第二章 导体周围的静电场

2.1.1 证明： 对于两个无限大带电平板导体来说：

（1）相向的两面（附图中 2 和 3）上，电荷的面密度总是大小相等而符号相反；

（2）相背的两面（附图中 1 和 4）上，电荷的面密度总是大小相等而符号相同；

证：(1) 选一个侧面垂直于带电板，端面分别在 A,B 板内的封闭圆柱形高斯面，由高斯定理得：

$$\oiint \vec{E}\bullet d\vec{S}=\iint_{侧}\vec{E}_{侧}\bullet d\vec{S}+\iint E_{A内}\Delta S+\iint E_{B内}\Delta S=\frac{(\sigma_2+\sigma_3)}{\varepsilon_0}\Delta S$$

$$\because \vec{E}_{侧}\perp d\vec{S}_{侧} \qquad E_{A内}=E_{R内}=0$$

$$\therefore \oiint \vec{E}\bullet d\vec{S}=0 \qquad \sigma_3+\sigma_2=0$$

即：$\sigma_3=-\sigma_2$

（2）在导体内任取一点 P，$\because \vec{E}_p=0$

$$\therefore \vec{E}_p=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3+\vec{E}_4=\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}\hat{n}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{n}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}\hat{n}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}\hat{n}=0$$

$$\therefore \sigma_1=\sigma_4$$

其中 $\hat{n}$ 是垂直导体板向右的单位矢。

2.1.2 两平行金属板分别带有等量的正负电荷,若两板的电位差为 160 伏特,两板的面积都是3.6平方厘米,两板相距1.6毫米,略去边缘效应,求两板间的电场强度和各板上所带的电量(设其中一板接地).

解：设 A 板带负电，其电量是-q，B 板带正电，其电量是+q，且 A 板接地。

两板间的电场强度：

$$E=\frac{V}{d}=\frac{160}{1.6\times10^{-3}}=10^5(伏/米)$$

又因为 $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$\therefore \sigma_3=\varepsilon_0 E=8.85\times10^{-12}\times10^5=8.85\times10^{-7}(库/米^2)$$

根据上题结论：$\sigma_1=\sigma_4$；$\sigma_2=-\sigma_3$ 又由于 A 板接地，$\therefore \sigma_1=\sigma_4=0$

$$\therefore \sigma_2=-\sigma_3=-8.85\times10^{-7}(库/米^2)$$

$$\therefore A板所带电量:-q=\sigma_2 S=-8.85\times10^{-7}\times3.6\times10^{-4}=-3.2\times10^{-10}(库)$$

B 板所带电量： $q=\sigma_3 S=8.85\times10^{-7}\times.3.6\times10^{-4}=3.2\times10^{-10}$(库）

2.1.3 三块平行放置的金属板 A,B,C 其面积均为 S,AB 间距离为 x,BC 间距离为 d,设 d 极小,金属板可视为无限大平面,忽略边缘效应与 A 板的厚度,当 B,C 接地(如图),且 A 导体所带电荷为 Q 时,试求:

(1)B,C 板上的感应电荷;

(2)空间的场强及电位分布.

解：（1）根据静电平衡时，导体中的场强为零，又由 B,C 接地：

$\therefore\sigma_2=-\sigma_3$

$\sigma_4=-\sigma_5$

$\sigma_1=\sigma_6=0$

$(\sigma_3+\sigma_4)S=Q$(由A板的总电量得）

$\dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0}x=\dfrac{\sigma_5}{\varepsilon_0}(d-x)$(由$A$板的电位得)

解以上方程组得出：

$\sigma_2=-\dfrac{Q(d-x)}{Sd}$ $\sigma_3=\dfrac{Q(d-x)}{Sd}$ $\sigma_4=\dfrac{Qx}{Sd}$ $\sigma_5=-\dfrac{Qx}{Sd}$

B 板上感应电荷：

$Q_B=\sigma_2 S=-\dfrac{Q(d-x)}{d}$

C 板上的感应电荷：

$Q_c=\sigma_5 S=-\dfrac{Qx}{d}$

(2)场强分布：

$\vec{E}_I=0$ $\vec{E}_{II}=\dfrac{Q(d-x)}{Sd\varepsilon_0}\hat{r}_{AB}$ $\vec{E}_{III}=\dfrac{Qx}{Sd\varepsilon_0}\hat{r}_{AC}$ $\vec{E}_{IV}=0$

电位分布：

$U_1=0;$ $U_{IV}=0$

$U_{II}=\dfrac{Q(d-x)}{Sd\varepsilon_0}(x-r)$

$U_{\text{III}}=\dfrac{Q_X}{Sd\varepsilon_{\circ}}(d-x-r)$

其中 r 是场点到板 A 的距离。

2.1.4 一个接地无限大导体平面前放置一半无限长均匀带电直线,使该带电线一端距导体平面距离为 d,如图所示,若带电电线上线密度为η. 试求:

(1)垂足处 0 点的面电荷密度.

(2)求平面上距 0 点为 r 处的面电荷密度

解：（1）半无限长直带电线在 0 电的场强：

$$\vec{E}=\int_d^\infty \frac{-\eta dx}{4\pi\varepsilon_\circ x^2}\hat{i}$$

$$=-\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_\circ d}\hat{i}$$

根据题意知：导体板左侧接地，没有面电荷，对导体板右侧面电荷以 0 点为中心对称分布，由对称性知导体板上的电荷在导体内 0 点产生的场强只有导体板的法线分量，设 0 点的面密度为： $\sigma_\circ \vec{E}_\circ'=-\frac{\sigma_\circ}{2\varepsilon_\circ}\hat{i}$

由叠加原理知，导体板内任一点的场强由带电线与导体板的电荷所共同产生的，在静电平衡时，该场强为零。

即 $$--\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_\circ d}-\frac{\sigma_\circ}{2\varepsilon_\circ}=0$$

$$\therefore \sigma_\circ=-\frac{\eta}{2\pi d}$$

（2）半无限长直带电线在 P 点的场强 x 分量为:

$$dE_X=-dE\cos\alpha$$

$$=-\frac{\eta dx}{4\pi\varepsilon_\circ(x^2+r^2)}\bullet\frac{x}{(x^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=-\frac{\eta x dx}{4\pi\varepsilon_\circ(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore E_X=-\int_d^\infty\frac{\eta x dx}{4\pi\varepsilon_\circ(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_\circ(x^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}$$

同理，在静电平衡时，导体板内的场强为零。因而其 x 分量与 y 分量均为零。

在 x 方向:

$$-\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_{\circ}(x^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{\sigma_p}{2\varepsilon_{\circ}}=0$$

$$\therefore \sigma_p=-\frac{\eta}{2\pi(r^2+d^2)^{\frac{1}{2}}}$$

在 y 方向，E_Y 在导体内也为零。原因在于导体面上的电荷分布不均匀，这些电荷在 p 点所产生的场强与半无限长带电线在 P 点的场强 y 方向上恰好相抵。

2.1.5半径为 r 的 金属球与大地相连，在与球心相距 d=2R 处有一点电荷 q(>0),求球上的感应电荷 q' 有多大（设其距离地面及其他物体可认为是很远的）？

解∵金属球在静电平衡情况下是一个等位体，与地等电位，即 U=0。球心处的电位也为零。

根据叠加原理知道，球心上电位等于点电荷 q 及球面上电荷在 O 点的点位代数和：

电荷 q 在求新出的点位：

$$U_q=\frac{q}{8\pi\varepsilon_{\circ}R};$$

球面上的 电荷在球心产生的点位：

设球面上某面元的电荷面密度为σ

$$U_R=\oiint\frac{\sigma ds}{4\pi\varepsilon_{\circ}R}\oiint\sigma\bullet ds$$

$$=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_{\circ}R}$$

由叠加原理得：

$$U=U_q+U_R=\frac{q}{8\pi\varepsilon_{\circ}R}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_{\circ}R}=0$$

$$\therefore q'=-\frac{q}{2}$$

讨论：q' 的大小与 q 到球心的距离有关，当 q 很接近球面时，即 q 到球心的距离约为 R 时，球面对点电荷 q 所在处而言，可视为无限大平面，因而有 $q'=q$.

2.1.6 如图所示，半径为 R_1 的 导体球带电量 q，在它外面罩一同心的金属球壳，其内外壁的半径分别为 $R_2\cdot R_3$, 已知 $R_2=2R_1, R_3=3R_1$, 今在距球心为 $d=4R_1$ 处放一电量为 Q 的点电荷，并将球壳接地，试问：

（1）球壳带的总电量是多大？

（2）如用导线将壳内的导体球与壳相连，球壳带电量是多少？
解：（1）点电荷 Q 在球心 0 点 的 电位：

$$U_Q = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\Diamond d}$$

$S_1,S_2\ S_3$三个面上的电荷对球心 0 点电位贡献：

$$U_{S_1} = \oiint_{S_1} \frac{\sigma_1 ds}{4\pi q_\circ R_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ R_1}$$

$$U_{S_2} = \oiint_{S_2} \frac{\sigma_{2DS}}{4\pi\varepsilon_\circ R^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ R^2}$$

（ 有高斯定理得 S_2 面上的总电荷量为-q）

在 P 点与面元 ΔS 所在处产生的场强是连续的，均为 $\sigma/2\varepsilon_0 \quad \hat{n}$.

$\therefore$ 小面圆 Δs 所受的力：

$$\vec{F} = \vec{E}_2 \Delta S\ \sigma = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \bullet \Delta s \hat{n}$$

$$\because \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \vec{F} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \Delta S \hat{n}$$

$\therefore$ 单位面元所受的力为 $\frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \hat{n}$

2•1•8　一个半径 R=1.5（厘米）的金属球，带有电量 q=10(微库)，求半球所受的力的大小。
解：一个孤立导体球其上电荷均匀分布

$$\sigma = \frac{q}{s} = \frac{q}{4\pi R^2}$$

利用 2•7•1 题的结论导体表面某面元所受的力；

$$\mathrm{d}\vec{F} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} ds \hat{n}$$

建立坐标，利用对称性可得出 yoz 面分割的右半球面所受的合力的方向是 x 轴方向，

$\therefore \quad \vec{F}=\iint d\sin\theta\sin a\varphi\,\hat{i}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\iint\sin\theta\sin\varphi ds\,\hat{i}$

$$=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\iint R^2\sin\varphi\sin^2\theta d\theta d\varphi\,\hat{i}$$

$$=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}R^2\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta\,\hat{i}$$

$$=\frac{\pi\sigma^2R^2}{2\varepsilon_0}\hat{i}=\frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0R^2}\hat{i}$$

$$=\frac{10^{-10}}{32\pi\times8.85\times10^{-12}\times1.5^2\times10^{-4}}\hat{i}$$

$=0.5\times10^3\,\hat{i}$（牛顿）

2.1.9　一置于均匀电场中的半径为 R 的中性导体球，球面感应电荷面密度 $\sigma=\sigma_0\cos\theta$，求带有同号电荷的球面所受的力。

解：利用 2.1.7 题结果，球面上某面元受的力是沿 x 轴方向；

右半球所受的力：

$$\mathrm{d}\vec{F}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\Delta S\,\hat{n}$$

利用对称性可知，带有同种电荷所受的力是沿 x 轴方向：

右半球所受的力：

$$F_{右}=\iint\frac{\vec{\sigma}^2}{2\varepsilon_0}\cos\theta ds\,\hat{i}$$

$$u_s=\oiint_{s3}\frac{\sigma_3 ds}{4\pi\varepsilon_0R_S}=\frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0R_S}$$

根据电位迭加原理，球心 O 点的电位：

$$U_0=U_Q+U_{S1}+U_{S2}+U_{S3}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{d}+\frac{Q'}{R_S}+\frac{-q}{R_2}+\frac{q}{R}\right)$$

又因为：$U_0=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}dr$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

解得：$Q^{'}=-\dfrac{3}{4}Q$

$\therefore$球壳带的总电量为：$-\dfrac{3}{4}Q-q$

（2）内外球用导线相连时，仍用电位迭加原理计算球心 0 点的电位：

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d}+\oiint_{s_3}\frac{\sigma ds}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=0$$

即 $$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d}+\frac{Q^{'}}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=0$$

解之得：$Q^{'}=-\dfrac{3}{4}Q$

2.1.7 证明：在静电平衡时，导体表面某面元所受的力 $\vec{F}=\dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\Delta s\hat{n}=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\ \Delta s\hat{n}$；单位面积受的力为$\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\ \hat{n}$（其中$\vec{E}$为紧靠导体表面处的场强）。

证：在静电平衡时，对任意导体上取一小面元Δs，其面电荷为σ，如图所示。

在导体内侧离小面元Δs极近一点 P，小面元Δs在该点产生的场强$\vec{E}_{1p}$可用无限大带电平面公式表示：$\vec{E}_{1p}=-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$

设在导体面除小面之外其余电荷在p点产生的场强为$\vec{E}_{2p}$，P 点的总场强是面上所有电荷在该点场强的总贡献，即$\vec{E}_P=\vec{E}_{1p}+\vec{E}_{2p}$。根据静电场平衡条件可知，在导体内部场强

$\vec{E}_{内}=0$

即：$\vec{E}_{1p}+\vec{E}_{2p}=0$

$\therefore \vec{E}_{2p}=-\vec{E}_{1p}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$

因 P 点是距Δs极近的一点，所以除Δs外的其余电荷

$$=\iint \frac{\sigma_0^2}{2\varepsilon_0}\cos^2\theta \bullet \cos\theta R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \hat{i}$$

$$=\frac{\sigma_0^2 R^2}{2\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \sin\theta d\theta \hat{i}$$

$$=\frac{\sigma_0^2 R^2 \pi}{4\varepsilon_0}\hat{i}$$

$$\vec{F}=-\frac{\sigma_0^2 R^2 \pi}{4\varepsilon_0}\hat{i}$$

2.2.1 点电荷 q 放在中性导体的中心，壳的内外半径分别为R_1和R_2（见俯图）。求场强和电位的分布，并画出 E-r 和 U-r 曲线。

解：（a）场强分布：利用高斯定理可求得：

r＜R_1 ： $\vec{E}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

R_1＜ r ＜R_2： $\vec{E}=0$

r＞R_2： $\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

(b)电位分布：

设距球心 r 处的电位 U：

r≥ R_2： U=$\int_r^{\infty}\vec{E}\bullet d\vec{l}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$R_1 \le r \le R_2$；

U=$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

$r \le R_1$： $U=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^{R_1}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr+\int_{R_2}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}$ （$\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$）

E-r，U-r 曲线如图。

2.2.2 如图所示，球形金属带电量 Q>0,内半径为 α，外半径 b，腔内距球心 O 为 r 处有一点电荷 q，求球心 O 的电位。

解：用高斯定理可证得：金属腔内表面S_x所带的总电量为-q，因为电荷守恒，

金属腔外S_b

所带电量为 Q+q

∴ 球心 0 的电位：

$$U_0=U_q+U_{-q}+U_{Q+q}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\oiint_{sa}\frac{\sigma_0 ds}{4\pi\varepsilon_0 a}+\oiint_{sb}\frac{\sigma_0 ds}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\oiint_{sa}\sigma_a ds+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 b}\oiint_{sb}\sigma_a ds$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

2.2.1 一半径为R_A的金属球 A 外罩一个同心金属球壳 B，球壳极薄，内外半径可看作R_B。（如图所示）已经知道 A 带电量为Q_A，B 带电量为Q_B，试求：

（1）A 的表面S_2，S_3的电量；

（2）求 A，B 球的电位（无限远处电位为 0)；

（3）在 B 外罩一个同心的很薄中性金属壳，再答（1)，(2）两问；

（4）用导线将 A，B 球相连，再答（1)，(2）两问；

（5）将 B 接地，再答（1)，(2）两问（B 外不再罩有球壳)；

（6）将 A 接地，再答（1)，(2）两问（B 外不再罩有球壳)；。

解：根据高斯定理及电荷守恒定律可得出以下结论：

（1）$Q_{s1}=Q_A$，$Q_{s2}=-Q_A$

$$Q_{S3}=Q_A+Q_B$$

（2）$U_B=\dfrac{Q_A+Q_B}{4\pi\varepsilon_0 R_B}$

$$U_A=U_B+\int_{R_A}^{R_B}\frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$=\frac{Q_A+Q_B}{4\pi\varepsilon_0 R_B}+\frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_B}{R_B}+\frac{Q_A}{R_A}\right)$$

（3）在 B 外再罩一个同心且很薄中性金属壳 C 后，

$Q_{s1}=Q_A$， $Q_{s2}=-Q_A$， $Q_{S3}=Q_A+Q_B$

$Q_{S4}=-(Q_A+Q_B)$， $Q_{S5}=Q_A+Q_B$

$U_C=\dfrac{Q_A+Q_B}{4\pi\varepsilon_0 R_C}$因为 C 壳很薄其内外半径均为$R_C$）

$\therefore \quad U_B=\dfrac{Q_A+Q_B}{4\pi\varepsilon_0 R_B}$

$$U_A=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{Q_B}{R_B}+\frac{Q_A}{R_A})$$

（4）用导线将 A，B 球相接后；

$Q_{S1}=0 \qquad Q_{S2}=0 \qquad Q_{S3}=Q_A+Q_B$

$Q_{S4}=-(Q_A+Q_B) \qquad Q_{S5}=Q_A+Q_B$

$$U_C=\frac{Q_A+Q_B}{4\pi\varepsilon_0 R_C}$$

$$U_B=U_A=\frac{Q_A+Q_B}{4\pi\varepsilon_0 R_B}$$

（5）将 B 球接地（B 外不再有 C 壳）时；

$Q_{S_1}=Q_A Q_{S_2}=-Q_A Q_{S_3}=0$

$U_B=O$

$$U_A=\frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B})$$

（6）将 A 球接地（B 外不再有壳）时：

设球所带电量为Q_A，

$$U_A=\frac{Q_B+Q_A{}'}{4\pi\varepsilon_0 R_B}-\frac{Q_A{}'}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{R_B}-\frac{1}{R_A})=0$$

$$\therefore Q_A{}'=-\frac{R_A}{R_B}Q_B$$

$$Q_{S_1}=Q_A{}'=-\frac{R_AQ_B}{R_B}$$

$$Q_{S_2}=Q_A{}'=\frac{R_A\,Q_B}{R_B}$$

$$Q_{S_3}=Q_B+Q_A{}'=Q_B-\frac{R_AQ_B}{R_B}$$

$$=\frac{(R_B-R_A)Q_B}{R_B}$$

$$U_B=\frac{Q_B+Q_A{}'}{4\pi\varepsilon_0 R_B}=\frac{(R_B-R_A)Q_B}{4\pi\varepsilon_0 {R_B}^2}$$

2．2．4 两个同心球壳，内球壳半径为 a，外球壳半径为 b，设球壳极薄，已知内球壳带电量为Q_1，试问：

（1）在外球壳带多大电量时，才能使内球壳的电位为零。

（2）距球心为 r 的处的电位多大？

解：（1）设外球壳 B 所带电量为Q_2

$$U_A=\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 b}+\int_a^b\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$=\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 b}-\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{b}-\frac{1}{a})=0$$

$$\therefore Q_2=-\frac{b}{a}Q_1$$

（2）当$r\ge b$时：

$$U=\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}(1-\frac{b}{a})$$

当$a\le r\le b$时，

$$U=\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 b}+\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r}-\frac{1}{b})$$
$$=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r}-\frac{1}{a})$$

当 $r\le a$ 时，U=0

2．2．5　同轴传输线是由两个很长且彼此绝缘的同轴金属直圆柱体组成（见附图）。设内圆柱体的电位为 U_1，半径为 R_1，外圆柱体的电位为 U_2，内半径为 R_2，求其间离轴为（$R_1\prec r\prec R_2$）处的电位。

解；设外圆柱表面沿轴线单位长度上所带电量为 λ，P 点是两圆柱体间离轴线为 r 的任意一点其强度 E=$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

内外柱面的电位差：

$$U_1-U_2=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}\qquad（1）$$

内圆柱体与 P 点的电位差：

$$U_1-U_P=\int_{R_1}^{r}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}dr=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R_1}\qquad（2）$$

由（1），（2）两式可得：

$$U_P=U_1-(U_1-U_2)\frac{\ln(\frac{r}{R_1})}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$$

2．3．1 计算大地的电容（将其当作真空中的导体球，R=6370 千米）。

解：设地球所带电量为 Q，其电位 U=$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

根据电容的定义：

C=$\frac{Q}{U}=4\pi\varepsilon_0 R=4\pi\times8.85\times10^{-12}\times6.37\times10^{6}=7.1\times10^{-4}$（f）

2．3．2 如图所示，平行板电容器两极板的面积都是 S，相距为 d，其间平行放置一厚度为 t 的金属板。略去边缘效应。

（1）　求电容 C。

（2） 金属板离极板的远近对电容值有无影响。

（3） 设没有放金属板时的电容器的电容$C_0=600(\mu F)$,

两极板间电位差为10伏，当放入厚度 t=$\frac{d}{4}$的金属板时，求此时电容C及两板间的电位差U（设电量不变）。

解：（1）AC间的电容等于AB间电容与BC间电容的串联。

设BC间距离为x

$$\therefore C_{AB}=\frac{\varepsilon_0 S}{d_{AB}}=\frac{\varepsilon_0 S}{d-t-x}$$

$$C_{BC}=\frac{\varepsilon_0 S}{d_{BC}}=\frac{\varepsilon_0 S}{x}$$

$$C=\frac{C_{AB.}\cdot C_{BC}}{C_{AB}+C_{BC}}=\frac{\varepsilon_0 S}{d-t}$$

（2）因为C=$\frac{\varepsilon_0 S}{d-t}$与x无关，所以金属板的位置对C无影响

（3）$\because C_0=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$

2.。3.3 求同轴圆柱形电容器的电容C。并证明：当两极的半径很小时（即R1-R2〈〈〉时，它的电容公式趋于平形板电容公式。（设内柱半径是R2，柱高L，忽略边缘效应。）

解：a） 设内圆柱体所带电量q，其长度为L，沿轴线单位长度所带的电量为$\lambda=\frac{q}{L}$

内外圆柱体的电位差：

U=$U_1-U_2=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_{0\varepsilon}L}\ln\frac{R_2}{R_1}$

C=$\frac{Q}{U}=\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$

B）证明：当 d=$\Delta R=R_{1-}-R_2<<R_1$时，圆柱形电容公式趋于平板电容嚣公式：

C=$\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{R_2}{R_1}}=\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(1+\frac{\Delta R}{R_1})}$

由于$\Delta R << R_1$ ，分母展成台劳级数，取第一项得：

$$\ln(1+\frac{\nabla R}{R_1})=\frac{\nabla R}{R_1}$$

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\Lambda R/R}=\frac{2\pi\varepsilon_0 LR1}{\Delta R}=\frac{\varepsilon_0 S}{\Delta R}=\frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad (S=2\pi R1L)$$

即平板电容器公式。

2．3．4 证明：同心球形电容器两极的半径差很小（当 R2--R1<<R1)时，它的电容公式趋于平形板电容公式。

证：　　同心球形电容器的公式：

$$C=\frac{4\pi\varepsilon_0 R1R2}{R2-R1}$$

当 R2-R1《《R1 时，则 R1=R2=R

$$C=\frac{4\pi\varepsilon_0 R1R2}{R2-R1}=\frac{4\pi\varepsilon_0 R^2}{d}=\frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad (S=4\pi R^2)$$

即平形板电容器公式。

2．3．5 一球形电容器，内球与外球壳分别为 R1，R2（球壳极薄），设该电容器与地面和其它物体相距却很远，现将内球通过细导线接地，试证明：此时球面间的电容可以有用公式

$C=\dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}{R_2-R_1}$ 来表示。（提示：此时可看成两个球形电容器并联，设地球半径为 R，并 R)》R2）

解：A ，看成两个极板，除内外球构成一个电容器之外，外球表面与地面也形成一个电容器 ，如图，即：

$$C_{AB}=\frac{4\pi\varepsilon_0 R1R2}{R2-R1} \qquad C_{B地}=\frac{4\pi\varepsilon_0 RR2}{R-R1}$$

图为地球的半径 R》R2

所以 ：$C_{B地}=\dfrac{4\pi\varepsilon_0 R2}{1-R_2/R}=4\pi\varepsilon_0 R_2$

所以： $C=C_{AB}+C_{B地}=\dfrac{4\pi\varepsilon_0 R1R2}{R2-R1}+4\pi\varepsilon_0 R_2=\dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}{R_2-R_1}$

2．3．6 如图示，空气平形板电容器是由两块相距为 0。5 毫米的薄金属板 A　B

构成，若将此电容器放在一金属盒 K 内，K 金属盒上下两壁与分别相距 0。5 毫米。在不计边缘效应时，电容器电容变为原来几倍？若将盒中电容的一极板与金属盒相连接，这时电容器电容变为原来几倍？
解：1 ）第一种情况，可将电容器等效成如图（A）所示的形式：

$$C_{AK}=\frac{\varepsilon_0 S}{d/2}=\frac{2\varepsilon_0 S}{d} \qquad C_{KB}=\frac{2\varepsilon_0 S}{d}$$

（其中 d=0.5mm，即 A,B 两板间的距离）

$$C_K=\frac{C_{AK}\cdot C_{AB}}{C_{AK}+C_{AB}}=\frac{2\varepsilon_0 S}{2d}=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

所以： $C_{AB}=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

所以： $C=C_K+C_{AB}=\dfrac{2\varepsilon_0 S}{d}=2C_{AB}$

可见，电容器变为原来的 2 倍

2 ）第二种情况，可将电容器等效成如图（B）所示的形式：

。$C_{AK}=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d/2}=\dfrac{2\varepsilon_0 S}{d} \qquad C_{AB}=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

$$C=C_{AK}+C_{AB}=\frac{2\varepsilon_0 S}{d}+\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d-d/4}=\frac{4}{3}C_0=800\text{(微法)}$$

所以 ： $U=\dfrac{Q}{C}=\dfrac{C_0U_0}{C}=10\times\dfrac{3}{4}=7.5$（伏）

$$=3\frac{\varepsilon_0 S}{d}=3C_{AB}$$

可见电容器的电容变为原来的 3 倍
2. 3. 7 图中所标数值为电容器的电容，单位是微法
（1）求 AB 间总电容
（2）若 AB 间电位差为 900 伏，求离 AB 最近的两电容器 $C_{1,}$,C_9 上的电量
（3）若 AB 间电位差为 900 伏，求 CD 间电位差。
解：
（1） 根据电容器串并联公式得：

C_{AB}=1（μf）

(2) $Q=C_{AB}U=10^{-6}\times 900=9\times 10^{-4}$(库仑)

$\because \dfrac{1}{C_{AB}}=\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_{EF}}+\dfrac{1}{C_9}$ 如图（a）等效电容 CAB 量板上的电量与 C_1、C_9 上的电量相等。

$\therefore C_1$、C_9 上的电量也为 9×10^{-9} 库仑

（3）$\because C_3$、C_4、C_5、三电容串联的电容为

$C_{CD}=1(\mu f)$

$C_{CD}=C_6+C_{CD}'=3(\mu f)$

C'_{EF} 等于 C_2、C_{CD}、C_7 串联，$\therefore C`_{EF}=1(\mu f)$

$\therefore$ 原图可等效成图(b)

$\therefore Q_{C8}+Q_{C'EF}=Q$

$Q_{C8}=2\times 10^{-8}U_{EF}$

$Q_{C'EF}=10^{-6}U_{EF}=\dfrac{1}{2}Q_{C8}$

$Q_{C8}+Q_{C'EF}=\dfrac{3}{2}Q_{C8}=3Q_{C'EF}=9\times 10^{-4}$(库仑)

$\therefore Q_{C'EF}=3\times 10^{-4}$(库仑)

$Q_{C8}=6\times 10^{-4}$(库仑)

$U_{C1}+U_{C9}+U_{EF}=900$(伏)

$\because$ C1+C9+CEF

$\therefore$ UEF=300(伏)

又$\because C_2=C_7=C_{CD}=3(\mu f)$如图（c）所示，

$\therefore U_{C2}=U_{C7}=UC_{CD}$

$\therefore U_{CD}=\dfrac{300}{3}=100$(伏)

2．3．8　如图所示，三个分别为 8、8 和 4 微法的电容器串联，其两端 A、B 间电压为 12 伏

（1）求 4 微法的电容的电量。

（2）将三者拆开后再并联（同行极板再一起）求电容器组两端电压。

解：（1）根据电荷守恒定律，三个串联电容上的电量相等：

$C_{AB}=2(\mu f)$

$Q=C_{AB}U_{AB}=2\times 10^{-6}\times 12=24\times 10^{-6}$(库仑)

$Q_1=Q_2=Q_3=24\times 10^{-6}$(库仑)

（2）　将三个电容器同极性在一 起，(如图)，总电量：

$=Q_{AB}+Q_1+Q_2+Q_8=3\times 24\times 10^{-6}=72\times 10^{-6}$(库伦)

$C_{AB}=C_1+C_2+C_3=20(\mu f)$

$U_{AB}=\dfrac{Q_{AB}}{C_{AB}}=\dfrac{72\times10^{-6}}{2\times10^{-5}}$=3.6(伏)

2.3.9 如图所示：C_1=1.0(微法)，C_2=0.5(微法)C_3=0.5（微法)，C_4=1.0（微法)，C_6=1.0(微法)，$q_5=10^{-4}$(库伦)

试求：q_6、U_{bc}、p_8、p_2、U_{ac}

解：因 C_5 与 C_6 串联：

$\therefore Q_5=q_6=10^{-4}$(库伦)

$\therefore U_b=\dfrac{q^5}{C'_{bc}}=\dfrac{10^{-4}}{0.5\times10^{-6}}=2\times10^{-6}$(伏)

其中 C'_{bc} 等于 C_5 与 C_6 串联：

$C'_{bc}=0.5(\mu f)$

C''_{bc} 等于 C4 与 C3 串联：

C

u"$_{彼此}=\dfrac{1}{3}(\mu f)$

$Q3=q4=C''_{bc}U_{bc}=\dfrac{1}{3}\times10^{-6}\times2\times10^{2}=\dfrac{2}{3}\times10^{-4}$（库伦）

$Q_2=q_5+q_3=\dfrac{2}{3}\times10^{-4}+10^{-4}=\dfrac{5}{3}\times10^{-4}$

$C_{ab}=\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\dfrac{1\times0.5}{1+0.5}=\dfrac{1}{3}(\mu f)$　$U_{ab}=\dfrac{q}{C_{ab}}=\dfrac{\frac{5\times10^{-4}}{3}}{\frac{1\times10^{-6}}{3}}=5\times10^{-2}$(伏)

$\therefore U_{ac}=U_{ab}+U_{bc}=5\times10^{2}+2\times10^{2}=7\times10^{2}$(伏)

2．3．10 如图所示，每个电容器的电容单位都是微法，

试求：（1）a，b 间的总电容

（2）$C_3=5$（微法)，若该电容器上所带的电荷电量为 120 微库，试求 a ，c 两点的点位差。

解（1） $C_1+C_2+C_3=12(\mu F)$

$$C_6+C_7=6(\mu F)$$

$$\therefore C_{ab}=\frac{4\times12}{4+12}+\frac{3\times6}{3+6}$$

$$=3+2=5(\mu F)$$

（2）$U_{ab}=\frac{q_3}{C_3}=\frac{120\times10^{-6}}{5\times10^{-6}}=24$(伏）

$\therefore q_2=U_{ab}C_2=24\times4\times10^{-6}=96\times10^{-6}$(库仑）

$q_1=U_{cd}C_1=24\times3\times10^{-6}=72\times10^{-6}$(库仑）

$\therefore q=q_1+q_2+q_3$

$=96\times10^{-6}+72\times10^{-6}+120\times10^{-6}$

$=288\times10^{-6}$(库仑）

$U_{ab}=\frac{q}{C_4}=\frac{288\times10^{-6}}{4\times10^{-6}}=72$(伏）

$\therefore U_{ab}=U_{ad}+U_{db}=24+72=96$(伏）

$C^{''}=\frac{(C_6+C_1)C_5}{C_6+C_1+C_5}=\frac{(2+4)\times3}{2+4+3}=2(\mu F)$

$q^{'}=U_{ab}C_{a^{'}b}=96\times2\times10^{-6}=1.92\times10^{-4}$（库仑）

$U_{ac}=\frac{q^{'}}{C_5}=\frac{1.92\times10^{-4}}{3\times10^{-6}}=64$（伏）

2.3.11 求图中 a,b 间的总电容。设$C_2=10$（微法），其余各电容器均为 4.0（微法）。

解：$\because$体中C_1、C_3、C_4、C_5均为 4（微法）

$\therefore$根据对称性C_2上的电荷为零，

C_4与C_3串联得$C_{a^{'}b}$=2（μF)

C_1与C_5串联得 $C_{a^{''}b}=2(\mu F)$

$\therefore C_{ab}=C_{a^{'}b}+C_{a^{''}b}=2+2=4(\mu F)$

注：次题也可以先设 a、b 之间的电位差为 U，在将各电容器上的电量用 U 的函数表示，按电容的定义求出总电容。

2．3．12 一仪器需用一个 C=120（微微法）、耐压为 2000 伏的电容，现在能否改用两个电容器C_1与C_2，分别标明为C_1：200pF,1000V;C_2:300Pf、1900V

代替原电容？

解：$\because C_1 \rangle C$，$C_2 \rangle C$，$\therefore$ 使用时应将 C_1，C_2 串联。

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

$$\therefore C=\frac{200\times 300}{200+300}=120(pF)$$

电容值符合要求。

在讨论电容器的耐压：

$\because U=2000$（伏）

$$U=U_1+U_2$$

$$Q_1=Q_2=Q=C_1U_1=C_2U_2$$

$$\therefore U_1=\frac{C_2U_2}{C_1}=\frac{3}{2}U_2$$

$$\therefore \frac{3}{2}U_2+U_2=U$$

$$\therefore U_2=\frac{2}{5}U=\frac{2}{5}\times 2000=800\text{（伏）}$$

$$U_2=1200\text{（伏）}$$

$U_1 \rangle 1000$（伏）$\therefore$ C_1 易击穿而损坏，当 C_1 击穿后，2000 伏电压又加在了 C_2 上，结果使二者都有击穿。因此这种代替是不行的。

2．3．13 有两块面积各为 S 的相同金属板，两板这间的距离 d 与板的大小比起来为很小，其中一块板带电荷 q 另一块板带电荷 2q。试求：

（1）两板间的电位差 U 等于多少？

（2）两板之间以及外空间中电场的性质如何（画出电力线即可）？

（3）在两板外面的电场强度为多少？计划计算时略去边缘效应。

解：

（1） 根据静电平衡条件列方程得知：

$$\sigma_1=\sigma_4$$
$$\sigma_2=-\sigma_3$$
$$\sigma_1+\sigma_2=2q/s$$
$$\sigma_3+\sigma_4=q/s$$

解之得： $\sigma_1=\sigma=\dfrac{3q}{2s}$

$$\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{q}{2s}$$

两板相距很近，可视其间为匀强强电场。

$$E_{内} = \frac{\sigma_2}{2S\varepsilon_0}$$

$\therefore$ U= $E_{内}d = \dfrac{qd}{2S\varepsilon_0}$

（2） 两板这间及板外空间的电场如图所示。

（3） $E_{外} = \dfrac{3q}{2S\varepsilon_0}$

2.3.14 把带电金属平板 A 从远处移近中性金属平板 B，已知 A 板带电量为 q_A，两板长、宽均相等，面积为 S，移近后距离 d（d<<$\sqrt{S}$），边缘效应可忽略，求两板的电
位差。

若 B 接地，结果又如何？

解：利用静电平衡条件列方程得：

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_4 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \\ \alpha_1 = \alpha_2 = q_A / S \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

解之 得：$\alpha_1 = q_A / 2S = \alpha_2 = \alpha_4$

$$\alpha_3 = -q_A / 2S$$

U=E$_{内}$ d=$\dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$ d=$\dfrac{q_A d}{2\varepsilon_0 S}$

将 B 板接地：

$$\sigma_1 = \sigma_4 = 0$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{q_A}{S}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{q_A}{S}$$

$\therefore \sigma_2 = -\sigma_3 = \dfrac{q_A}{S}$

U=E内d= － $\dfrac{q_A d}{S\varepsilon_0}$

2●3●15在教材中3.4节例3（2）的基础上，撤去A的接地线，改用导线联接A与B，如图所示。求三板六个面的电荷面密度。

解：$U_{AC}+U_{CB}=U_{AB}=0$

$U_{AC}=\dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0}d_1$

$U_{CB}=\dfrac{\sigma_4}{\varepsilon_0}d_2$

$\therefore U_{AB}=U_{AC}+U_{CB}$

$=\dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0}d_1+\dfrac{\sigma_4}{\varepsilon_0}d_2=0$

或 $\sigma_2 d_1+\sigma_4 d_2=0$

而： $\sigma_2=-\sigma_3$ ； $\sigma_3=\sigma_4=0$ （C板是中性）

$\therefore \sigma_2=\sigma_4$

$\therefore \sigma_4(d_1+d_2)=0$ $\therefore \sigma_4=0$

$\sigma_3=0$ ；$\sigma_2=0$ ；$\sigma_5=-\sigma_4=0$

而 $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_5+\sigma_6=\dfrac{q_A+q_B}{S}=0$

$\sigma_1+\sigma_6=0$ 而 $\sigma_1=\sigma_6$

$\therefore \sigma_1=\sigma_6=0$

即六个面上的面电荷密度皆为零。

2•3•16三个平行胺 A、B、组成一平行板导体组，如图所示。已知 q_A=10 （微库，q_B=-4 （微库），q_C=0,平板的面积为 S=1.0（米^2）

试求：（1）六个面的电荷面密度σ。

（2）用导线联接 C，B 两板，待达到静电平衡后又撤去连线，再求六个面的电荷面密度σ。

（3）在（2）的基础上再用导线联接 A，B 两板，再求六个壁的面电荷密度σ （忽略边缘效应）

解：（1）由教材中 3•4节例 2 解得：

$\sigma_1=3$ ， $\sigma_2=7$ ， $\sigma_3=-7$ ， $\sigma_4=7$

$\sigma_5=-7$ ， $\sigma_6=3$

（2）C，B 联接后

$$\sigma_3+\sigma_4+\sigma_5+\sigma_6=\frac{q_B+q_C}{S}=-4$$

而$\sigma_4=-\sigma_5$ $\therefore\sigma_3+\sigma_6=-4$

又$\sigma_2=-\sigma_3$ ， $\sigma_1=\sigma_6$ ， $\sigma_1+\sigma_2=\dfrac{q_A}{S}=10$

解之得： $\sigma_1=3,\sigma_2=7,\sigma_3=-7,\sigma_4=0,\sigma_5=0,$

$\sigma_6=3$ （σ_3=σ_5=0 是由 C，B 等位得出）

在静电平衡以后，拆去 C，B 联线，电荷分布不变。

（3）拆去 C，B 联线再接 A，B 两板有：

$U_{AC}+U_{CB}=U_{AB}=0$

$$\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}d+\frac{\sigma_4}{\varepsilon_0}d=0 \qquad \therefore\sigma_2+\sigma_4=0\ldots\ldots①$$

而 $\sigma_2=-\sigma_3$ ， $\sigma_3+\sigma_4=-7$

$\therefore\sigma_2=\sigma_4+7$ 代入①式得：

$\sigma_4=-3.5$

$\sigma_3=-3.5$ ， $\sigma_2=3.5$ $\sigma_5=3.5$

而 $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_5+\sigma_6+\dfrac{q_A+q_B}{S}=\dfrac{10+3}{1}=13$

$\therefore \sigma_1+\sigma_6=6 \qquad \sigma_1=\sigma_6=3$

$\therefore \sigma_1=3$ ， $\sigma_2=3.5$ ， $\sigma_3=-3.5$

$\sigma_4=-3.5$ ， $\sigma_5=3.5$ ， $\sigma_6=3$

2•5•1三个点电荷位置如图所示，计算

（1） 各对电荷之间的相互作用能；

（2） 这电荷系统的相互作用能。

解：（1）设 $q_1=-q$ ， $q_2=+q$ ， $q_3=-q$

算出：$W_{12}=\dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}=-\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$

$W_{23}=\dfrac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}=-\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$

$W_{13}=\dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}}=\dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$

（3） $W_互=\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_iU_I$

$=\dfrac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\dfrac{q_iq_j}{r_{ij}}$ （$i\neq j$）

$=\dfrac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(2\dfrac{q_1q_2}{r_{12}}+2\dfrac{q_1q_3}{r_{13}}++2\dfrac{q_2q_3}{r_{23}}\right)$

$=\dfrac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\dfrac{q^2}{a}+\dfrac{q^2}{2a}-\dfrac{q^2}{a}\right)$

$=-\dfrac{3q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$

本题也可以用 $W_互=W_{12}+W_{13}+W_{23}$ 算出。

2.5.2 求一均匀带电球体（非导体）的静电能。设半径为R，带总电量为Q。

解：均匀带电球体内某点的电位：

$U_{(r)}=-\dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}+\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$

$\rho=\dfrac{3Q}{4\pi R^3}$

$dW=\dfrac{1}{2}U_{(r)}dq=\dfrac{1}{2}U_{(r)}\rho dV$

$=\dfrac{1}{2}U_{(r)}\rho r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr$

$W=\iiint_{\vartheta} dW=\iiint \dfrac{1}{2}U_{(r)}\rho r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr$

$=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{R}\left[\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}-\dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}\right]r^2dr$

$=\dfrac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\bullet\dfrac{R^5}{5}$

$=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}-\left(\dfrac{3Q^2}{5R}.\right)$

2.5.3 求带电导体球的静电能。设其半径为 R，所带电量为 Q。

解：根据计算能量公式，对导体球电荷分布在表面：

$W=\dfrac{1}{2}\oiint\sigma U ds=\dfrac{1}{2}U\oiint\sigma ds=\dfrac{1}{2}UQ$

导体球的电位：

$U=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$\therefore W=\dfrac{1}{2}UQ=\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$

C 是孤立导体球电容 $C=4\pi\varepsilon_0 R$

2.5.4 半径为 2.0 厘米的导体球外套有一个与它同心的导体球壳，壳的内外半径分别为 4.0 厘米和 5.0 厘米，球与壳间是空气。壳外也是空气，当内球带电荷为 3.0×10^{-8} 库仑时，试求：

（1） 这个系统静电能；

（2） 如果用导线把壳与球连在一起，结果如何？

解：（1）外球壳的电位

$$U_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_3}$$

内球的电位

$$U_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)$$

系统静电能：

$$W=\frac{1}{2}Q_2U_2+\frac{1}{2}Q_1U_1$$

因为外球壳所带的总电量 $Q_2=0$

$$\therefore W=\frac{1}{2}Q_1U_1=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)$$

$$=\frac{1}{8\pi\times 8.85\times 10^{-2}}\times（3\times 10^{-8}）^2$$

$$\times（\frac{1}{2\times 10^{-2}}-\frac{1}{4\times 10^{-2}}+\frac{1}{5\times 10^{-2}}）$$

$=1.8\times 10^{-4}$（焦耳）

（2） 导线把壳与球连在一起，此时内球所带电量为零

$$W=\frac{1}{2}Q_2U_2=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_3}$$

$$=\frac{(3\times 10^{-8})^2}{8\pi\times 8.85\times 10^{-12}\times 5\times 10^{-2}}$$

$=8.1\times 10^{-5}$（焦耳）

2.5.5 两电容器的电容之比为 C_1：C_2=1：2，把它们串联后接到电源上充电，它们的能量之比是多少？如果并联充电，电能之比是多少？

解：串联电容上电量相等，即：$Q_1=Q_2$

$$W_1=\frac{1}{2}\frac{Q_1{}^2}{C_1}=$$

$$W_2=\frac{1}{2}\frac{Q_2{}^2}{C_2}$$

$$\therefore \frac{W_1}{W_2}=\frac{C_2}{C_1}=2：1$$

两电容并联时，电容器两端电压相等：

$$W_1=\frac{1}{2}C_1U^2$$

$$W_2=\frac{1}{2}C_2U^2$$

$$\therefore \frac{W_1}{W_2}=\frac{C_1}{C_2}=1：2$$