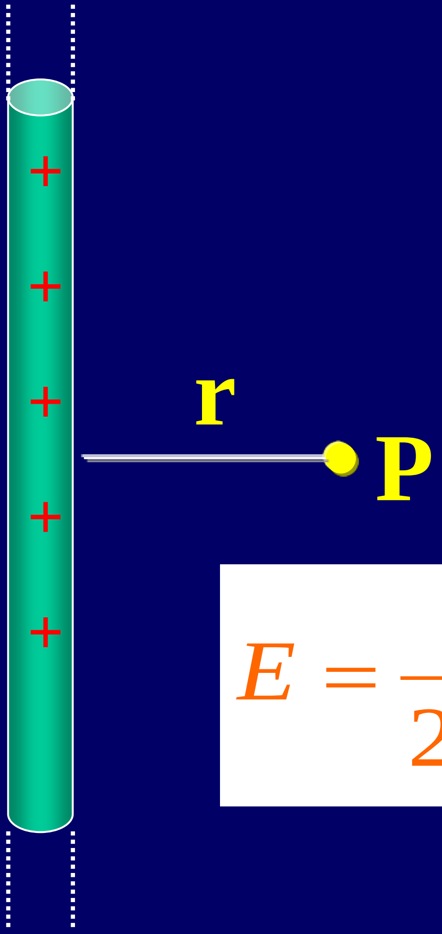


（2）$r < R$:

$$\boxed{E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}}$$

已知"无限长"均匀带电直线的电荷线密度为$+\lambda$

求　距直线r处一点P的电场强度



$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

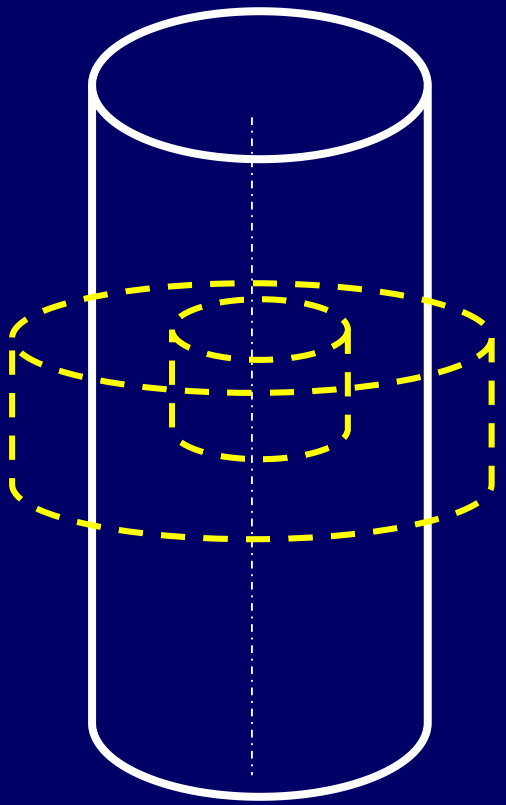
一均匀带电的无限长直柱体，半径为R，电荷体密度为ρ，求柱内外的场强。

$r<R$:

$$E=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

$r>R$:

$$E=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$



方法一、运用电势的定义式计算电势解题步骤：

1、写出电场空间的场强分布规律

2、选择电势参考点

$$\boxed{\text{对于有限大带电体}:\varphi_p=\int_p^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

$$\boxed{\text{对于无限大带电体}:\varphi_p=\int_p^{Q}\vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

3、沿着场强方向选择积分路径

4、求积分，求解出电势

例1、点电荷电场的电势

① 点电荷电场的场强分布规律为：

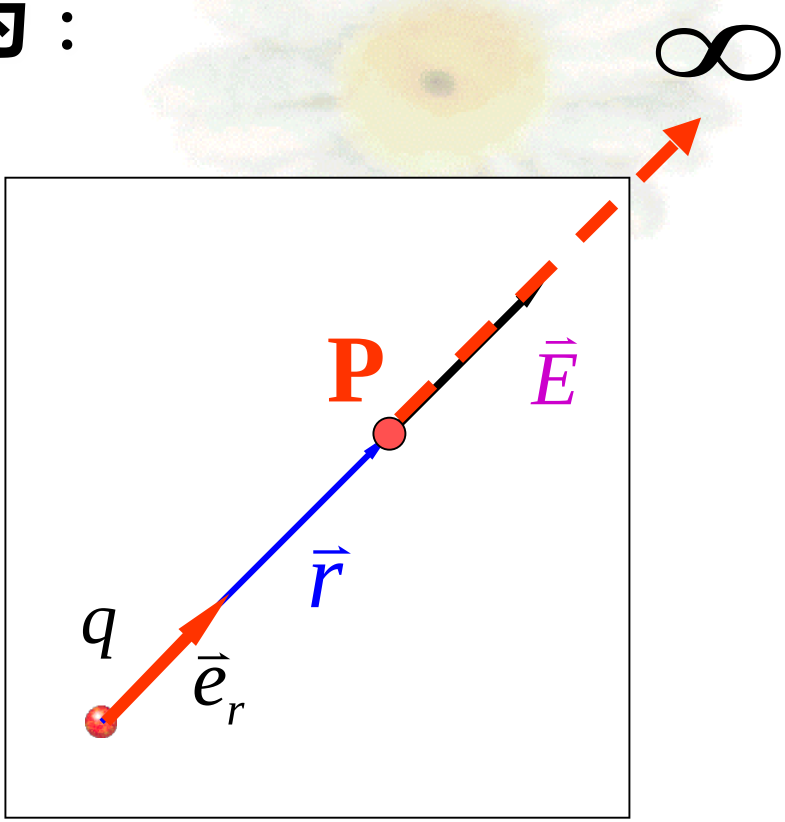
$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

② 令 $\varphi_\infty=0$

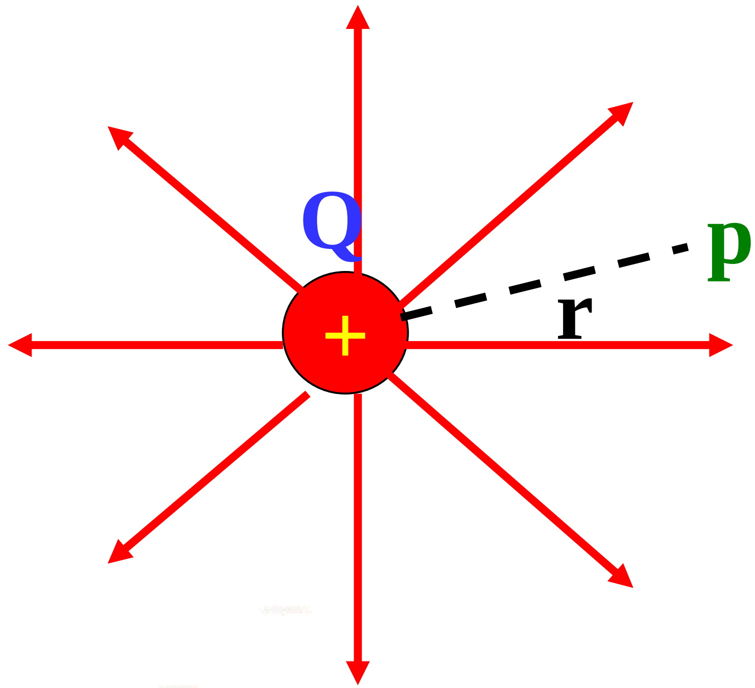
③ 选择沿场强方向从P至无穷远处为积分路径

④ $\varphi=\int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^\infty \frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

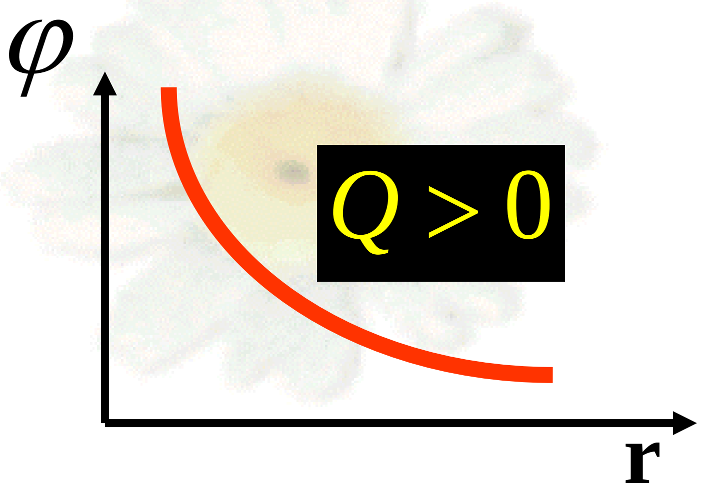
$$\boxed{\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

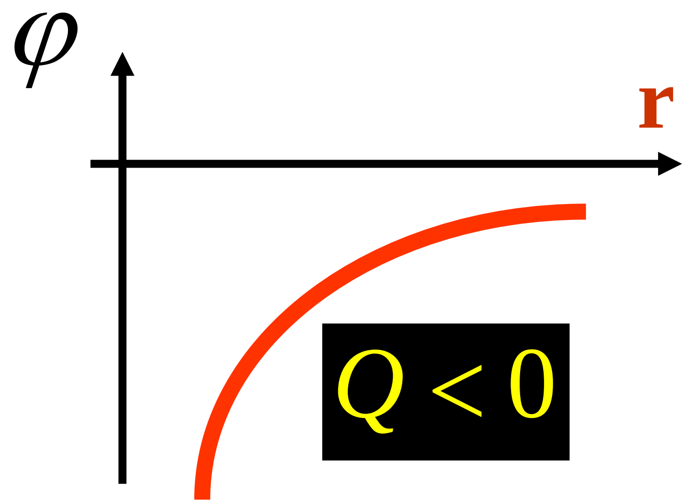


◆点电荷电势公式

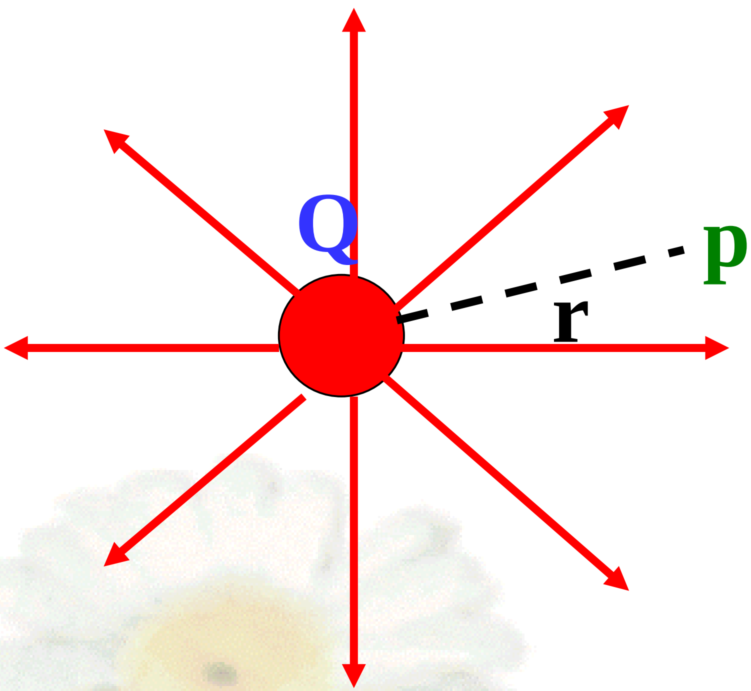


$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



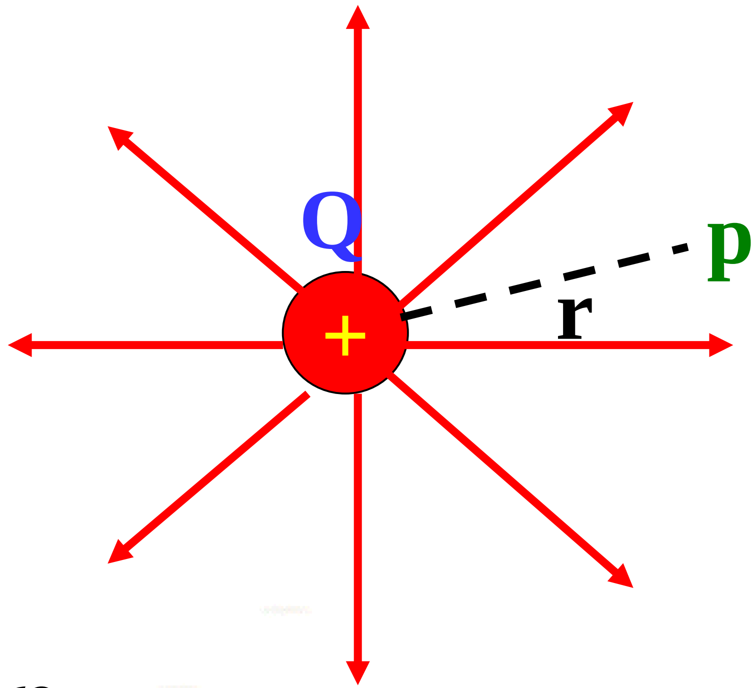


◆点电荷电势公式

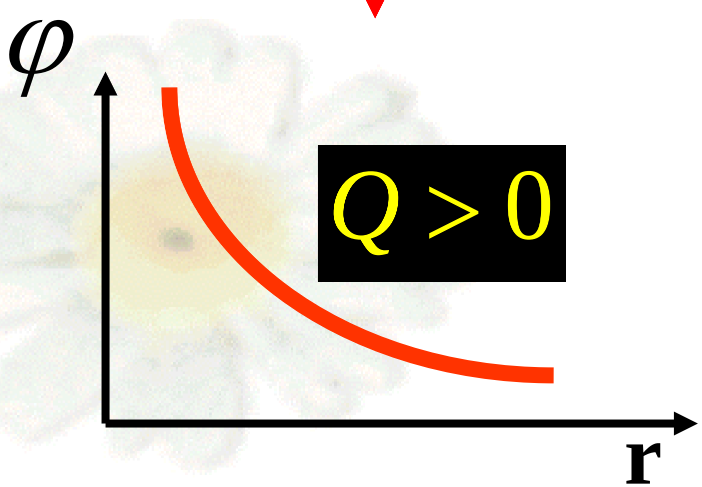


$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

◆点电荷电势公式

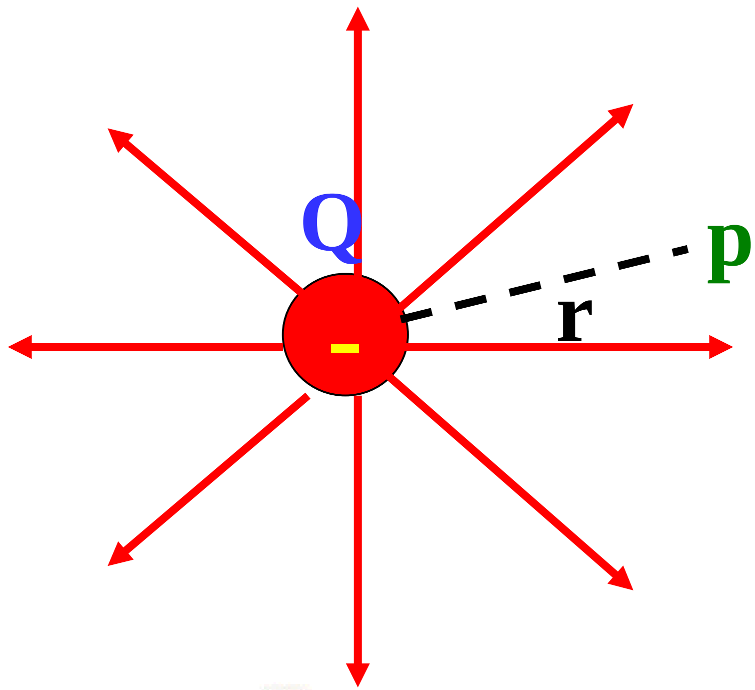


$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

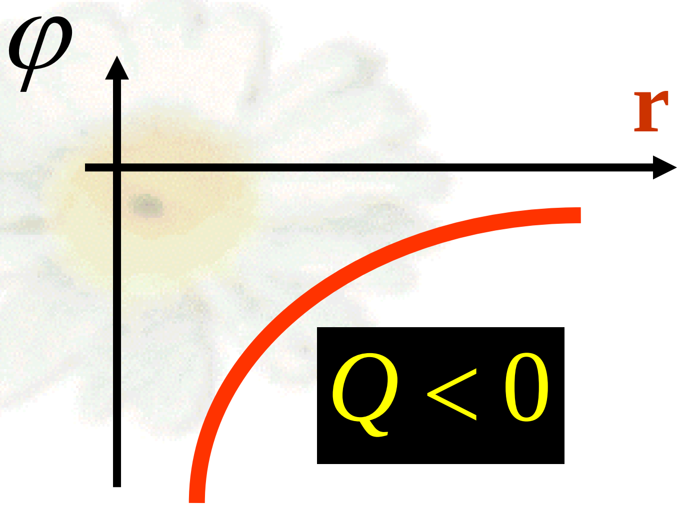


$$r\uparrow \Rightarrow \varphi\downarrow$$

$$r \to \infty, \varphi_{\min} = 0$$



$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} < 0$$



$$Q < 0$$

$$r \uparrow \Rightarrow \varphi \uparrow$$

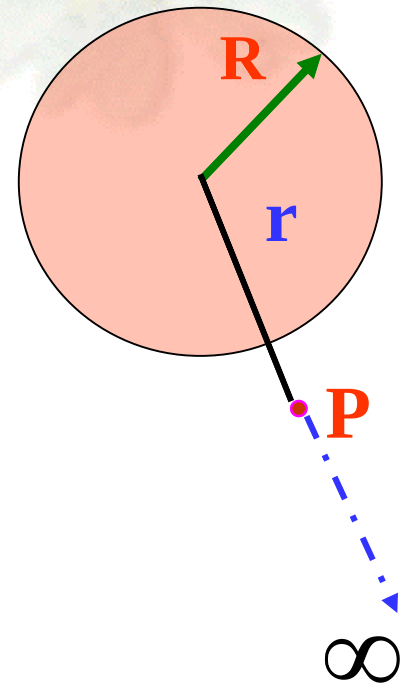
$$r \to \infty, \varphi_{\max} = 0$$

例2. 真空中一半径为R的球面，均匀带电Q，求空间任意一点P的电势？

解： 由高斯定理已求得**场强分布规律**为：

$$\begin{cases} r < R & E = 0 \\ r \geq R & E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases}$$

设 $r \to \infty$ 电势为0



P点处在球外 r>R：

选择沿场强方向从P至无穷远处为积分路径

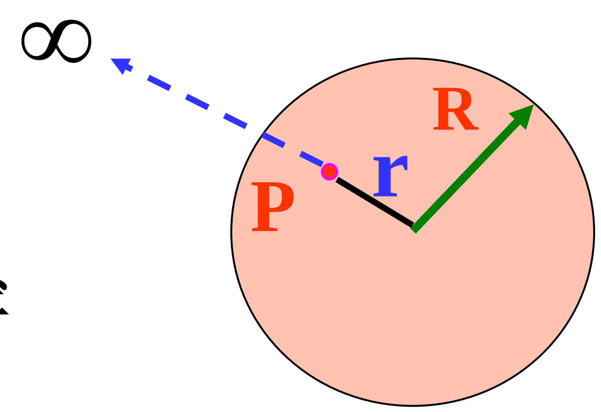
$$\varphi_p = \int_p^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^{r=\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

例2. 真空中一半径为R的球面，均匀带电Q，求空间任意一点P的电势？

解：由高斯定理已求得电场分布：

$$\begin{cases} r < R & E = 0 \\ r \ge R & E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases}$$



P点处在球内 r<R

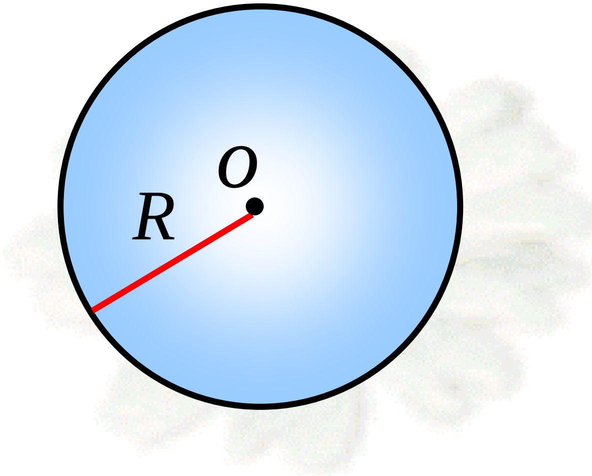
选择沿场强方向从P至无穷远处为积分路径

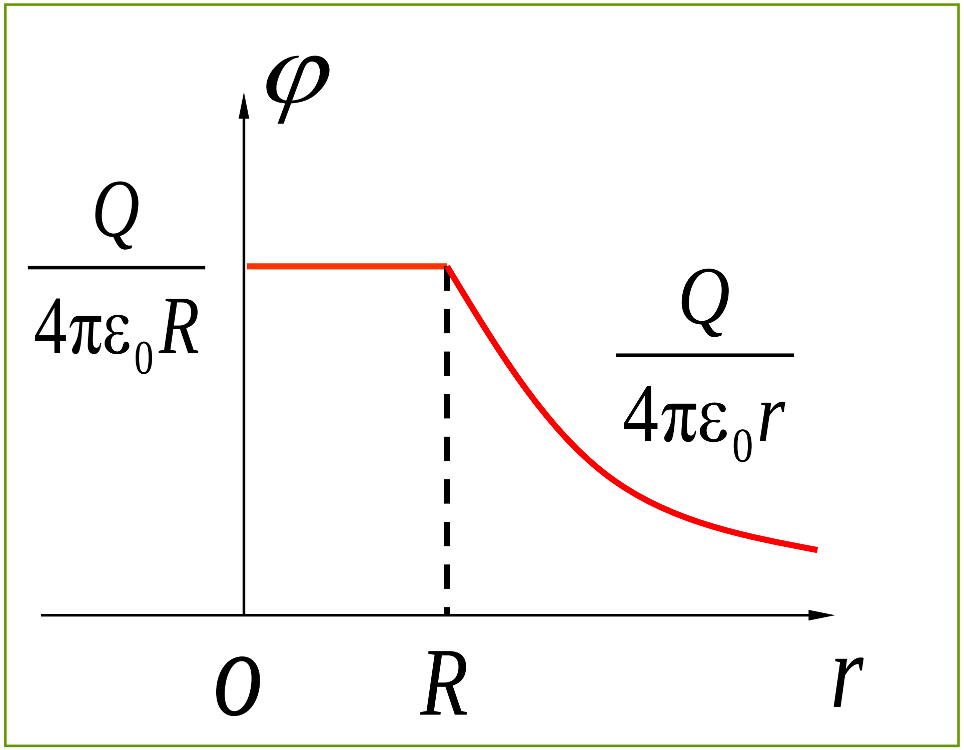
$$\varphi_p = \int_p^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

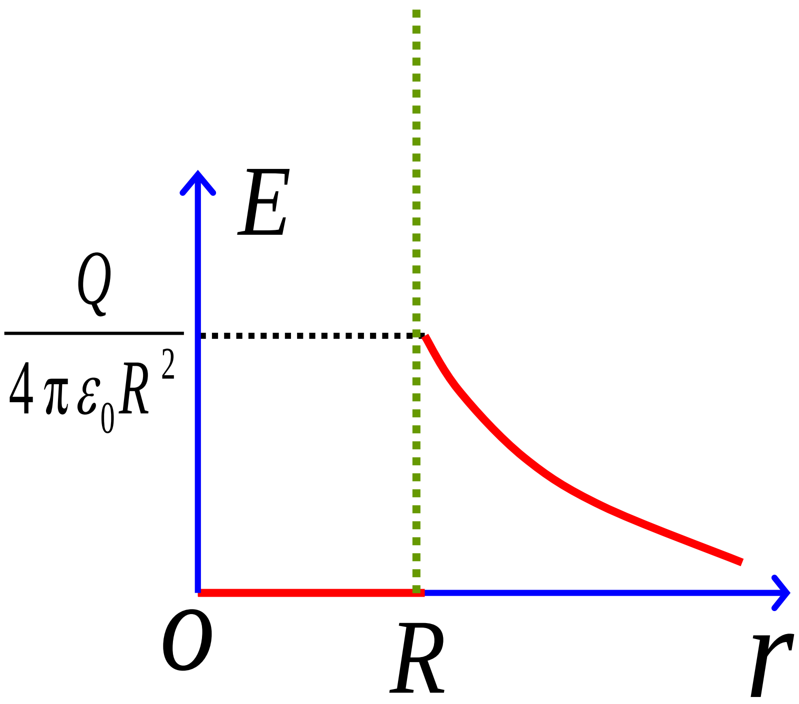
$$= \overbrace{\int_P^{r=R} E dr}^{0} + \int_{r=R}^{r=\infty} E dr = \int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$r > R \qquad \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$r \le R \qquad \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



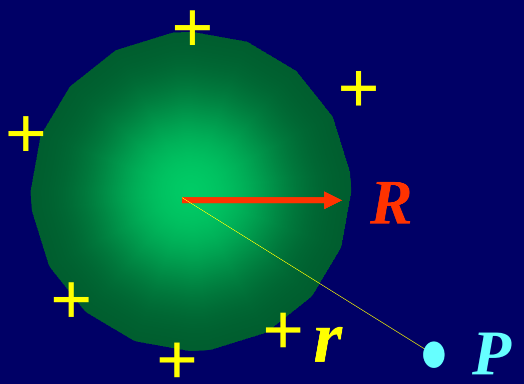


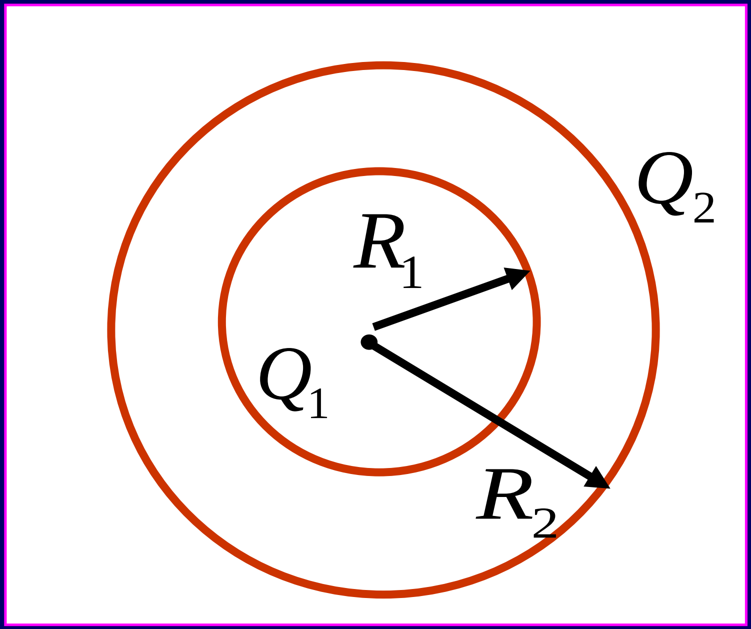


例3：求同心带电球面的电势分布

已知Q_1、Q_2、R_1、R_2

解：对于单个球面



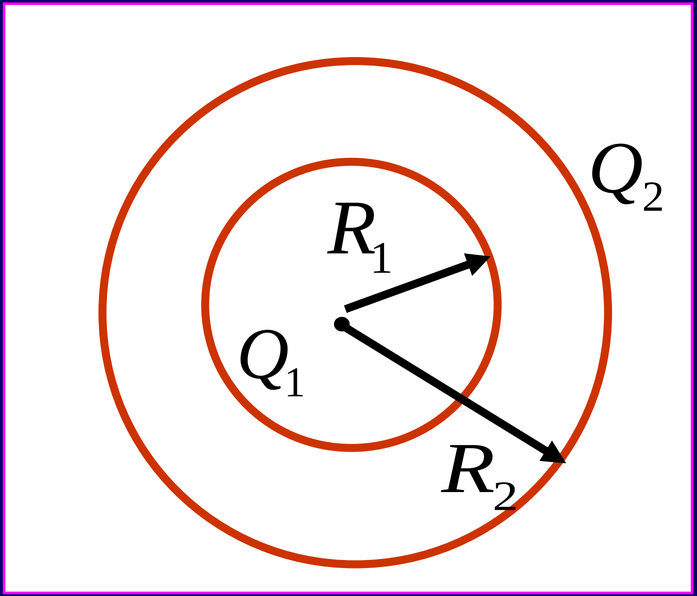


$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} & 0 < r \le R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r > R \end{cases}$$

由电势叠加原理

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} & \boxed{0 < r \le R_1} \\[2ex] \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} & \boxed{R_1 < r \le R_2} \\[2ex] \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} & \boxed{r > R_2} \end{cases}$$



思考：两同心带电球面的电势差如何？

例4 "无限长"带电直导线的电势.

解 无限长带电直线的

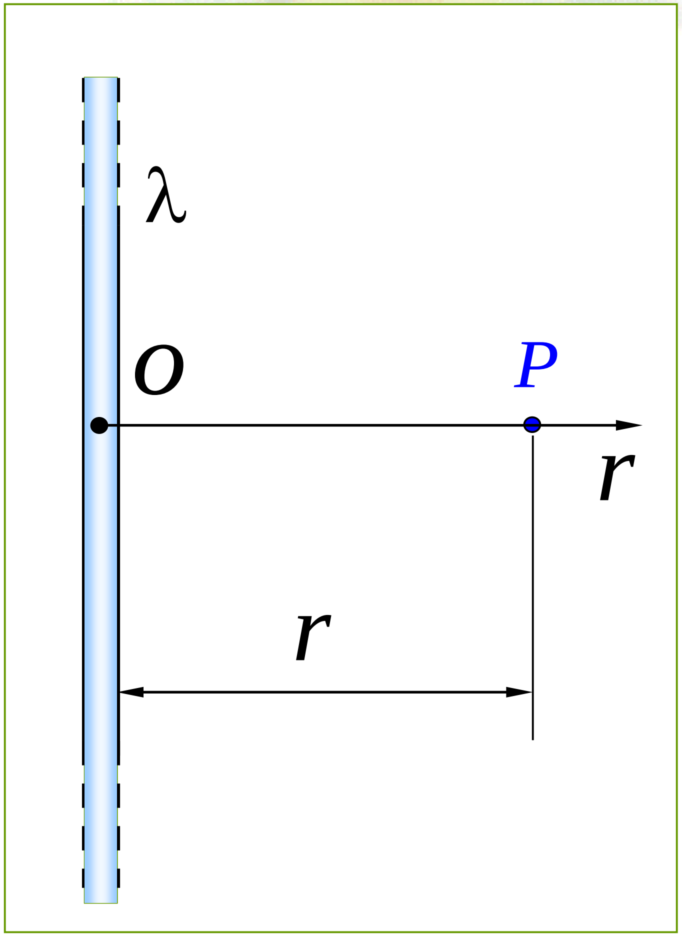
场强分布规律为：

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$ 令 $\varphi_\infty=0$

$$\varphi_P=\int_r^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_r^\infty \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r$$

$$\boxed{\varphi_p=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\infty}{r}}$$



例4 “无限长”带电直导线的电势.

解 无限长带电直线的

场强分布规律为：

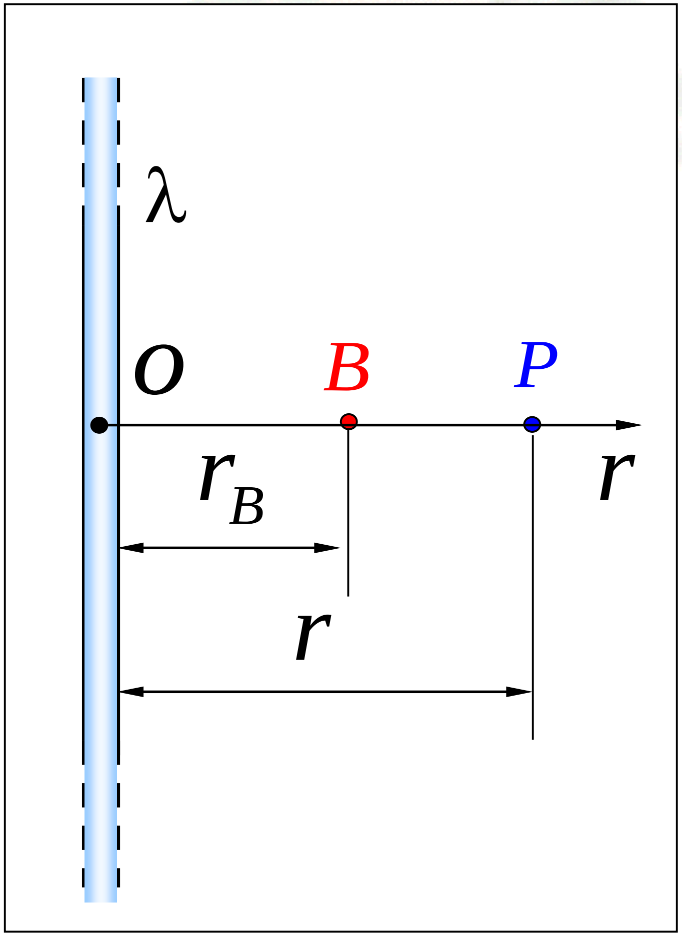
$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

令 $\varphi_B=0$

$$\varphi_P=\int_r^{r_B}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_r^{r_B}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r$$

$$\boxed{\varphi_p=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_B}{r}}$$



问题：如何求解给定电场中的电势分布?

电势的计算将介绍两种方法：

方法二：

由点电荷电势公式，

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

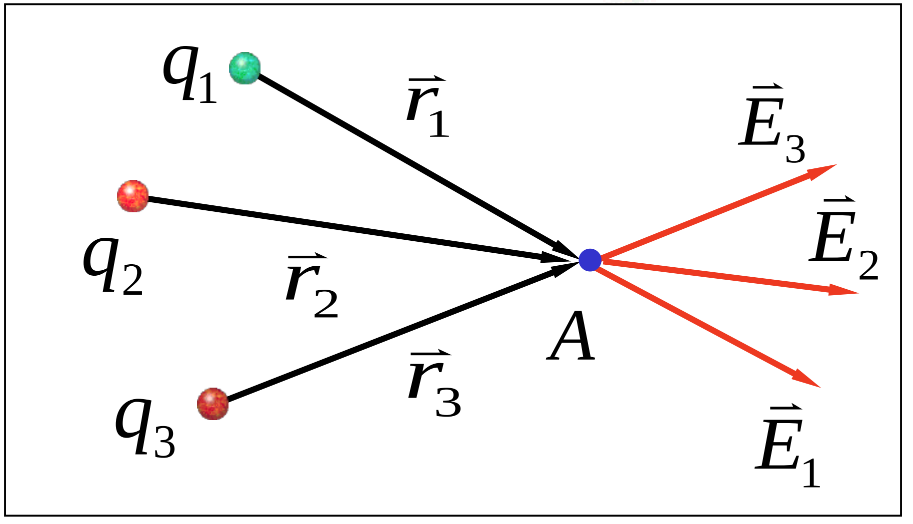
结合电势叠加原理计算

● 离散分布点电荷系

$$\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$$

$$\varphi_A=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

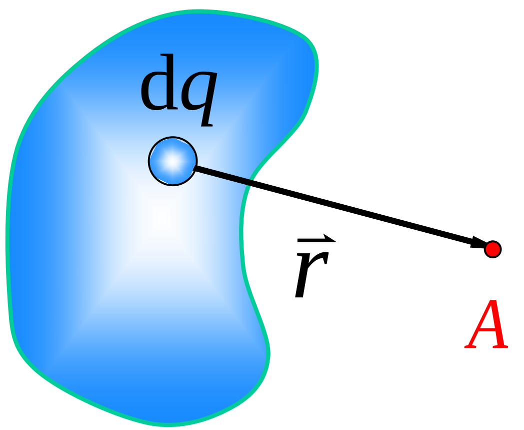


电荷连续分布的带电体

将带电体分成很多电荷元**dq**

任取dq求出它在空间任意点P 的电势

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

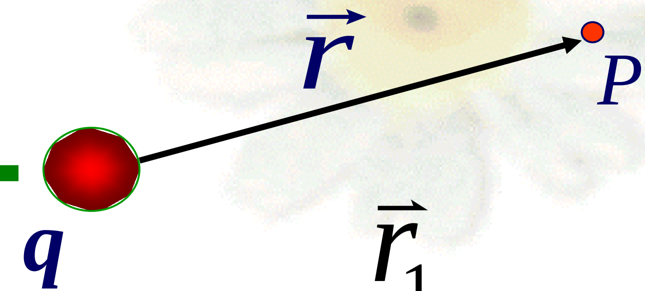


对整个带电体积分，可得总电势：

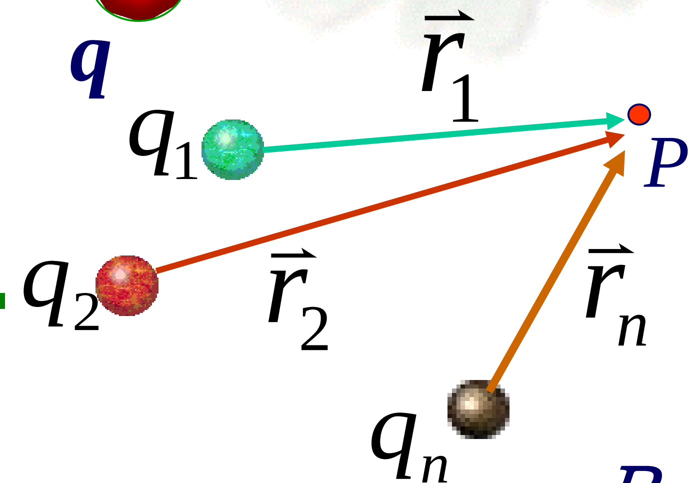
$$\varphi = \int d\varphi = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

方法二:运用点电荷电势公式和电势叠加原理计算电势

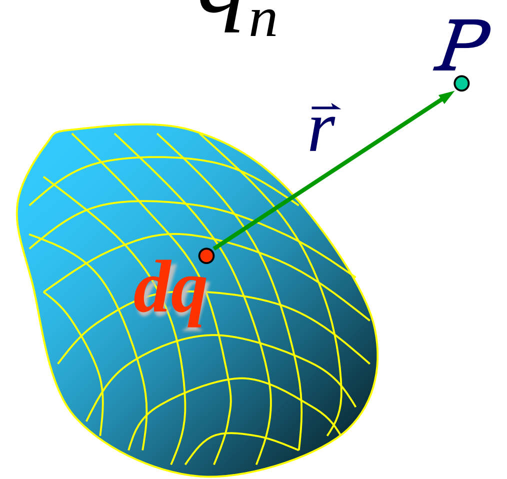
$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



$$\varphi = \sum_i \varphi_i = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

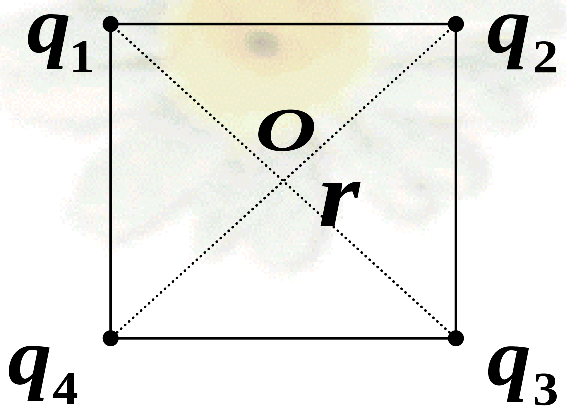


$$\varphi = \int d\varphi = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



例1：已知正方形顶点有四个等量的电点荷 $4.0\times10^{-9}C$ r=5cm

①求 φ_o



$$\varphi_0 = 4\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = 28.8\times10^2 V$$

②将 $q_0 = 1.0\times10^{-9}c$ 从 $\infty \longrightarrow 0$ 电场力所作的功

$$A_{\infty 0} = q_0(\varphi_\infty - \varphi_0) = q_0(0 - 28.8\times10^2) = -28.8\times10^{-7} J$$

③求该过程中电势能的改变

$$A_{\infty 0} = W_\infty - W_0 = -28.8\times10^{-7} < 0$$

电势能 ↑

例2正六边形边长a，各顶点有一点电荷，如图所示。将单位正电荷从无穷远移到正六边形中心o点的过程中,电场力的功为$-q/(\pi\varepsilon_o a)$。

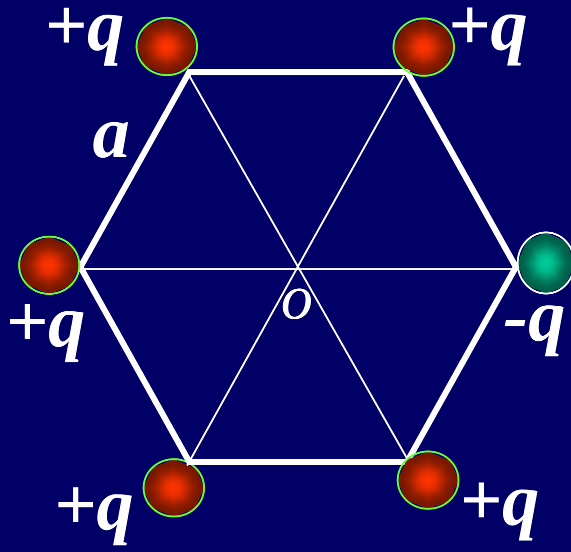
解 $$A_{ab} = q(\varphi_a - \varphi_b)$$

$$A_{\infty o} = +1\,(\varphi_\infty - \varphi_o)$$

$$\varphi_\infty = 0$$

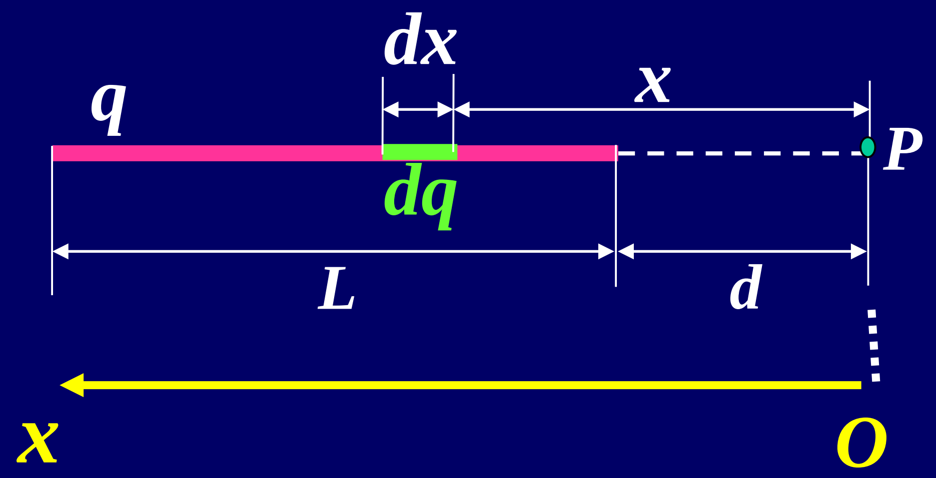
$$\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o a}\times 4 = \frac{q}{\pi\varepsilon_o a}$$

得: $$A_{\infty o} = -\frac{q}{\pi\varepsilon_o a}$$



例3：一均匀带电直线段，长为L，电量为q;求直线延长线上离一端距离为d的P的电势。

解 将带电直线分为许多电荷元，任取一电荷元dq



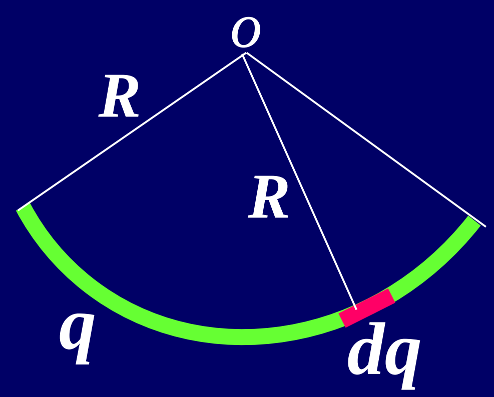
$$d\varphi = \frac{\frac{q}{L}dx}{4\pi\varepsilon_o x}$$

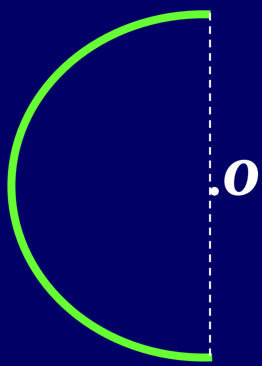
$$\varphi_p = \int_d^{d+L} \frac{\frac{q}{L}dx}{4\pi\varepsilon_o x} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o L}\ln\frac{d+L}{d}$$

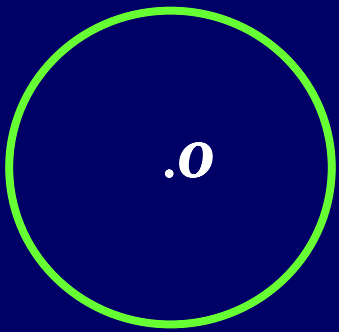
例4：求任意圆弧圆心上的电势。

解

$$\varphi_0 = \int_{圆弧} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o R}$$





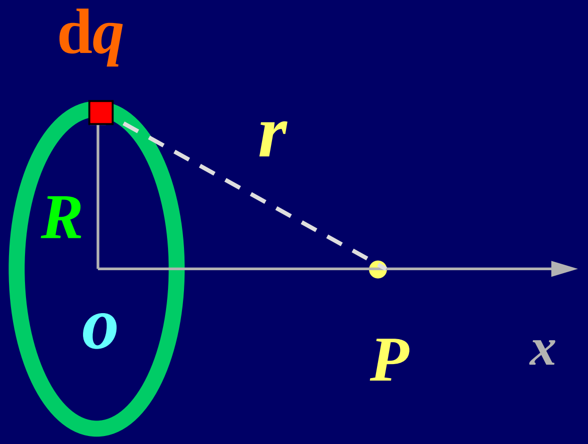


$$\boxed{\varphi_o = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o R}}$$

例5 均匀带电圆环半径为R，电量q 。

求 圆环轴线上一点的电势

解 建立如图坐标系，选取电荷元 $\mathrm{d}q$



$$\mathrm{d}\varphi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\boxed{\frac{q\mathrm{d}l}{2\pi R}}$$

$$\varphi_p = \int \mathrm{d}\varphi_P$$

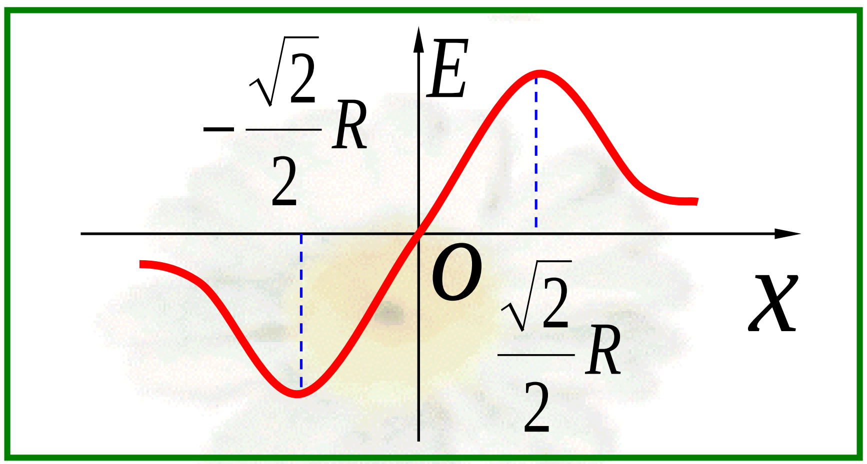
$$= \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

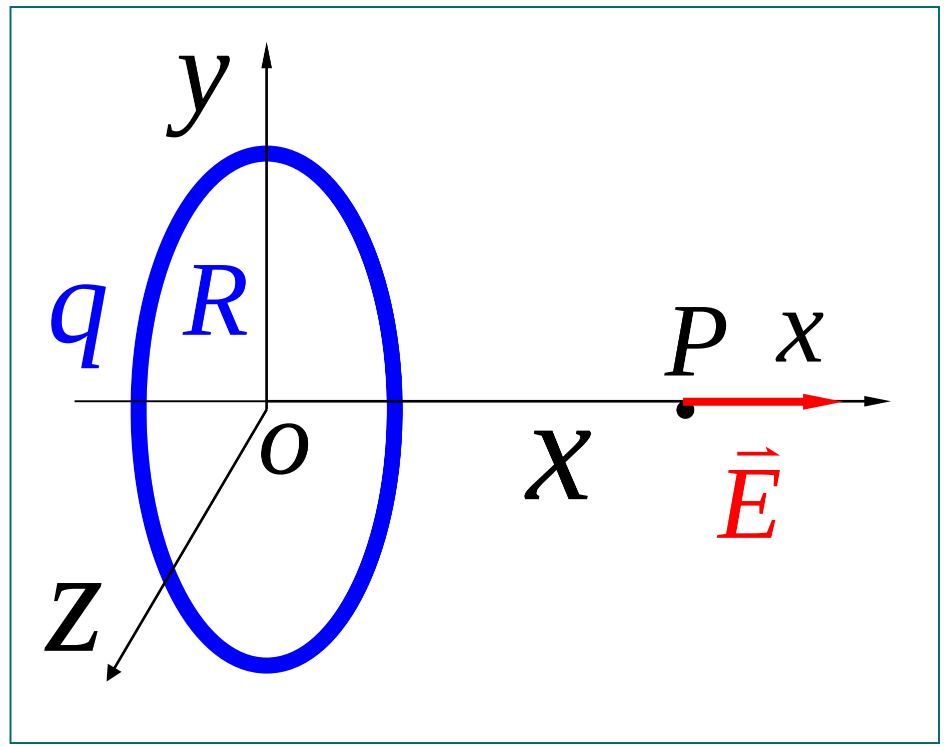
讨论

$$E=\frac{qx}{4\pi\,\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$x=0,\quad \vec{E}_0=0$$

$$x>>R,\quad E_P=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

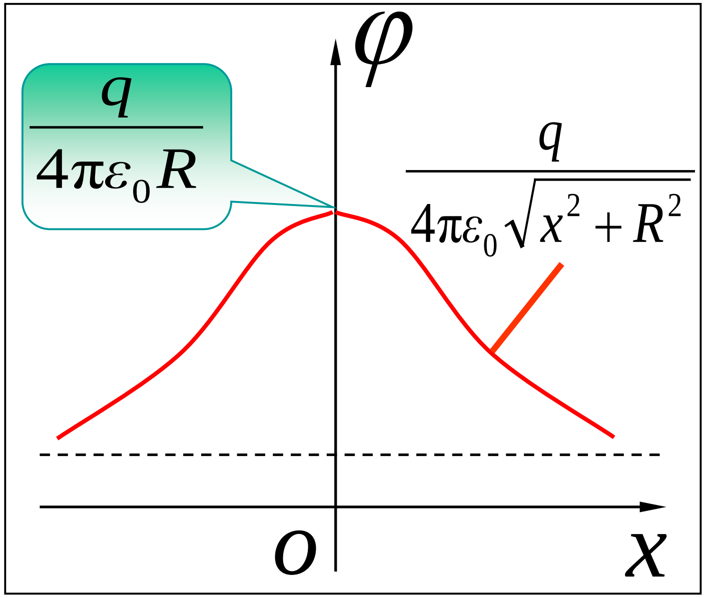


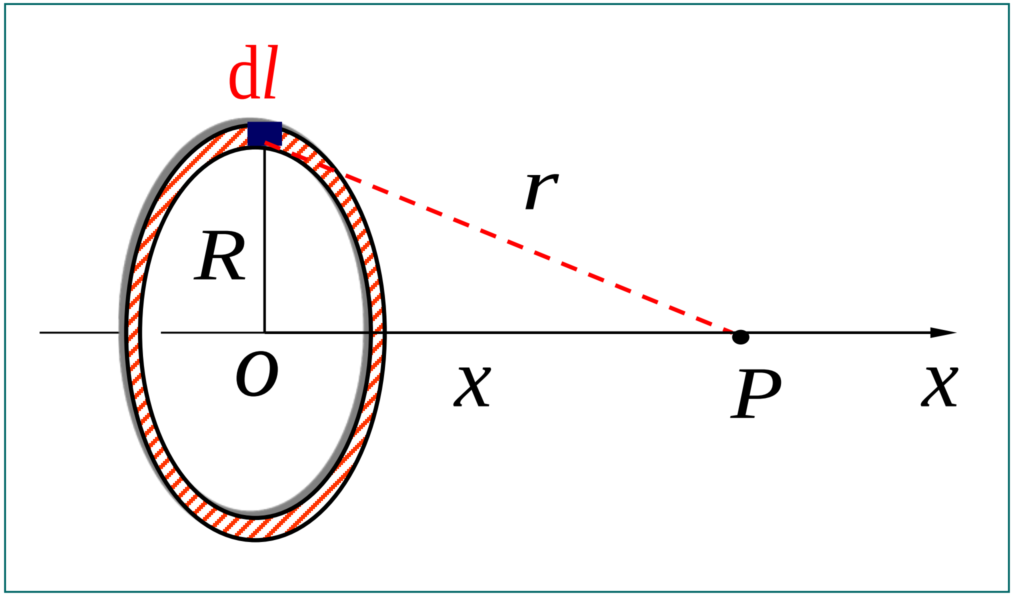


讨论

$$\varphi_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$x=0,\quad \varphi_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad\qquad x>>R,\quad \varphi_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

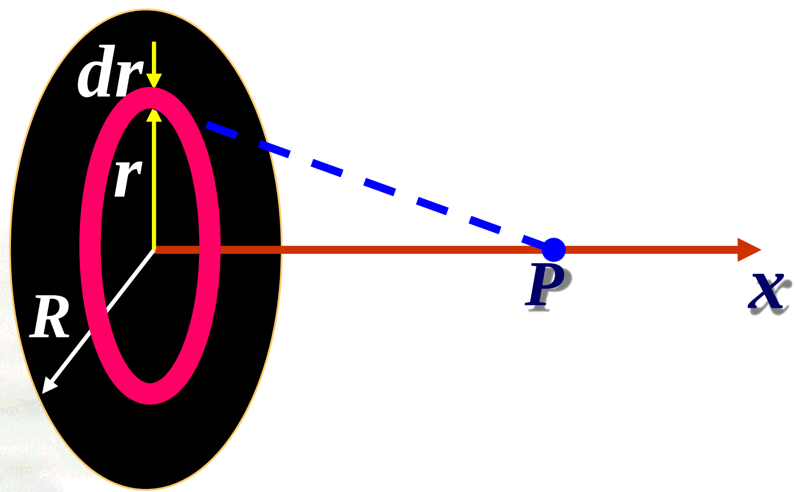




作业1-28

均匀带电圆板，半径为 R，电荷面密度为 σ。

求轴线上任一点 P 的电势。



第一章

真空中的静电场

§1-1 电荷和电荷守恒定律

§1-2 库仑定律

§1-3 电场和电场强度

§1-4 高斯定理

§1-5 静电场的环路定理　电势能

§1-6 电势　电势差

§1-7 等势面　电势与场强的微分关系

§1-7　等势面

电场强度与电势的微分关系

电荷 ⇄ 电场 ⇄ 电荷

电场的特性:

- **给电场**中的**电**荷施以力的作用

电场具有"力"的性**质** $\xrightarrow{\text{引入}}$ **电场强度**

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

电荷 ⇄ 电场 ⇄ 电荷

电场的特性:

- **电荷**在**电场**中的移**动**，**电场**力做功

电场具有“能”的性**质** $\xrightarrow{\text{引入}}$ **电势** φ

$$\varphi_P = \frac{W_p}{q_0} = \int_P^{''0''} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

思考：

电场强度和电势分别从**不同侧面描述**电场的基本性质，它们之间存在**怎样的关系？**

$$\boxed{\varphi_P = \int_P^{"0"} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

$$\text{已知场强分布} \xrightarrow{\text{积分}} \text{求电势分布}$$

问题：

已知**电势**分布, 如何求**场强**分布?

$$\varphi_P = \int_P^{"0"} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

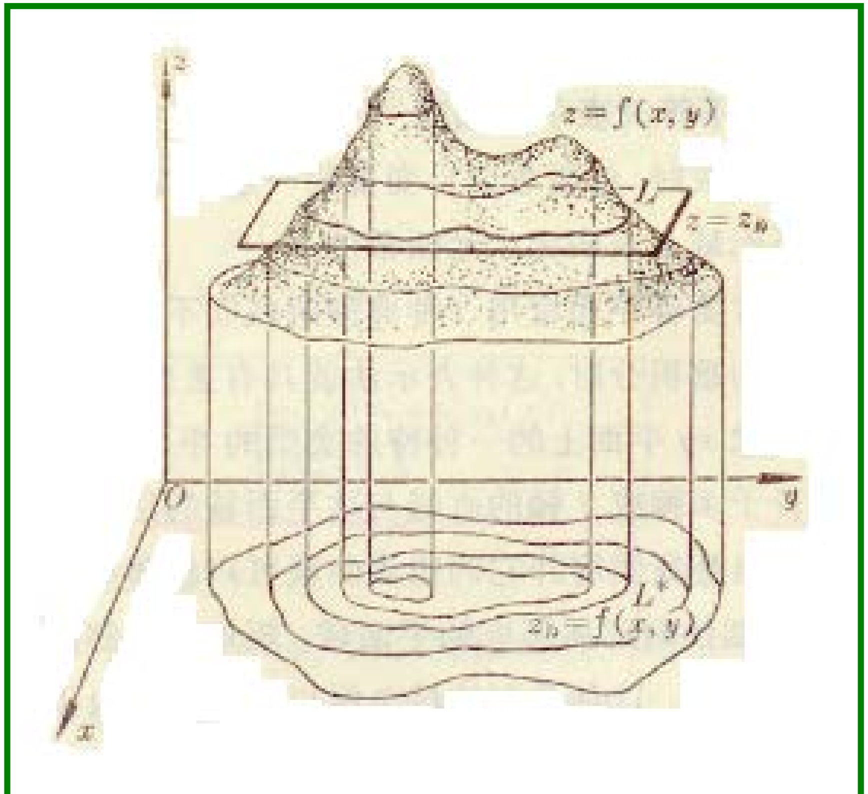
问题：

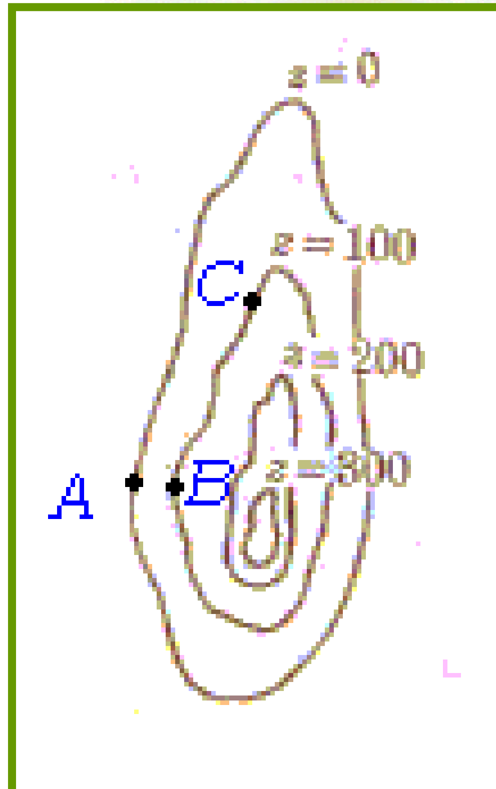
已知**电势**分布，如何求**场强**分布？

§1-7　等势面

电场强度与电势的微分关系

一. 等势面

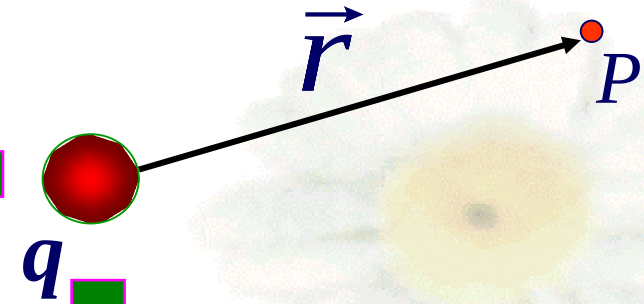


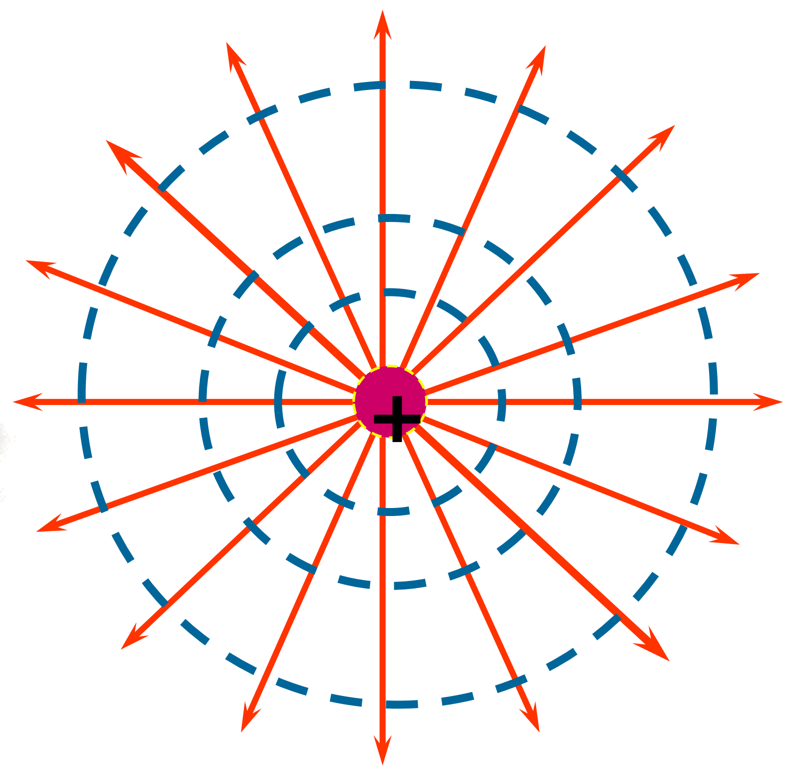


静**电场**中，**电势**相等的点所**组**成的曲面

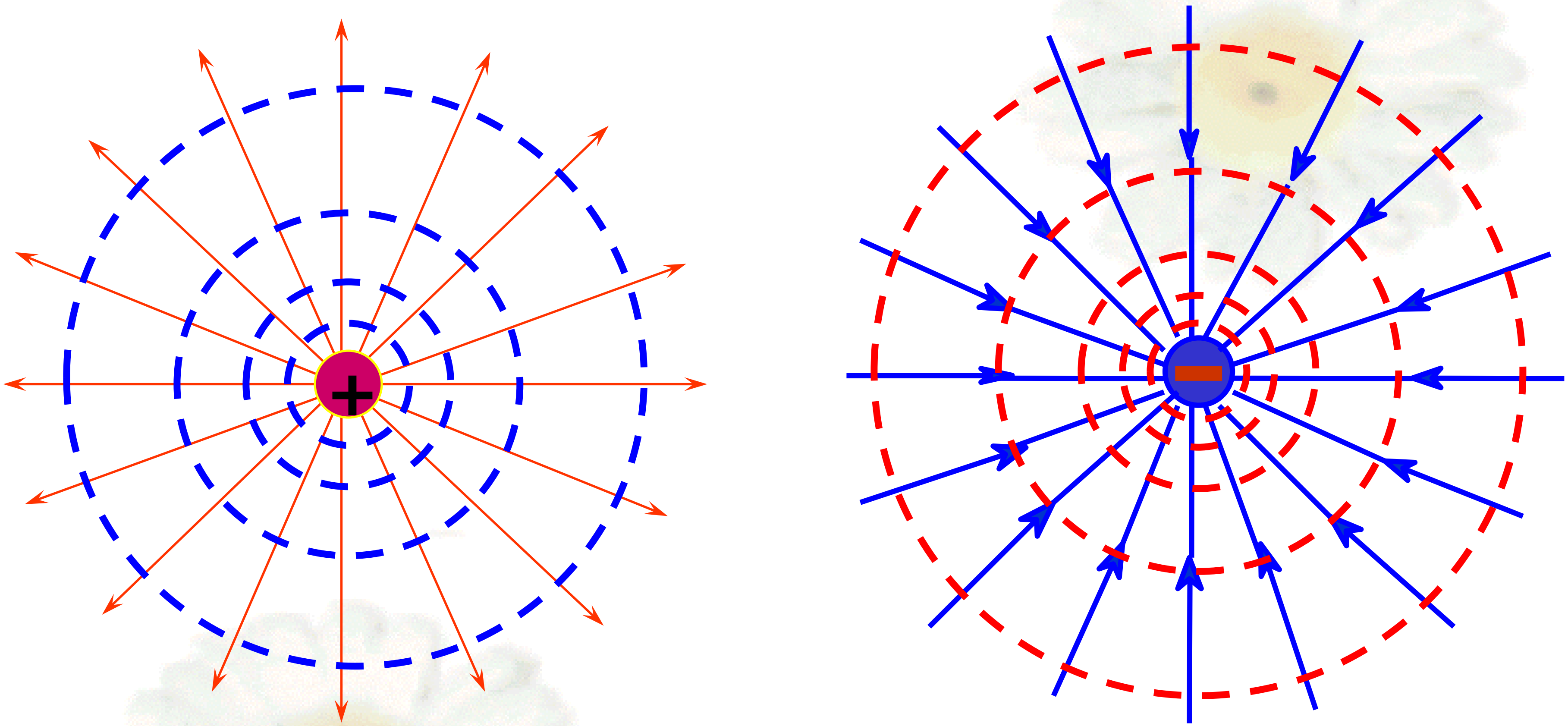
$$\boxed{\varphi(x,y,z)=C}$$

$$\boxed{\varphi(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$





等势面的**性质**：



◆ 在静**电场**中，**电场强**度 $\vec{E}$ **总**是与等**势**面**垂直**的，且**指向电势降落**的方向

◆ 等**势**面**较密集**的地方**场强大**，**较稀疏**的地方**场强小**。

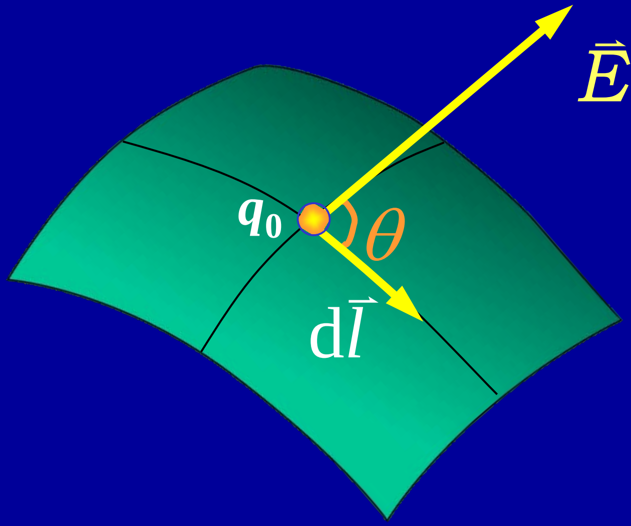
求证:

$\vec{E}\perp$等势面

证明过程:

q_0 在等势面上移动$\mathbf{d}\boldsymbol{l}$,电场力做功为

$$\mathrm{d}A = q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = q_0 E\cos\theta\,\mathrm{d}l$$

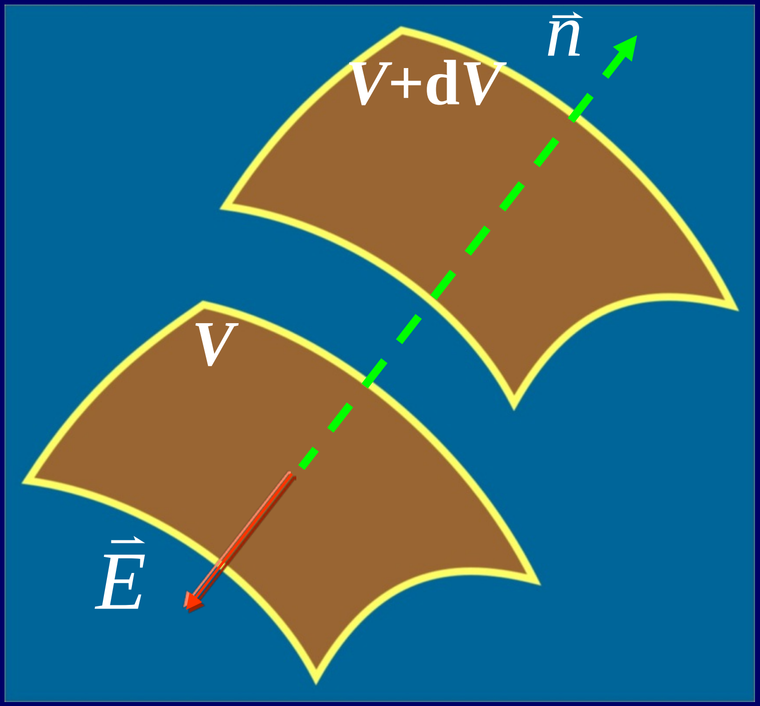


$$\mathrm{d}A = q_0\mathrm{d}\varphi \xrightarrow{q_0\text{沿等势面移动}} \mathrm{d}A = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

因此 $\boxed{\vec{E}\perp\text{等势面}}$

二、电势与电场强度的微分关系（推导自学）



$$\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dn}}\vec{n}$$

$$E_l = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l}$$

$$\boxed{E_l = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l}}$$

在直角坐标系中： 一般 $\varphi = \varphi(x, y, z)$

$$\boxed{E_l = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l}}$$

l 方向分别取x，y，z

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec{E} = -(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k})}$$

电势与电场强度的微分关系

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}n}\vec{n}}$$

$$\boxed{E_l = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l}}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)}$$

讨论

类比：$\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}$

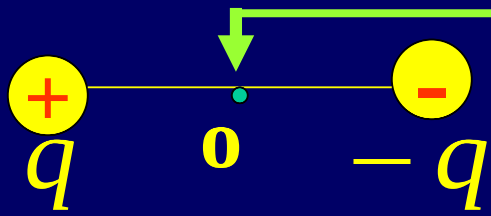
电场弱的地方电势低；电场强的地方电势高吗？

$\varphi=0$ 的地方，$\vec{E}=0$ 吗？

$\vec{E}$相等的地方，φ一定相等吗？

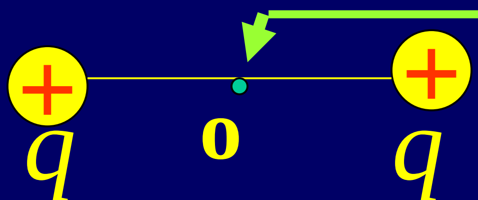
$\vec{E}=0$的地方，φ如何？

● 电势为零的地方，场强不一定零。



$$\varphi = 0, \vec{E} \neq 0$$

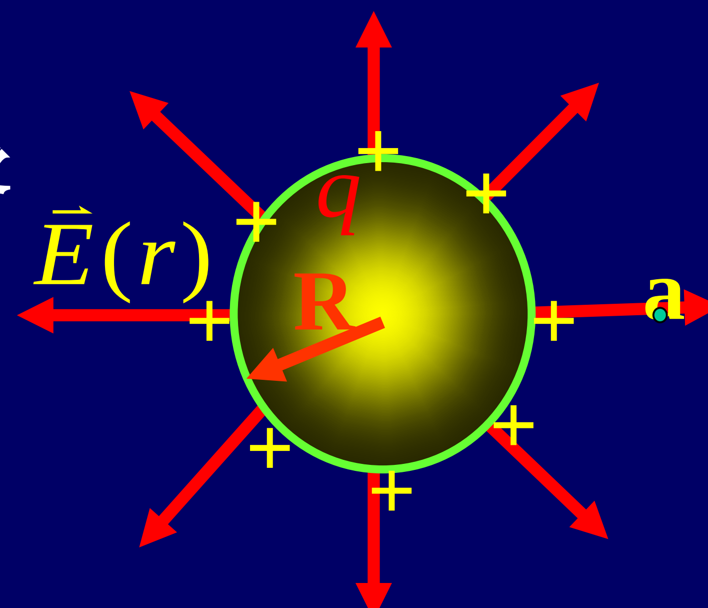
● 场强为零的地方，电势不一定为零。



$$\varphi \neq 0, \vec{E} = 0$$

● 电势不变的空间场强一定为零

$$E = 0, \varphi = const$$



$$\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dn}}\vec{n}$$

问题：1.场强大的地方，电势一定高。✗

2.电势高的地方，电场一定大。✗

3.电场为零的地方，电势也一定为零。✗

4.电势为零的地方，电场也一定为零。✗

5.电势不变的空间，场强处处为零。✓

6.场强不变的空间，电势处处相等。✗

$$\boxed{\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)}$$

例1 已知 $\varphi = 6x - 6x^2 y - 7z^2$

求（2，3，0）点的电场强度。

解 $$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -(6 - 12xy) = 66$$

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 6x^2 = 24$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -14z = 0$$

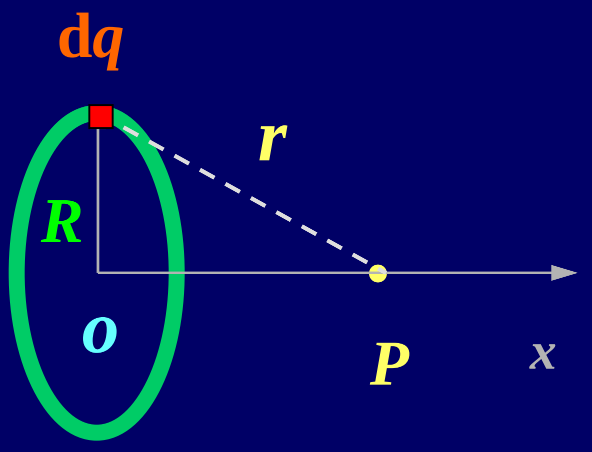
$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} = 66\vec{i} + 24\vec{j}$$

例2 均匀带电圆环半径为R，电量q 。

求 圆环轴线上一点的电势

解 建立如图坐标系，选取电荷元 dq

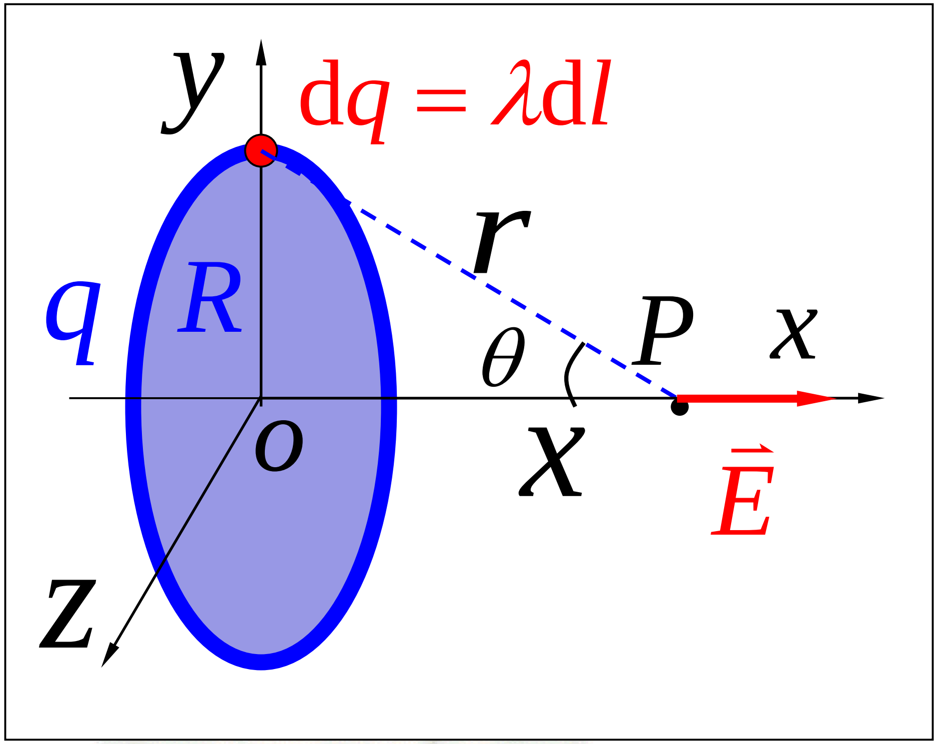
$$\mathrm{d}\varphi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\boxed{\frac{q\mathrm{d}l}{2\pi R}}$$



$$\varphi_p = \int \mathrm{d}\varphi_P$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

例3） 求一均匀带电细圆环轴线上任一点的电场强度.



$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i}$$