§1-6 环路定理

一、 水流速度场的环量

现讨论静电场的另一个重要性质，即静电场的环量(或叫环流)，由此将得到环路定理。为了便于理解，仍以流体中速度场为例来介绍环量的概念。设水中某处有旋涡，对任一闭合曲线 L，速度沿该闭合曲线一周的积分称速度的环量，即

$$\text{环量} = \oint_L v \cdot dl$$

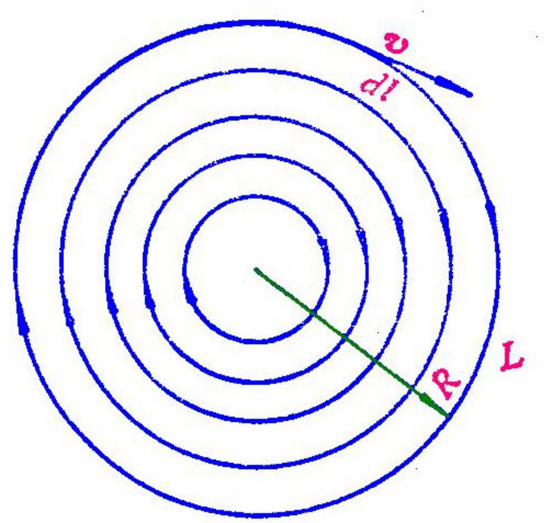

图 1-55 速度场的环量

在此处用流线表示如图中的圆闭合曲线（这只是一种近似，严格讲是螺旋线）。又设 v 在线上任一点的大小一样，则：

$$\oint_L v \cdot dl = \oint_L v dl = vL = 2\pi vR \neq 0$$

且速度越大，速度的环量越大，环量 $\oint_L v \cdot dl = 0$ 精确地描述了 v 的旋转程度。

二、静电场的环量

1. 静电场中的功

我们用静电场 ***E*** 代替 ***v***，***E*** 的环量应为：

$$\oint_L E \cdot dl$$

式中 L 为一闭合曲线。对一般矢量场，环量反映了它的“旋转’程度，然而对静电场而言，它还具有特定的物理内容。

试探电荷 q_0 在静电场 E 中沿闭合路径 L 缓慢移动，则电场所作的功为：

$$A = \oint_L dA = \oint_L q_0 E \cdot dl = q_0 \oint_L E \cdot dl$$

它说明静电场的环量表示静电场对沿该闭合路径移动的单位正电荷所作的功。

设 E 是由点电荷 q 所产生的静电场，则有

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}e_r$$

考虑闭会曲线 L 的 PQ 段，将 q_0 沿 L 从点 P 移到点 Q，电场 E 作的功为

$$A = q_0\int_P^Q E \cdot dl = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\int_P^Q \frac{1}{r^2}e_r \cdot dl = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\int_P^Q \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_Q})$$

说明单个点电荷产生的静电场对试探电荷所作的功，只与试探电荷的起点和终点的位置有关，而与路径 L 无关。

2．静电场的环路定理

对闭合环路 L，则有

$$A = q_0\oint_L E \cdot dl = 0$$

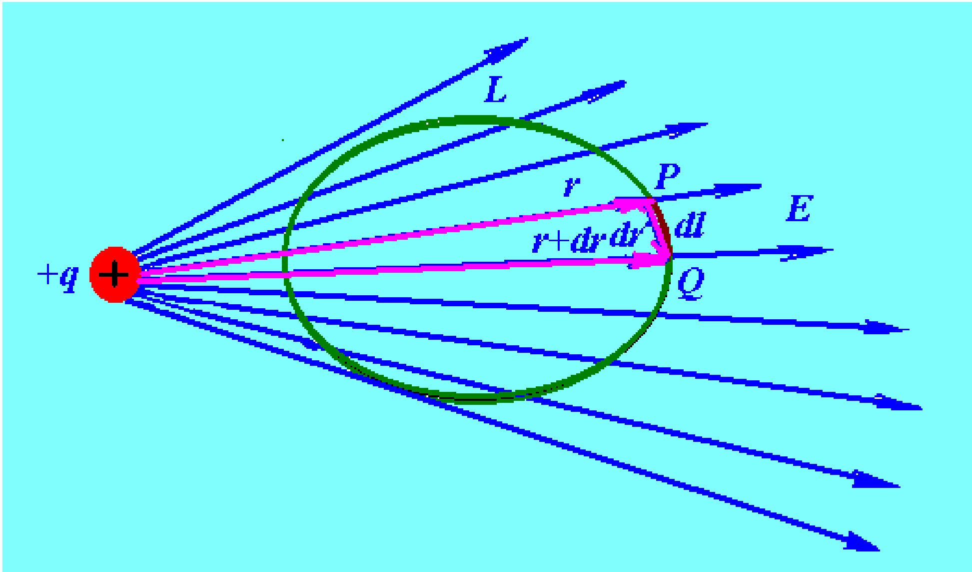

图 1-56 静电场中试探电荷做功与路径无关

如果静电场不是由单个点电荷产生的，而是由某种确定的电荷分布，例如静止的点电荷系或带电体所产生的，由叠加原理可知整个带电系统产生的静电场的环量为零亦为零:

$$\oint_L E \cdot dl = 0$$

它表明任何静电场的环流都为零。这就是静电场的环路定理。它表明，静电场是无旋场。

它的物理意义是：

静电场作功与路径无关，只与起点与终点的位置有关；或静电场沿任何闭合环路作功为零。

3. 讨论

（1）环路定理的微分形式

由斯托克斯定理，

$$\oint_L E\cdot dl=\iint_S(\nabla\times E)\cdot dS$$

可得静电场环路定理的微分形式：

$$\nabla\times E=0$$

（2） 电场的这个性质来源于库仑力的有心力特性；而不是平方反比律

（3） 环路定理可以证明静电场的电力线不可能是闭合曲线

反证法，若电力线是闭合曲线，沿电力线一周，则

$$E\cdot dl=E\cos\theta dl=Edl,\ \text{都为正},\ \cos\theta=1$$

$$\oint_L E\cdot dl\neq 0,\ \text{与}\quad \oint_L E\cdot dl=0,\quad \text{矛盾}$$

故电力线不可能是闭合曲线。