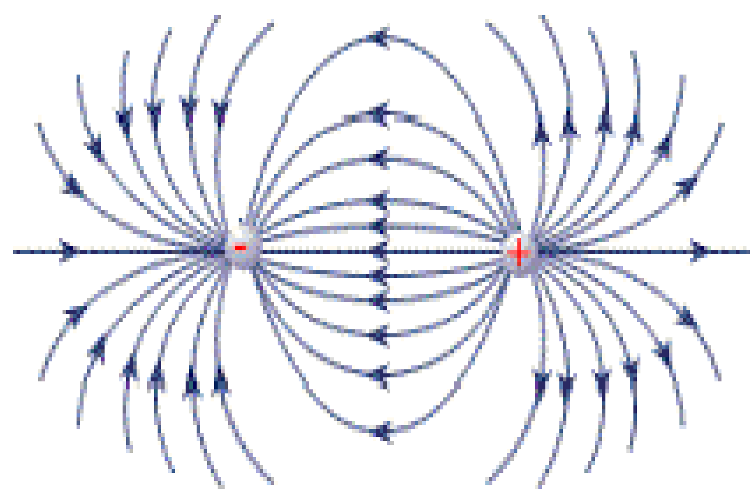
§1-4 高斯定理

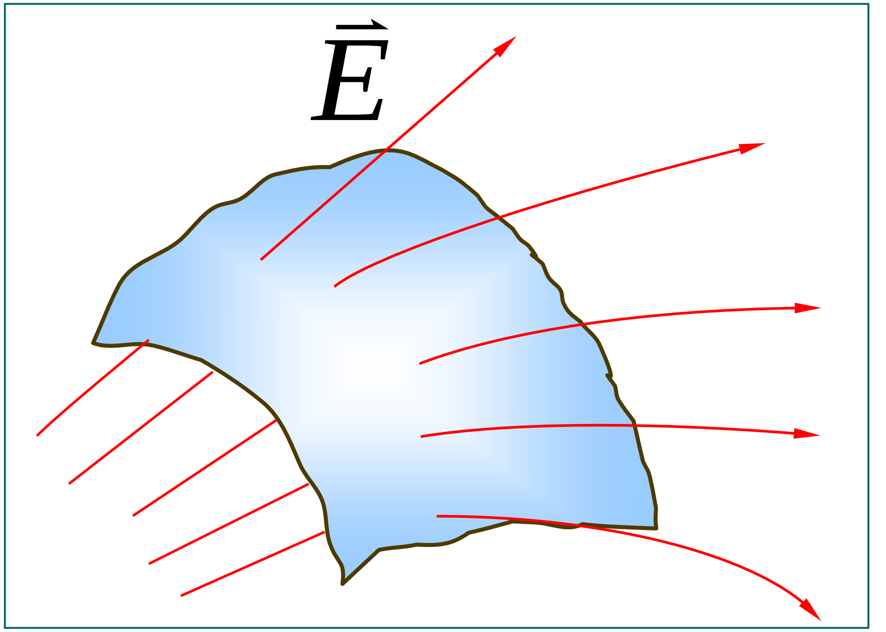
回顾电通量

问题一、定义


等量异种电荷的电场。

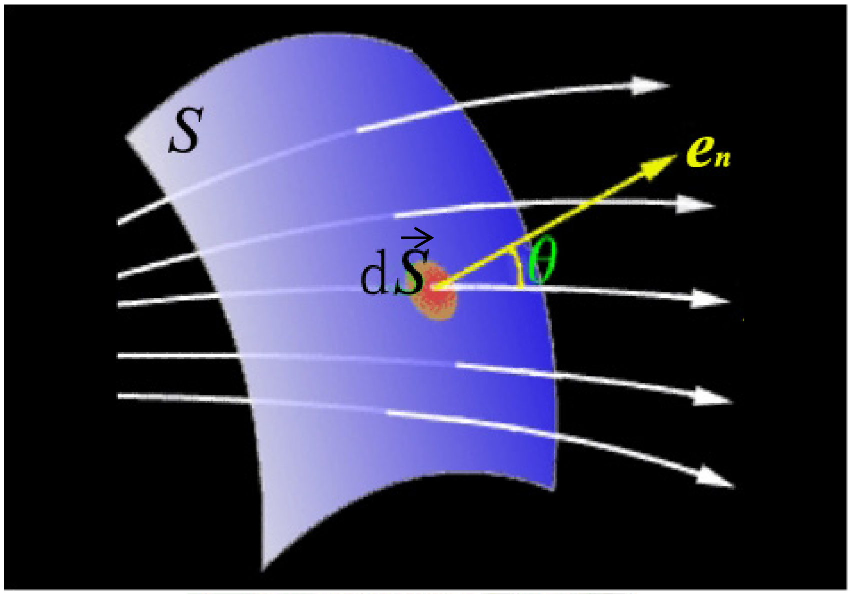
通过电场中任意曲面的**电场线的数目**，称为通过该曲面的电通量，

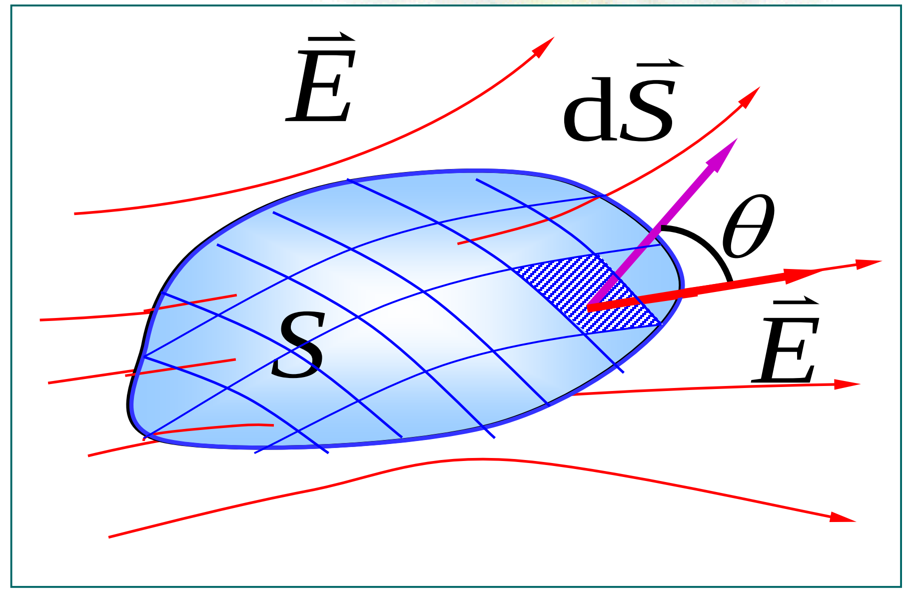
用Φ_e表示。



回顾电通量

问题二： 计算





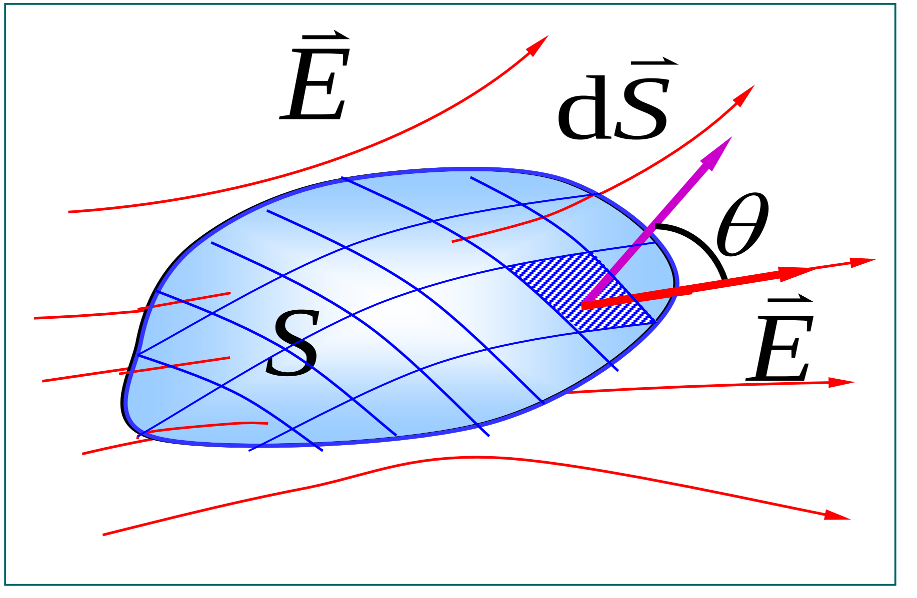
$$\phi_e = \int d\phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

§1-4 高斯定理

◆ 高斯定理回答:

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = ?$$



高斯是德国数学家，也是物理学家。高斯是近代数学的奠基人之一，在历史上影响之大，可以和牛顿、阿基米德、欧拉并列，素有“**数学王子**”之称

一. 高斯定理的文字表述

成立条件：

真空；静电场

在真空的静电场中，通过任一闭合曲面的电通量，

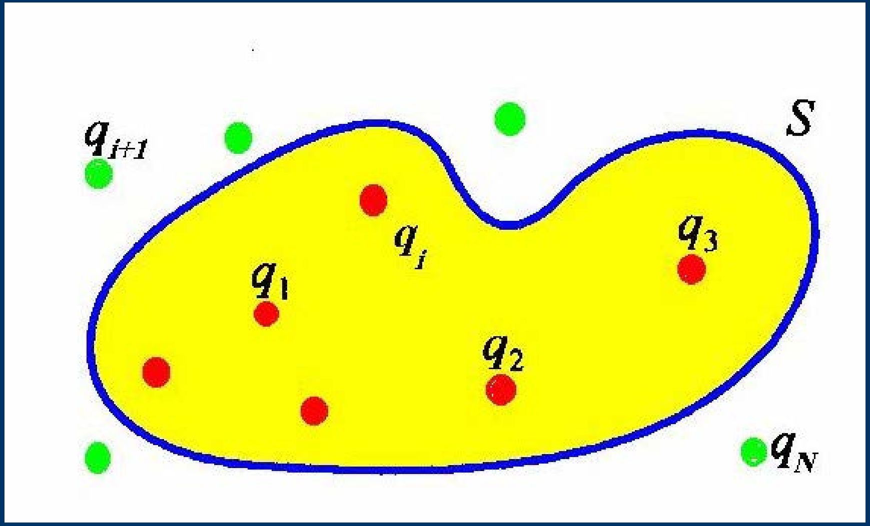
等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以 ε_0 。

（闭合曲面称为高斯面）

二. 高斯定理的表达式

$$\phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = ?$$

1、高斯面内包含离散分布的电荷

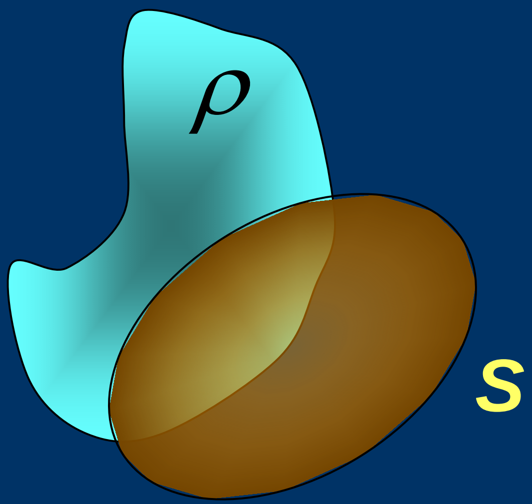


$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_{in}$$

二. 高斯定理的**表达式**

$$\phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = ?$$

1、高斯面内包含**连续分布**的电荷



$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V$$

若：$\rho = C$

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho V$$

三. 验证高斯定理

1、点电荷 **q** 位于球心处，求通过球面的电通量 $\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ?$

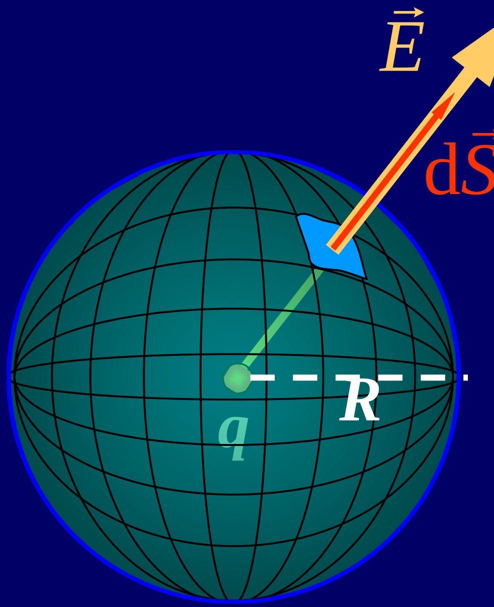
$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_{in} \quad \Longrightarrow \quad \phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\mathrm{d}\phi_e = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathrm{d}S$$

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathrm{d}S$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



2、点电荷在任意形状的闭合曲面内

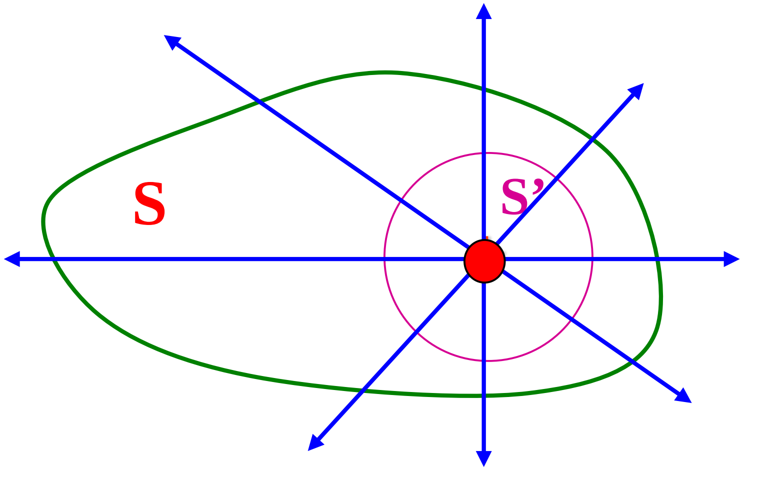
$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ?$$

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_{in}$$

$\Rightarrow$

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



$$\therefore \phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

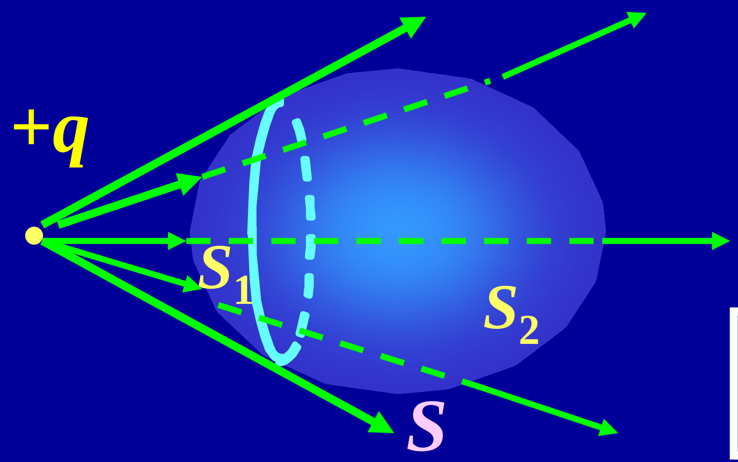
$$= \frac{q}{\varepsilon_0}$$

3、点电荷在闭合曲面外

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ?$$

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_{in}$$

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$



$$\phi_e = \phi_{e1} + \phi_{e2}$$

因为有几条电场线进面内必然有

同样数目的电场线从面内出来。

$$\phi_e = \phi_{e1} + \phi_{e2} = 0$$

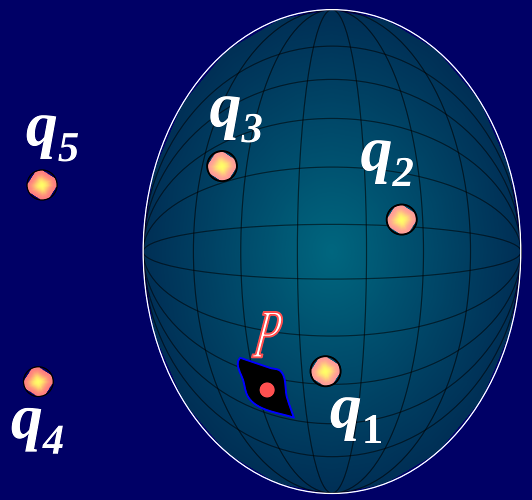
4、多个电荷存在，
通过任意闭合曲面的电通量？

$$\phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = ?$$

$$\phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_{in} \Rightarrow \phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q_1+q_2+q_3}{\varepsilon_0}$$

P 点的电场强度

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 + \vec{E}_5$$

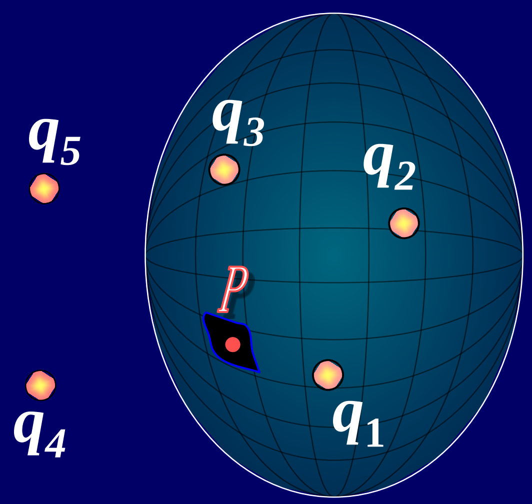


闭合面电通量为

$$\phi_e = \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_5)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0} + \frac{q_3}{\varepsilon_0} + 0 + 0 \quad = \frac{q_1+q_2+q_3}{\varepsilon_0}$$

四、$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{in}$的理解



闭合面电通量为

$$\phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\varepsilon_0}$$

1、 通过任意闭合曲面的**电通量只决定于它所包围的电荷的代数和，**闭合曲面外的电荷对电通量无贡献。

P 点的电场强度

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_5$$

2、 高斯定理中的电场强度是指**高斯面上的场强，**由封闭**曲面内、外电荷共同产生**

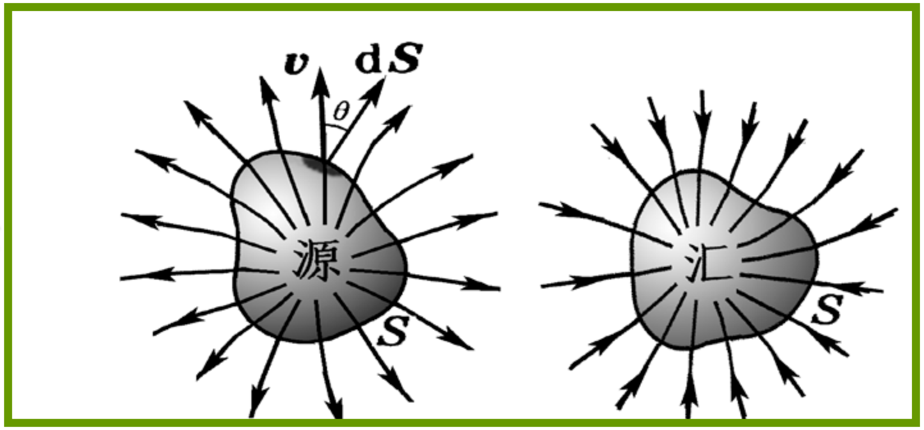
四、$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{in}$的理解

3、 该定理可用于求解高度对称的电场分布

4、 揭示了电场与场源之间的联系，
说明静电场是有源场；？

$$\sum q_{in} > 0 \Rightarrow \Phi_e > 0$$

表明电场线从正电荷发出，
所以正电荷是静电场的源头

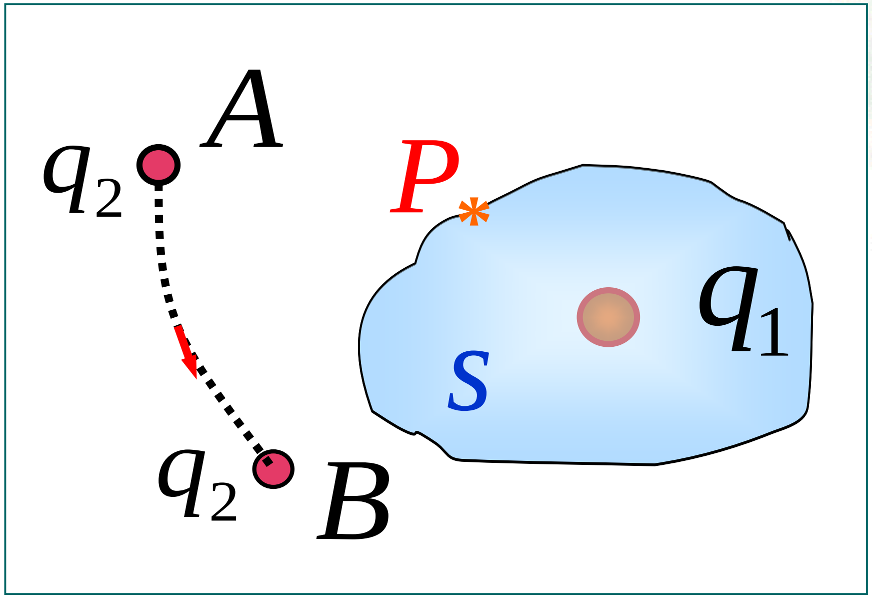


$$\sum q_{in} < 0 \Rightarrow \Phi_e < 0$$

表明有电场线穿入闭合曲面而终止于负电荷，
所以负电荷是静电场的尾。

静电场是有源场

讨论



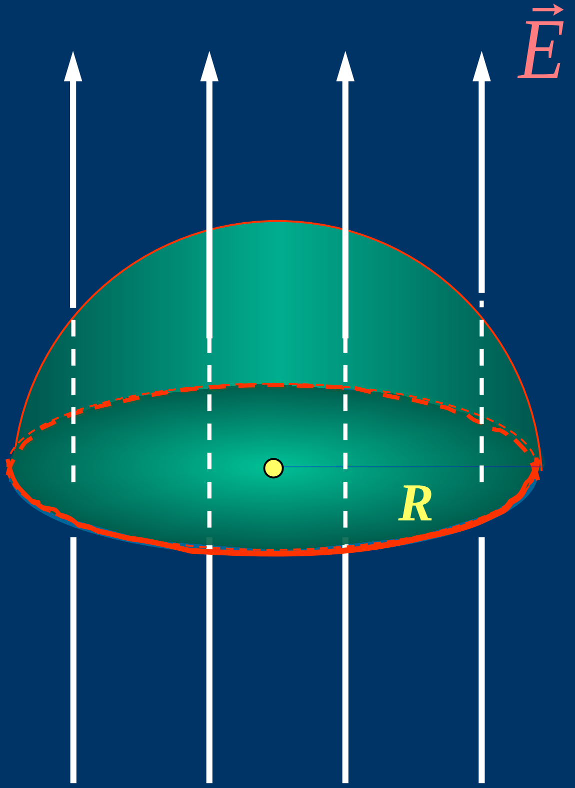
- 将 q_2 从 A 移到 B

点 P 电场强度是否变化?

穿过高斯面 S 的 Φ_e 有否变化?

例 均匀电场中有一个半径为R 的半球面

求 通过此半球面的电通量。



方法： 构成一闭合面，电通量

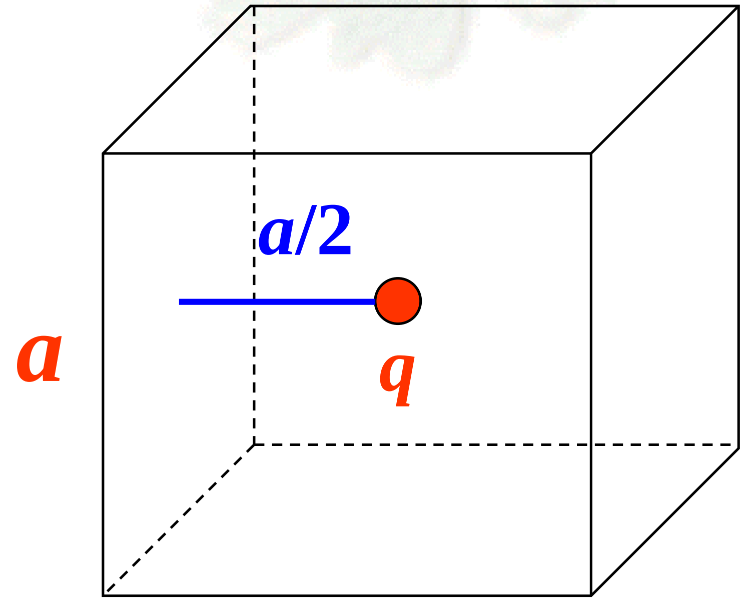
$$\Phi_e = \int_{\text{半球面}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{\text{底面}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\int_{\text{半球面}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\int_{\text{底面}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\boxed{\phi_{\text{半球面}} = \pi R^2 E}$$

有一边长为a的正方形平面，在其中垂线上距中心为$\frac{a}{2}$处有一点电荷q，则通过该平面的电场强度通量为多少？

$$\phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



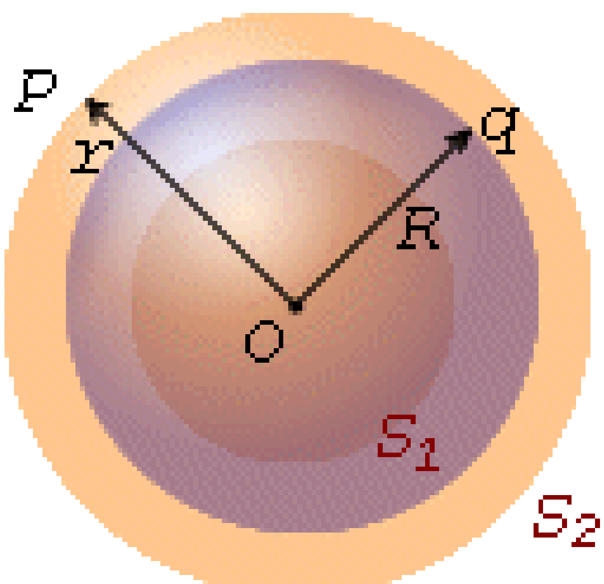
则通过任意平面的电场强度通量为：

$$\phi_e = \frac{q}{6\varepsilon_0}$$

五. 高斯定理的应用

求解三类对称电场

第一类：球对称电场



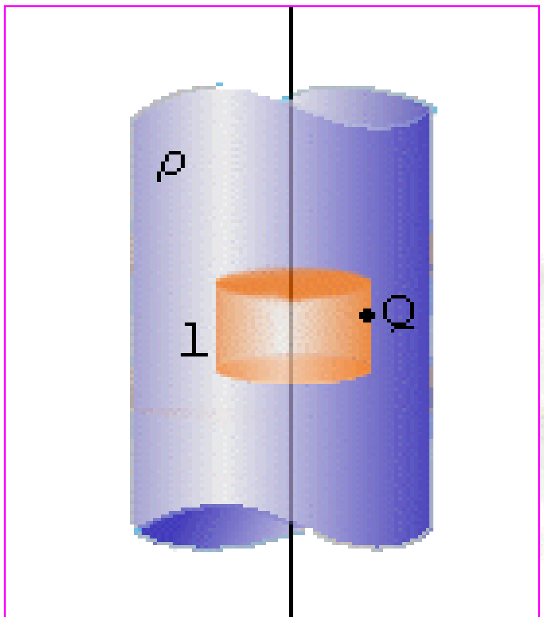
球对称分布：

包括点电荷、
均匀带电的球面、
球体和多层同心球壳
激发的电场

五. 高斯定理的应用

求解三类对称电场

第二类：轴对称电场



轴对称分布：

包括无限长均匀带电的直线；

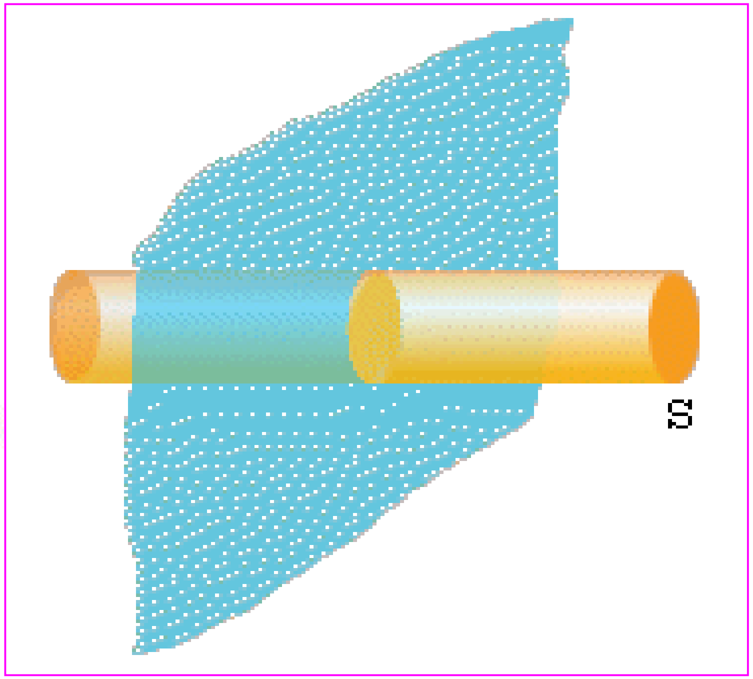
无限长均匀带电圆柱面，

圆柱体；

五. 高斯定理的应用

求解三类对称电场

第三类：面对称电场



面对称分布：

包括无限大的均匀带电平面，平板等

五. 高斯定理的应用

求解三类对称电场

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{in}$$

如何求对称性电场中的$\vec{E}$