第三章　静电场的电介质

3.2.1 偶极矩为 $\vec{p}$=q$\vec{l}$ 的电偶极子，处于场强为 $\vec{E}$ 的外电场中，$\vec{p}$ 与 $\vec{E}$ 的夹角为 θ。

（1） 若是均匀的，θ 为什么值时，电偶极子达到平衡？

（2）如果 E 是不均匀的，电偶极子能否达到平衡？

解：（1）偶极子受的力：

$F_+ = F_- = qE$

因而 $\vec{F}_+ = -\vec{F}_-$ ∴偶极子受合力为零。偶极子受的力矩

$\because \vec{T} = \vec{p} \times \vec{E}$

即　T=qEsinθ

当 T=0 时，偶极子达到平衡，

∴　pEsinθ=0　　$\vec{p} \neq 0$　　$\vec{E} \neq 0$　　$\therefore \theta$=0 ，π

θ=0 这种平衡是稳定平衡。$\theta=\pi$ 是不稳定平衡。

（2） 当 $\vec{E}$ 不是均匀电场时，偶极子除受力矩外还将受一个力（作用在两个点电荷的电场力的合力）。所以不能达到平衡。

3.2.2　两电偶极子 $\vec{p}_1$ 和 $\vec{p}_2$ 在同一直线上，所以它们之间距 r 比它们自己的线度大的很多。证明：它们的相互作用力的大小为 F= $\frac{3p_1p_2}{2\pi\varepsilon_0 r^4}$，力的方向是：$\vec{p}_1$ 与 $\vec{p}_2$ 同方向时互相吸引，反方向时互相排斥。

证：　已知当 r >>l 时，偶极子在其延长线上一点的场强：$\vec{E} = \frac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$

当 $\vec{p}_1$ 与 $\vec{p}_2$ 同方向时，如图

$\vec{p}_2$ 所受的力的大小：

$$\vec{F}_+ = \vec{E}q = \frac{p_1 q}{2\pi\varepsilon_0 (r+\frac{l_2}{2})^3}\hat{r}$$

$$\vec{F}_{-}=-\vec{E}q=\frac{-p_1 q}{2\pi\varepsilon_0(r-\frac{l_2}{2})^3}\hat{r}$$

$$\therefore \vec{F}=\vec{F}_{+}+\vec{F}_{-}=\frac{p_1 q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(r+\frac{l_2}{2})^3}-\frac{1}{(r-\frac{l_2}{2})^3}\right]\hat{r}$$

$$=\frac{p_1 q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{-6r^2\frac{l_2}{2}-2(\frac{l_2}{2})^3}{\left[r^2-(\frac{l_2}{2})^2\right]^3}\hat{r}$$

略去 $\frac{l_2^2}{4}$ 及 $\frac{l_2^3}{8}$ 等高级小量。

$$\vec{F}=-\frac{6p_1 q l_2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\hat{r}$$

$$=-\frac{3p_1 p_2}{2\pi\varepsilon_0 r^4}\hat{r}$$

当 $\vec{p}_1$ 与 $\vec{p}_2$ 反方向时（如图），同理：

$$\vec{F}=\frac{p_1 q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(r+\frac{l_2}{2})^3}-\frac{1}{(r-\frac{l_2}{2})^3}\right]\hat{r}$$

$$=\frac{p_1 q}{2\pi\varepsilon_0}\times\frac{3r^2 l_2+2(\frac{l_2}{2})^3}{(r^2-\frac{l_2^2}{4})^3}\hat{r}$$

略去高级小量得：

$$\vec{F}=\frac{3P_1 P_2}{2\pi\varepsilon_0 r^4}\hat{r}$$

3.2.3 一电偶极子处在外电场中，其电偶极矩为

，其所在处的电场强度为 。

（1） 求电偶极子在该处的电位能，

（2） 在什么情况下电偶极子的电位能最小？其值是多少？

（3） 在什么情况下电偶极子的电位能最大？其值是多少？

解： （1）电位能：

$$W=qU_{+}-qU_{-}=q\Delta U$$

又由于 $\vec{E}=-\dfrac{\Delta U}{\Delta n}\hat{n}$，$\Delta n=l\cos\theta$（$\theta$是$\vec{l}$与$\vec{E}$间夹角）

$\therefore\quad \Delta U=-E\Delta n=-El\cos\theta$

$\therefore\quad W=-qEl\cos\theta$

$=-\vec{p}\cdot\vec{E}$

（2）当$\vec{p}$与$\vec{E}$一致时，$W=-pE$. 即$\theta=0$时电位能最小。

（3）当$\vec{p}$与$\vec{E}$方向相反时， $W=pE$. 即$\theta=\pi$时电位能最大。

3.2.4 一电偶极子，由 $q=1.0\times10^{-8}$（库）的两个异号电荷所组成，这两个电荷相距为 $l=2.0$（厘米），把这电偶极子放在 1.0×10^{5} 牛顿/库伦的均匀外场中，

（1） 外电场作用于电偶极子上最大转矩的多大？

（2） 把偶极子从原来的位置（）转到最大转矩时，外力所作的功是多大？

解： （1）外电场是匀强电场时，偶极子受的力矩为：

$T=pE\sin\theta$

当时$\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，力矩最大，

$$T=pE=qlE=10^{-8}\times2\times10^{-2}\times10^{5}$$

$$=2\times10^{-3}\ \text{（牛顿•米）}$$

（2）把偶极子从原来的位置（）转到最大转矩时，外力所做的功：

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}Td\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}pE\sin\theta d\theta$$

$$=pE=2\times10^{-3}\ \text{（牛顿•米）}$$

3•4•1 一平行板电容器面积为 S，面板间距离为 d，中间充满均匀电介质，已知当一板上自己电荷为 Q 时，整块介质的总偶极矩为 总，求电容器中的电场强度。

整块介质的总偶极矩为 总

极化强度 =

设 上、 下是介质上下两面的外法线，

上= · 上= —Pn= —P

下= · 下= —Pn= —P

自由电荷激发的场强：

AB= AB

极化电荷激发的场强：

BA= — AB= — AB= — AB

电容器中电场强度：

AB = AB

3·4·2 一半径为R，厚度为d的均匀介质圆板（R d）被均匀极化，其极化强度为P，且 平行于板画（如图所示），求极化电荷在圆板中心产生的电场强度。

解：如图所示，在柱坐标系中：

是面元法线与极化强度 为夹角

其中

根据对称性分析,极化电荷在圆板中心产生的电场强度只有y方向分量(y轴与 反方向),

当R>>d时,略去高级小量 得:

3·4·3 在图中A为一块金属,其外部充满均匀介质,其极化率为x,已知交界面上某点的极化电荷面密度为 ,求该点的自由电荷面密度。

解：在静点平衡时，利用高斯定理可得，导体外（即介质内）紧靠导体表面一点的场强为：

= =−

与 反方向，如图所示， 是介质表面外法线.

又由于在介质内：= ； •

=

=−

=

求一均匀极化的电介质球表面上极化电荷的分布，已知极化强度为 ，如图所示.

解：取球心 Q 为原点，极轴与 平行的球坐标，由于轴对称性，表面上任一点 A 的极化电荷密度 只与 角有关. 着也是 A 点外法线 与 的夹角，故

这表明：在右半球 为正，左半球 为负；在两半球分界线面上，

在

3•4•5 图中沿 x 轴放置的介质圆柱，地面积为 S，周围是真空，已知介质内个点极化矢量 （为常数）

（1）求圆柱两底面上的极化电荷密度 及 ；

（2）求出圆柱内体电荷密度 。

解：（1）$\sigma_a{}' = \vec{P}_a \cdot \hat{n}_a = P_a \cos\pi = -ka$

$\sigma_b{}' = \vec{P}_b \cdot \hat{n}_b = P_b \cos 0 = kb$

（2）由定义得：

$$p' = -\frac{\oiint_s \vec{P} \cdot d\vec{S}}{\tau} = -\frac{\left(P_{x+dx} - P_x\right)S}{Sdx}$$

$$= -\frac{Skdx}{Sdx} = -k$$

3.4.6 平行板电容器充满了极化率为新的均匀电介质，已知充电后金属板极板上的自由电荷面密度为$\pm\sigma_0$，求电容器的电容C与没有电介质时的电容C_0之比。

解：$\sigma' = \vec{P} \cdot \hat{n} = P$

极化电荷的场强：$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{P}{\varepsilon_0}$

自由电荷的场强：$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$

$\vec{E}_0$ 与 $\vec{E}'$ 反方向，

$$\therefore E = E_0 - E = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{x\varepsilon_0 E}{\varepsilon_0}$$
$$= E \quad - xE$$
$$\therefore E_0 = (1+x)E$$
$$E = \frac{E_0}{1+x} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0(1+x)}$$

$$U = Ed = \frac{\sigma_0 d}{\varepsilon_0(1+x)}$$

$$Q = \sigma_0 S$$

$$\therefore C = \frac{Q}{U} = \frac{(1+x)\varepsilon_0 S}{d} = (1+x)C_0$$

3.4.7 一空气平行板电容器，面积 S=0.2（米^2），d=1.0(厘米)，充电后断开电源，其电位差$U_0 = 3\times10^3$(伏)，当电介质充满两版间以后，则电压降至 1000 伏，试计算：

(1)原电容C_0；

(2)每一个导体板上的电量 Q;
(3)放入电介质后的电容 C;

(4)两板间的原电场强度E_0；

(5)放入电介质后的电场强度E；

(6)电介质每一面上的极化电荷Q'；

(7)电介质的相对介电常数ε_r [提示$\varepsilon_0 = C/C_0$]。

解：

$$(1)C_0=\frac{\varepsilon_0 S}{d}=\frac{8.85\times10^{-12}\times0.2}{10^{-12}}$$
$$=1.77\times10^{-10}(\text{法拉})$$

$$(2)Q=C_0U_0=1.77\times10^{-10}\times3000$$
$$=5.31\times10^{-7}(\text{库伦})$$

$$(3)C=\frac{Q}{U}=\frac{5.31\times10^{-7}}{10^{3}}=5.31\times10^{-10}(\text{法拉})$$

$$(4)E_0=\frac{U_0}{d}=\frac{3000}{10^{-2}}=3\times10^{5}(\text{伏}/\text{米})$$

$$(5)E=\frac{U}{d}=\frac{10^{3}}{10^{-2}}=10^{5}(\text{伏.}/\text{米})$$

$$(6)\because E=E_0-E'$$

$$\therefore E'=E_0-E=\frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

$$Q'=\sigma' S=(E_0-E)\varepsilon_0 S$$
$$=8.58\times10^{-12}(3\times10^{5}-10^{5})\times0.2$$
$$=3.45\times10^{-7}(\text{库伦})$$

$$(7)\varepsilon_r=\frac{C}{C_0}=\frac{5.31\times10^{-10}}{1.7\times10^{-10}}=3$$

3.4.8 两相距为 5.0 毫米的平行导体板间均匀充满相对介电常数 $\varepsilon_0=3.0(\varepsilon_r=x+1)$的电介质，其介质内的电场强度是$10^6$伏/米。试求：

（1）在导体板上的面电荷密度σ_0；

（2）在电介质面上的极化面电荷密度σ'

解：（1）利用 3.4.6 题结论：

$$C=\frac{\varepsilon_0(1+x)S}{d}$$

又由于$C=\dfrac{Q}{U}=\dfrac{\sigma_0 S}{Ed}$

$$\therefore\frac{\varepsilon_0(1+x)S}{d}=\frac{\sigma_0 S}{Ed}$$

$$\sigma_0 = E\varepsilon_0(1+x) = E\varepsilon_0\varepsilon_r$$
$$= 10^6 \times 8.58\times10^{-12}\times 3$$
$$= 2.65\times10^{-5}(\text{库}/\text{米}^2)$$

$$\sigma' = P = x\varepsilon_0 E$$
$$= (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E$$
$$= (3-1)\times 8.58\times10^{-12}\times10^6$$
$$= 1.77\times10^{-5}(\text{库}/\text{米}^2)$$

3.4.9 在相对介电常数为$\varepsilon_r(\varepsilon_r = x+1)$的电介质中有一强度为$\vec{E}$的均匀电场。在介质内有一球形空腔。求球面上的极化电荷在球心产生的电场强度$\vec{E}'$。

解：如图所示，在均匀电介质中：

$$\vec{P} = x\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$$
$$\sigma' = \vec{P}\cdot\hat{n} = -P\cos\theta$$

$\hat{n}$是介质表面的外法线即指向球心。

$$d\vec{E}' = \frac{\sigma' ds}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{R}$$

根据对称性分析可得，E'只有 z 方向分量，

$$E' = \int_s dE'\cos\theta$$
$$= \int_s \frac{\sigma' R^2\sin\theta d\varphi d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$
$$= -\int_0^{2\pi}\frac{P\cos^2\theta\sin\theta R^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}d\theta$$

$$= \frac{P}{3\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_r - 1}{3}\text{E}$$

$$\therefore \quad \vec{E}' = \frac{\varepsilon_r - 1}{3}\vec{E}$$

3.5.1 两平行导体板相距 5.0 毫米，带有等量异号电荷，面密度为 20 微库/米^2，其间有两片电介质，一片厚 2.0 毫米，ε_r=3.0 毫米，ε_r=4.0。略去边缘效应，求各介质内的 D、E 和介质表面的σ'。

解：如图所示，作一个底在导体内，另一底平行于极板的封闭圆柱形高斯面。根据高斯定理得：$D_1=\sigma_0=2\times10^{-5}$（库/米^2）

$D_2 = D_1 = \sigma_0 = 2\times10^{-5}$ (库/米^2)

在介质 1 中的场强：

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} = \frac{2\times10^{-5}}{8.85\times10^{-12}\times3} = 7.5\times10^5 \text{（伏/米）}$$

在介质 2 中的场强：

$$E_2 = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}} = \frac{2\times10^{-5}}{8.85\times10^{-12}\times4} = 5.65\times10^5 \text{（伏/米）}$$

$$\vec{\sigma}_1 = \vec{p}_1\cdot\hat{n}_1 = \varepsilon_0\ x_1\ \vec{E}_1\cdot\hat{n}_1$$

$$= -\varepsilon_0\ x_1\ E_1 = -（\varepsilon_{r1}-1）\ \varepsilon_0\ \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} = -\frac{（\varepsilon_{r1}\ -1）}{\varepsilon_{r1}}\ \sigma_0$$

$$= -\frac{3-1}{3}\times2\times10^{-5} = -\frac{4}{3}\times10^{-5} \text{（库/米}^2\text{）}$$

$$\sigma_3' = \vec{P}_2\cdot\hat{n}_3 = \varepsilon_0 x_2\vec{E}_2\cdot\hat{n}_3 = \frac{（\varepsilon_{r2}\ -1）}{\varepsilon_{r2}}\ \sigma_0$$

$$= \frac{4}{3}\times2\times10^{-5} = \frac{3}{2}\times10^{-5} \text{（库/米}^2\text{）}$$

$$\sigma_2' = -(\sigma_1' + \sigma_3') = -(-\frac{4}{3}+\frac{3}{2})\times10^{-5}$$

$$= -\frac{1}{6}\times10^{-5}(\text{库/米}^2)$$

[或 $\sigma_2' = (\vec{P}_2 - \vec{P}_1)\cdot\hat{n}_{21}$]

3.5.2　　一无限大均匀介质平板，厚度为 d，相对介电常数为ε_r，其中有密度均匀的自由电荷，体密度为ρ_0，求板内、外的$\overline{D}$、$\vec{E}$、$\vec{P}$。

解：　作如图所示的高斯面，由高斯定理得（其中 x 是场点在 x 轴的坐标，原点在介质板的对称面上）。

　　板内：

$$\vec{D}_{内} = \rho_0 x\hat{i}$$

$$\vec{E}_{内} = \frac{\vec{D}_{内}}{\varepsilon_r\varepsilon_0}$$

$$= \frac{\rho_0 x}{\varepsilon_r\varepsilon_0}\vec{i}$$

$$\vec{P}_{内} = \chi\varepsilon_0\vec{E}_{内} = (\varepsilon_r - 1)\ \varepsilon_0\vec{E}_{内}$$

$$=\frac{(\varepsilon_{\mathrm{r}}-1)\ x\rho_0}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\hat{\mathrm{i}}$$

在板外：

$$\vec{D}_{外I}=-\frac{\rho_0 \mathrm{d}}{2}\hat{\mathrm{i}}$$

$$\vec{E}_{外I}=-\frac{\rho_0 \mathrm{d}}{2\varepsilon_0}\hat{\mathrm{i}}$$

$$\vec{P}_{外I}=0$$

$$\vec{D}_{外II}=\frac{\rho_0 d}{2}\hat{i}$$

$$\vec{E}_{外II}=\frac{\rho_0 \mathrm{d}}{2\varepsilon_0}\hat{\mathrm{i}}$$

$$\vec{P}_{外II}=0$$

3.5.3 如图所示，一平行板电容器两极板相距为 d，面积为 S，其中放有一层厚为 t 的电介质，相对介电常数为ε_r，介质两边都是空气。设两极板间电位差为 U，略去边缘效应。试求：

（1） 介质中的电场强度 E，电位移 D 和极化强度 P；

（2） 极板上的电量 Q；

（3） 极板和介质间隙中的场强E_0；

（4） 电容 C。

解： （1）设空气中的场强为E_0；

U=E_0x+Et+E_0(d-x-t)

=E_0(d-t)+Et

由高定斯理可知，在两板$\vec{D}$间处处相等，

$$E_0=\frac{D}{\varepsilon_0} \qquad E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\ \therefore \quad \begin{aligned}U&=\frac{D}{\varepsilon_0}(d-t)+\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}t\\&=\frac{D}{\varepsilon_0}(d-t+\frac{t}{\varepsilon_r})\end{aligned}$$

（5）画出电力线和电位移线。

解 （1）利用高斯定理求出：

D$_1$=0 （$r<R$）

$$D_{\mathrm{II}} = \frac{q}{4\pi r^2} \qquad （R < r < d + R）$$

$$D_{\mathrm{II}} = \frac{q}{4\pi r^2} \qquad （r > d + R）$$

$$D_{\mathrm{I}} = 0 \qquad (r<R)$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r^2} \qquad （R < r < d + R）$$

$$E_{\mathrm{III}} = \frac{D}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r^2} \qquad （r > d + R）$$

$\therefore$ r=15(厘米)时：

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} = \frac{10^{-8}\times 10^4}{4\pi\times 15^2} = 3.5\times 10^{-8} \text{（库/米}^2\text{）}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r^2} = \frac{10^{-8}\times 10^4}{4\pi\varepsilon_0\times 5\times 15^2} = 8\times 10^2 \qquad \text{（牛/库）}$$

$r = 5$ （厘米）时：

$$D = 0$$

$$E = 0$$

$r = 25$（厘米）时：

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} = \frac{10^{-8}\times 10^4}{4\pi\times 25^2}$$

$$= 1.27\times 10^{-8} \text{（库/米}^2\text{）}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r^2} = \frac{10^{-8}\times 10^4}{4\pi\varepsilon_0\times 1\times 25^2}$$

$$= 1.44\times 10^3 \text{（牛/库）}$$

（1） $$U_{\mathrm{III}} = \int_r^\infty \vec{E}_{\mathrm{III}} \bullet d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r} \qquad （r \ge R + d）$$

$$U_{\mathrm{II}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}(d+R)}$$

$$+ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}(\frac{1}{r} - \frac{1}{d+R}) \quad （R \le r \le d + R）$$

$$U_{\text{II}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}(d+R)}$$

$$+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}(\frac{1}{r}-\frac{1}{d+R})\qquad (r \le R)$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(d+R)}(\frac{1}{\varepsilon_{r2}}-\frac{1}{\varepsilon_{r1}})+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}R}$$

∴ r=15(厘米)时：

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}(d+R)}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}R}(\frac{1}{r}-\frac{1}{d+R})$$

$$=\frac{10^{-8}}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{2\times10^{-1}}-\frac{1}{5\times10^{-1}\times2}+\frac{1}{5\times1.5\times10^{-1}})$$

$=4.8*10^2$（伏）

$r=5$（厘米）时：

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(d+R)}(\frac{1}{\varepsilon_{r2}}-\frac{1}{\varepsilon_{r1}})+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}R}$$

$$=\frac{10^{-8}}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{2\times10^{-1}}-\frac{1}{5\times2\times10^{-1}}+\frac{1}{5\times10^{-1}})$$

$=5.4\times10^2$（伏）

$r=25$（厘米）撕：

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}R}$$

$$=\frac{10^{-8}}{4\pi\varepsilon_0\times1\times2.5\times10^{-1}}$$

$=3.6\times10^2$（伏）

（3）∵ $P_1=\varepsilon_0(\varepsilon_{r1}-1)E$

$$=\varepsilon_0(\varepsilon_{r1}-1)\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r^2}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_{r1}r^2}(\varepsilon_{r1}-1)$$

同理：　$P_2=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_{r2}r^2}(\varepsilon_{r2}-1)$

$\sigma'_{1内}=\vec{P}_1\bullet\vec{n}=-P_1=-\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_{r1}R^2}(\varepsilon_{r1}-1)$

$=-\dfrac{10^{-8}(5-1)}{4\pi\times5\times10^{-2}}$（$\hat{n}$是介质 1 内表面的外法线指向球心）

$=-6.37\times^{-8}$（库/米）

两种介质分界面上的极化电荷面密度：

$\sigma'=(\vec{P}_2-\vec{P}_1)\bullet\hat{n}_{21}$　（$\hat{n}_{21}$也是指向球心）

$=P_1-P_2$

$=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_{r1}(d+R)^2}(\varepsilon_{r1}-1)-\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_{r1}(d+R)^2}(\varepsilon_{r2}-1)$

$=1.59\times10^{-8}$（米/库）

（4）画出$D(r)$、E（r）、U（r）曲线。

（5）画出电力线和电位移线电位移线与电力线做图比例不同。

$\rightarrow$表示电位线

$-\cdot\rightarrow$表示电力线

3．5．9 一金属球带有电量 Q，其半径为a，球外有一内半径为b的同心金属=球壳，球壳接地，球与壳间充满介质，其相对介电常数与到球心的距离r的关系：$\varepsilon_r=\dfrac{K+r}{r}$，式中 K 是常数。证明：在介质中，离球心为 r

$\therefore E_{2n}=\dfrac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}E_{1n}$

$=\dfrac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}E\cos45^\circ$

界面两侧的电场强度的切向分量是连续的，即：

$E_{2t}=E_{1t}=E_1\sin45^\circ$

$\therefore E_2=(E_{2n}^2+E_{2t}^2)^{\frac{1}{2}}$

$=\{（\dfrac{3}{7})^2E_1^2\cos^2 45^\circ+E_1^2\sin^2 45^\circ\}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}E_1\{\frac{9}{49}+1\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1000\times(\frac{58}{49})^{\frac{1}{2}}$$

=769（伏/米）

$$tg\alpha=\frac{E_{2T}}{E_{2n}}=\frac{E_1\sin 45^{\circ}}{\frac{3}{7}E_1\cos 45^{\circ}}=2.333$$

$$\therefore\alpha=66^{\circ}48'$$

3．6．3* 在相对介电常数为ε_r的均匀介质与真空的交界面为一平面。已知真空中均匀场强$\vec{E}_0$与界面法线夹角为θ，试计算：

（1）以界面上一点为球心，R 为半径的球面上场强$\vec{E}$的通量。

（2）如图所示，两边与界面平行的一矩形积分路径$\oint\vec{D}\bullet d\vec{l}$。

解：（1） $E_{0n}=E_0\cos\theta$

$$E_{0t}=E_0\sin\theta$$

因为在介质的界面上无自由电荷存在，

$$\therefore D_{1n}=D_{2n}$$

即：$\varepsilon_0E_{0n}=\varepsilon_0\varepsilon_rE_n$

$$\therefore E_n=\frac{E_{On}}{\varepsilon_r}=\frac{E_0\cos\theta}{\varepsilon_r}$$

$$\Phi=\oiint\vec{E}\bullet d\vec{S}=(-E_n+E_{0n})\pi R^2$$

$$=E_0\cos\theta\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\pi R^2$$

（2）场强的切线分量连续：

$$E_{0t}=E_t=E_0\sin\theta$$

$$\because D_{Ot}=\varepsilon_0E_{0t}=\varepsilon_0E_0\sin\theta$$

$$D_t=\varepsilon_0\varepsilon_rE_{ot}=\varepsilon_0\varepsilon_rE_0\sin\theta$$

$$\therefore \oint \vec{D} \bullet d\vec{l} = l\varepsilon_0 E_0 \sin\theta - l\varepsilon_0 \varepsilon_r E_0 \sin\theta$$

$$= l\,\varepsilon_0 E_o \sin\theta(1-\varepsilon_r)$$

3.6.4* 如图所示，A 在介质中离电介质边界极近的一点。已知电介质外真空中的场强为 $\vec{E}_0$，其方向与界面法线夹角为 α_0。求：

（1）A 点的场强大小与方向；

（2）A 点附近介质的极化电荷密度。[介质的相对介电常数为 ε_r]

解：（1） $E_{0t} = E_t = E_0 \sin\alpha$，在介质的界面上无自由电荷存在时，电位移矢量法向分量连续。

$\therefore D_{0n} = D_n$

即 $\varepsilon_o E_{on} = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_n$

$$\therefore E_n = \frac{E_{0n}}{\varepsilon_r} = \frac{E_0 \cos\alpha_o}{\varepsilon_r}$$

$$\therefore E = (E_t^2 + E_n^2)^{\frac{1}{2}} = (E_0^2 \sin^2_{\alpha_o} + \frac{E_o^2 \cos^2_{\alpha_0}}{\varepsilon_r^2})^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{E_o}{\varepsilon_r}(\cos^2_{\alpha_0} + \varepsilon_r^2 \sin^2_{\alpha_o})^{\frac{1}{2}}$$

方向： $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{E_t}{E_n} = \varepsilon_r tg\alpha_O$

(2) $\sigma = P_n = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E_n = \dfrac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} E_0 \cos\alpha,$

3.7.1 将平行板空气电容器充电至电位差 U，然后断开电源，电容器极板的面积为 S，极板间的距离为 d，两极板是竖直放置的。使电容器有一半放在相对介电常数为 ε_r 的液体中，

试求：（1）电容 C；

（2）极板上自由电荷密度 σ_o 的分布；

（3）两极板间空气中及介质中的电场强度；

（40 放入液体后，电容器的能量比原来电容器的能量减少多少？

解：（1）C 等效成两个电容器的并联：

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{2d}+\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{2d}$$

$$=（1+\varepsilon_r)\frac{\varepsilon_0 S}{2d}$$

（2）设$u'=E_0 d=E$ d

$\therefore E_0=E_{介}$

$$\therefore \frac{D_0}{\varepsilon_0}=\frac{D_{介}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

即：$D_0=\dfrac{D_{介}}{\varepsilon_r}$

设放在液体中的那部分极板上的电荷面密度为σ_{02}，没有放在液体中的那部分极板上的电荷面密度为 σ_{01}：

对平行板电容器：$D_0=\sigma_{01}$　　$D_{介}=\sigma_{02}$

$$\therefore \sigma_{01}=\frac{\sigma_{02}}{\varepsilon_r}$$

电容器所带总电量

$$Q=C_0 U=\frac{\varepsilon_0 SU}{d}$$

$\therefore$总电量不变

$$Q=\sigma_{01}\frac{S}{2}+\sigma_{02}\frac{S}{2}=\frac{S}{2}\sigma_{01}(1+\varepsilon_r)=\frac{\varepsilon_0 SU}{d}$$

$$\therefore \sigma_{01}=\frac{2\varepsilon_0 U}{(1+\varepsilon_r)d}$$

$$\sigma_{02}=\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_r U}{(1+\varepsilon_r)d}$$

(3) U'=E_0d=Ed

$$\therefore E_0=E=\frac{\sigma_{01}}{\varepsilon_0}=\frac{2U}{(1+\varepsilon_r)d}$$

(4) 没浸入液体前电容的能量：

$$W_0=\frac{1}{2}C_0U^2=\frac{\varepsilon_0\ SU^2}{2d}$$

浸入液体中以后电容器的能量：

$$W=\frac{Q^2}{2C}=\frac{\varepsilon_0{}^2S^2U^2}{2d^2}\bullet\frac{2d}{(1+\varepsilon_r)\varepsilon_0 S}$$

$$=\frac{\varepsilon_0 SU^2}{d(1+\varepsilon_r)}$$

能量变化：

$$\Delta W=W-W_0=\frac{\varepsilon_0 SU^2}{d}\left(\frac{1}{1+\varepsilon_r}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)SU^2}{2d(1+\varepsilon_r)}$$

3．7．2 平行板电容器极板的面积为 200 厘米^2，极板间的距离为 1.0 毫米，在电容器内有一块玻璃板$(\varepsilon_r=5)$充满两极板间的全部空间，求在下面的情况下，若玻璃板移开，电容器的能量的变化？(1)将电容与电动势为 300 伏的电源相连。(2)充电后，将电源断开在抽出玻璃板。

解：(1)电容器与电动势为 300 伏的电源相连时，保持电容器两端电压不变。在无玻璃板与有玻璃板两种情况下，电容器的电容：

$$C_0=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$$C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$$

能量变化：

$$\Delta W=W_0-W=\frac{1}{2}U^2(C_0-C)$$

$$=\frac{\varepsilon_0 SU^2}{2d}(1-\varepsilon_r)$$

$$=\frac{8.85\times10^{-12}\times2\times10^{-2}\times9\times10^4}{2\times10^{-3}}(1-5)$$

=-3.2$\times 10^{-5}$ (焦耳)

(2)充电后，将电源断开，这时保持极板上总电荷Q不变：

Q=UC=$\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r SU}{d}$

$$\Delta W = W_0 - W = \frac{1}{2}Q^2\left(\frac{1}{c_0}-\frac{1}{C}\right)$$

$$=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 SU^2}{2d}(1-\varepsilon_r)$$

$$=\frac{8.85\times10^{-12}\times5\times2\times10^{-2}\times9\times10^{4}}{2\times10^{-3}}(5-1)$$

=+15.9$\times 10^{-5}$ (焦耳)

3.7.3 电量为Q$_0$的导体球，置于均匀无限大的电介质中，已知介质的相对介电常数ε_r，导体球半径为R，求储藏在电介质中的能量密度。

解：在均匀无限大电介质中，导体球表面电荷均匀分布，用高斯定理求出D，

$$\therefore D = \frac{Q_0}{4\pi r^2}$$

E=$\dfrac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \dfrac{{Q_0}^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$

$\therefore$能量密度：

W=$\dfrac{1}{2}$DE= $\dfrac{{Q_0}^2}{32\pi^2 r^4\varepsilon_0\varepsilon_r}$

3.7.4 求 3.5.5 题 ，当两金属极板上自由电荷为$\pm Q_0$时，分别求两种介质中的能量密度及总能量。

解：设两部分介质对应　极板上自由电荷面密度为σ_1，σ_2

E$_1$=E$_2$$=\dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}=\dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}$

D$_1$$=\varepsilon_0\varepsilon_{r1}E_1=\sigma_1$

$D_2 = \sigma_2$

$$\therefore \quad \begin{cases} \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = Q_0 \\ \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_{r1}} = \dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_{r2}} \end{cases}$$

$$\therefore \sigma_1 = \frac{Q_0 \varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r1} S_1 + \varepsilon_{r2} S_2}$$

$$\sigma_2 = \frac{Q_0 \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} S_1 + \varepsilon_{r2} S_2}$$

$$\therefore w_1 = \frac{1}{2} E_1 D_1 = \frac{\sigma^2{}_1}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} = \frac{Q_0{}^2 \varepsilon_{r1}}{2\varepsilon_0 \left(\varepsilon_{r1} S_1 + \varepsilon_{r2} S_2\right)^2}$$

$$w_2 = \frac{1}{2} E_2 D_2 = \frac{Q_0{}^2 \varepsilon_{r2}}{2\varepsilon_0 \left(\varepsilon_{r1} S_1 + \varepsilon_{r2} S_2\right)^2}$$

$$\therefore W = w_1 V_1 + w_2 V_2$$

$$= \frac{Q_0{}^2}{2\varepsilon_0 \left(\varepsilon_{r1} S_1 + \varepsilon_{r2} S_2\right)^2} \left(\varepsilon_{r1} S_1 d + \varepsilon_{r2} S_2 d\right)$$

$$= \frac{Q_0{}^2 d}{2\varepsilon_0 \left(\varepsilon_{r1} S_1 + \varepsilon_{r2} S_2\right)}$$