

## 第六章 电磁场的 Maxwell 方程组和电磁波

前面各章我们分别讨论了静电场、静磁场、稳恒电流、电磁感应以及似稳的交变电流的实验规律，因为它们都是大量的实验事实的总结，从而具有可靠性。但它们又只是在一定的条件下成立，所以具有局限性。它们不是电磁现象的普遍规律。英国伟大的科学家麦克斯韦在总结了前人得到的实验规律的基础上，以他非凡的智慧，大胆地提出了“变化的磁场产生电场”和“位移电流”的假设。把静电场、静磁场和电磁感应规律中的核心部分推广到由随时间变化的电荷、电流所产生的迅变电磁场，高度概括为具有优美数学形式的 4 个方程，称为麦克斯韦方程组。麦克斯韦方程组是电磁场的普遍规律，它不仅可以解释当时已知的一切电磁现象，而且从麦克斯韦方程组很容易导出电磁场所满足的波动方程，从而麦克斯韦预言了电磁波的存在。而且从波动方程得到的电磁波的速度恰好为真空中的光速，从而麦克斯韦大胆地预言了光波就是电磁波。麦克斯韦电磁理论的建立是物理学史上的一个伟大创举，爱因斯坦称赞它是“自牛顿以来物理上经历的最深刻、最有成果的一次真正观念上的变革”，它开辟了无线电时代的新纪元，对科学技术和人类文明的发展起到了不可估量的作用。实验规律的总结和推广。

### §6-1 实验规律的总结和推广

#### 一、电磁现象实验规律的总结

静电学中的实验规律是库仑定律：

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r}$$

- 根据库仑定律和场强叠加原理我们得到描述静场电性质的高斯定理和环路定理：

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_i$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

在静磁学中，基本实验规律为安培定律

$$F_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r})}{r^3}$$

- 根据安培定律和场强叠加原理，我们得到描述静磁场性质的高斯定理和安培回路定理：

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_i$$

麦克斯韦提出了法拉第电磁感应定律的物理本质是随时间变化的磁场在其周围激发涡旋电场，即：

$$\oint_l \mathbf{E}_{\text{旋}} \cdot d\mathbf{l} = - \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

## 电荷守恒定律(实验总结)

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

## 二、实验规律的推广和位移电流假设

方程 
$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

表明静电场是一个保守力场，静电场力作功与路径无关

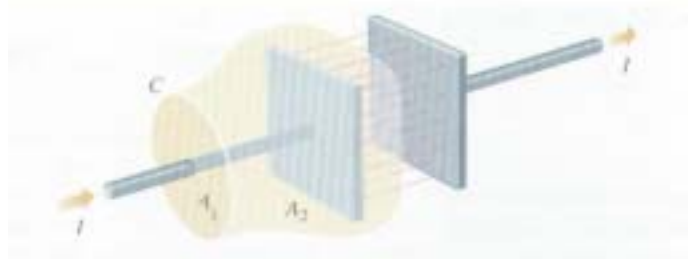
•但在迅变的情况下，变化的磁场将激发涡旋电场，若空间既存在静止电荷，又存在变化的磁场，空间电场应为静电场与涡旋电场之和，而总电场的环流量应为：

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \oint_L \mathbf{E}_{\text{势}} \cdot d\mathbf{l} + \oint_L \mathbf{E}_{\text{旋}} \cdot d\mathbf{l} \\ &= -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

•考虑安培回路定律，其物理意义是无论载流回路周围是真空还是磁介质，它都可以写成：

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_i I_i = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

[这个规律在迅变的情况下是否适用呢](#)



根据安培回路定理

对  $A_1$  有: 
$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

对  $A_2$  有: 
$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_i = \iint_{S_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I_c$$

从上面可以看到，在电流随时间变化时安培回路定律不再适用。  
那么在迅变情况下用什么规律来代替它呢？

- 电容器在充放电过程中，电容器两极板上的总电荷密度  $\sigma_c$  在随时间增加或减小，因而电容器内部的电场强度  $E_c = \sigma_c / \epsilon_0$  也随时间增加或减少，而电容器极板上的总电荷  $q_c = S \sigma_c$  随时间的变化率等于充放电路中传导电流的大小  $I_c$ 。

根据电流的连续特性有：

$$\oiint_S \mathbf{J}_s \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq_c}{dt}$$

• 上式 S 是由 S1 和 S2 构成的闭合曲面， $q_c$  是积聚在 S 面内的自由电荷（左），根据高斯定理有：

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_c$$

$$\frac{dq_c}{dt} = \frac{d}{dt} \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

以上三个方程组成方程组得到：

$$\oiint_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} = -\oiint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oiint_S \left( \mathbf{J}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

• 这里记  $\mathbf{j}_0 = \mathbf{j}_c$ ，表示传导能流密度，上述积分写成：

$$\oiint \left( \mathbf{J}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \left( \mathbf{J}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_2} \left( \mathbf{J}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

式中负号由于两曲面外法线方向相反

由上式得：

$$\iint_{s_1} \left( J_0 + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot dS = \iint_{s_2} \left( J_0 + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot dS$$

此式表示电流密度加上电位移矢量随时间的

变化率之和是永远连续的，其中电位移矢量随时间的变化率与电流密度相当。

• 令  $\Phi_D \equiv \iint_s D \cdot dS$ ，代表通过任一曲面  $s$  的电位移通量，麦克斯韦把  $\frac{d\Phi_D}{dt}$  定义为**位移电流**  $I_d$  把电位移矢

量的时间变化率定义为**电流密度**  $j_d$  把传导电流与位移电流合起来称为全电流  $I$ ，即：

$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \iint_s \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dS = \iint_s J_D \cdot dS$$

$$I = \iint_s J_0 \cdot dS + \iint_s \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dS = \iint_s \left( J_0 + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot dS$$

本例中有：

$$\iint_{s_2} J_0 \cdot dS = \iint_{s_1} \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dS$$

• 上式说明，在非稳定的情况下，非传导电流终止的地方，由位移电流接上。

• 由此，麦克斯韦把安培回路定律推广到了在非恒定情况下也适用的普遍形式：

$$\oint_l H \cdot dl = \sum I_0 + \iint_s \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dS$$

在普遍情况下，全电流是产生磁场的源

- 位移电流的物理本质是：在空间随时间变化的电场可以激发磁场。
- 假定场空间中不存在自由电荷和传导电流，则有：

$$\oint_l E \cdot dl = -\iint \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$$
$$\oint_l H \cdot dl = \iint \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dS = \epsilon_0 \epsilon_r \iint \frac{\partial E}{\partial t} \cdot dS$$

它们分别表示随时间变化的磁场在空间激发电场和随时间变化的电场在空间激发磁场，两方程相差一个符号，而这恰恰是电磁波在空间传播所需要的。

## §6-2 电磁场的普遍规律——Maxwell 方程组



麦克斯韦在对电磁现象的实验做了以上创造性的总结和发展后，得到了在普遍情况下电磁场必须满足的四个方程：

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_0 \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ \oiint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \\ \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_0 + \iint_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

• 在空间中有介质存在时需加上描述介质性质的方程如下：



$$\begin{cases} \mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \\ \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \end{cases}$$

式中  $\varepsilon_0 \mu_0$  分别为真空中介电常数和磁导率

$\varepsilon_r \mu_r$  分别为介质的相对介电常数和相对磁导率  $\sigma$  为介质的电导率。

• 在两种不同介质的界面上，还应加上边界条件：

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_0 \end{cases}$$

我们可以证明，只要给定空间的电荷和电流分布，给定边界条件，就可以由麦克斯韦方程组得到电磁场的唯一确定的解，这就是电磁场的唯一确定原理，此外，带电粒子在磁场中的受力规则为：

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

即洛仑兹力。

### §6-3 自由空间中的电磁波

1894年12月8日，麦克斯韦在英国皇家学会报告了他的论文《电磁场的动力学原理》，他从方程组出发，导出了电磁场的波动方程，于是他预言了迅变电磁场互相激发并以波的形式在空间传播，并得到电磁波的传播速度与当时已知的真空中的光速相等，于是他预言了：光是按照电磁定律经过场传播的电磁扰动——即光就是电磁波。

一、自由空间中的电磁波假设在空间中  $q_0 = 0$   $J = 0$  这时麦克斯韦方程组变为：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

因为在真空中，所以  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$   $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  对  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  求旋度有：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

考虑到  $\nabla \cdot E = 0$  得

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times E) &= \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E = -\nabla^2 E \\ \nabla^2 E - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}$$

同理对于磁场有:  $\nabla^2 B - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$

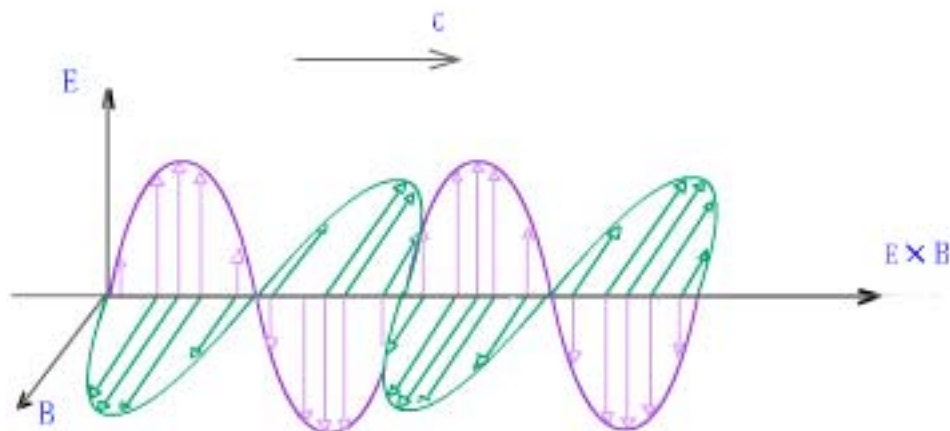
由微分方程理论我们知道, 上式关于 E 和 B 的方程是典型的波动方程。它表明脱离了场源的电磁场是以波的形式在无界自由空间中传播的, 它们的传播速度为:  $v = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$

利用以知的真空介电常数和磁导率的数值, 代入上式得:  $v = 3 \times 10^8 \text{ m/s} = c$

这说明电磁波和光波是性质相同的波, 因此麦克斯韦预言了电磁波的存在, 预言了光就是电磁波。麦克斯韦把表面上似乎不相干的光现象和电磁现象统一了起来, 为人类深刻认识光的本质树起了一座历史的丰碑。

从下一节电磁波谱中可看到, 可见光只是其中一小部分。

### [平面电磁波在空间的传播](#)



- 对于电场和磁场满足的波动微分方程，它们的一种最基本的解是存在于自由空间中的平面电磁波的解，复数表达式为：

$$\begin{cases} \mathbf{E}(r, t) = E_0 e^{i(k \cdot r - \omega t)} \\ \mathbf{B}(r, t) = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \mathbf{n} \times \mathbf{E} \end{cases}$$

式中  $\vec{k}$  是沿电磁波传播方向的一个常矢量，称为波矢，其大小为

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 2\pi f \cdot \frac{1}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

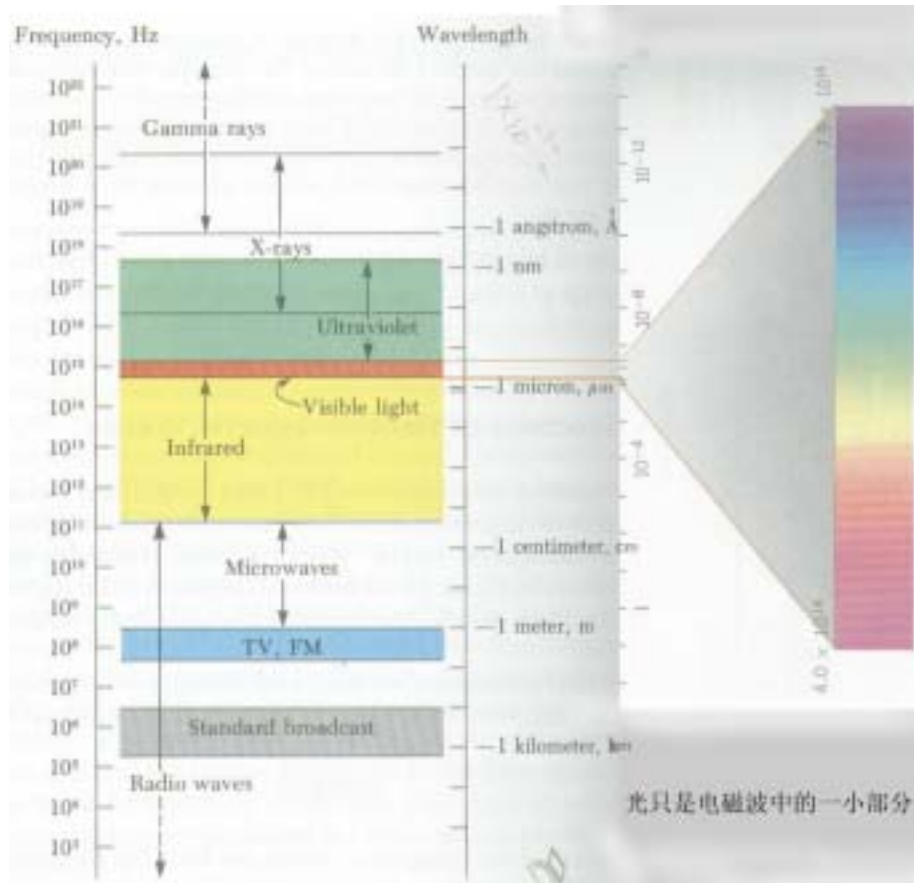
- 平面电磁波的复数形式只是为了运算方便实际存在的电场应理解为只取其实际部，即：

$$E(r, t) = E_0 \cos(k \cdot r - \omega t)$$

## 二、电磁波谱

1886年、赫兹运用电磁振荡的方法产生了电磁波，从而证明了麦克斯韦理论的正确性。自此以后，人们进行了许多实验，不仅进一步证明了光是一种电磁波，光在真空中的传播速度  $c$  就是电磁波在真空中的传播速度；而且发现了不同频率和波长的电磁波，如无线电波、红外光、可见光、紫外光、x射线和Y射线等，这些电磁波按频率和波长的顺序排列起来构成电磁波谱。下图给出了各种电磁波的名称和近似的波长范围。真空中的波长  $\lambda$  和频率，(这里采用光学中常用的符号  $\nu$  代表频率)的关系为

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$



已知的电磁波谱从很高的 $\gamma$ 射线的频率( $\nu \leq 10^{26} \text{ Hz}$ )下降到长无线电波的频率( $\nu \geq 10 \text{ Hz}$ ). 通常的交流电力传输线上的电磁波的频率为 50Hz 或 60Hz. 视觉可感觉到的可见光只为已知电磁波谱中的很小一部分, 它的波长约在 7000~4000 埃, 可见光的两边延伸区域分别是红外线和紫外线, 红外线的波长约为 7600 埃~700  $\mu\text{m}$ , 紫外线的波长为  $4 \times 10^{-2} \sim 10^3$  埃,  $\gamma$ 射线的波长则更短. 无线电波的波长为  $10^{-4} \sim 10^6$ , 其中长波波长是几千米, 中波波长约为  $3 \times 10^3 \sim 50 \text{ m}$ , 短波波长约为 10m~0.01m. 产生这些不同频率的电磁波的机制是多种多样的, 我们仅举几例说明.

无线电波可由电磁振荡电路通过天线发射, 中、短波可用于无线电广播和通信, 微波可应用于电视或雷达. 可见光、红外线和紫外线是由于分子、原子的外层电子能级跃迁而产生的, 它们的用途极广. 红外线的热效应显著, 也有使照相底片感光的作用, 还可用于食品加工、军事侦察和物质分子结构分析. 紫外线有明显的生物作用, 它能杀菌、杀虫, 在医疗和农业上都有应用. x 射线可以由原子内层电子跃迁产生, 它的穿透能力很强, 可用于检查人体和金属部件及分析晶体结构.  $\gamma$ 射线可以从原子核中发射出来, 穿透能力极强, 在宇宙辐射、高能加速器及高能核物理实验中可观测到. 许多放射性同位素都发射 $\gamma$ 射线,  $\gamma$ 射线的应用也很多, 研究 $\gamma$ 射线可了解原子核的结构.



鸟的羽毛如此鲜艳，不是它们本身所具有的颜色，而是羽毛的不同部分反射了可见光中相应的颜色，而吸收了大部分其它颜色光的结果。

### 三、定态波动方程

现在我们再来讨论在介质中的情况。一般而言，介质的介电常数  $\varepsilon$  和磁导率  $\mu$  都是随电磁波的频率  $\omega$  而变的，这种现象称为介质的**色散**，在线性介质中有：

$$D(\omega) = \varepsilon(\omega)E(\omega)$$

$$B(\omega) = \mu(\omega)H(\omega)$$



因此, 对于一般的电磁场, 无法推导出  $E$  和  $B$  的一般波动方程. 但在很多实际情况下, 电磁场的激发源往往以大致确定的频率作简谐振动, 因而辐射的电磁波也以相同频率作简谐振动. 这种以一定频率作简谐振动的波, 常称为**定态电磁波或单色波**. 一般的非单色电磁波, 可以用傅里叶分析方法分解为不同频率的单色波的叠加, 因此我们下面只讨论单色波.

对于一定频率的单色电磁波, 电磁场对时间的依赖关系为  $\cos \omega t$  或用复数形式表示为

$$E(r, t) = E(r) e^{-j\omega t}$$

$$B(r, t) = B(r) e^{-j\omega t}$$

在频率一定的定态情况下, 在均匀介质中  $\varepsilon$  和  $\mu$  为常量, 有

$$D = \varepsilon E$$

$$B = \mu H$$

把上式代入自由空间的麦克斯韦方程组, 并消去共同因子  $e^{-j\omega t}$ , 得到:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = -j\omega\varepsilon\mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases}$$

由 1), 2) 两式得到:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = j\omega\mu \nabla \times \mathbf{H} = \omega^2 \varepsilon\mu \mathbf{E}$$

再利用矢量分析公式，有：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

由以上两式得：

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$$

式中， $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 。上式称为 Helmholtz 方程，是一定频率下电磁波的基本方程。它与  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  联立，可以解出  $\mathbf{E}$  在空间中的分布，再利用  $\nabla \times \mathbf{E} = j\omega\mu\mathbf{H}$ ，即可求得：

$$\mathbf{B} = -\frac{j}{\omega} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{j}{k} \sqrt{\mu\omega} \nabla \times \mathbf{E}$$

总结起来，对于在介质中传播的频率一定的单色电磁波，麦克斯韦方程组可以化为

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{B} = -\frac{j}{\omega} \nabla \times \mathbf{E} \end{cases}$$

类似地，在一定频率下，麦克斯韦方程组也可以化为如下的形式：

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{B} + k^2 \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \mathbf{E} = \frac{j}{\omega\mu\epsilon} \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{j}{k\sqrt{\mu\omega}} \nabla \times \mathbf{B} \end{cases}$$

#### 四、平面电磁波 1) 平面电磁波是横波

因为  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$

$$\nabla \cdot \left[ \mathbf{E}_0 e^{i(k \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right] = ik \cdot \mathbf{E}_0 e^{i(k \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = ik \cdot \mathbf{E} = 0$$

所以:  $k \cdot \mathbf{E} = 0$

上式表示电场矢量  $\mathbf{E}$  与传播方向  $\mathbf{K}$  互相垂直, 即电磁波为横波。电场矢量  $\mathbf{E}$  可以在垂直于  $\mathbf{K}$  的任意方向上振动,  $\mathbf{E}$  的取向称为电磁波的偏振方向。• 磁场

$$\mathbf{B}(r, t) = n \times \mathbf{E}$$

$$n = \frac{k}{k}$$

为波的传播方向上的单位矢量

所以:  $k \cdot \mathbf{B} = k \cdot (n \times \mathbf{E}) = 0$

即磁场亦为横波。

$E \times B$  沿波矢  $K$  的方向。2) 若电场矢量和磁场磁场矢量同位相, 电磁波在线性的各向同性的介质中传播, 电场与磁场的振幅比为:

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r} E_0 = \sqrt{\mu_0 \mu_r} H_0$$

或

$$\frac{|E|}{|B|} = \frac{E_0}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}} = v$$

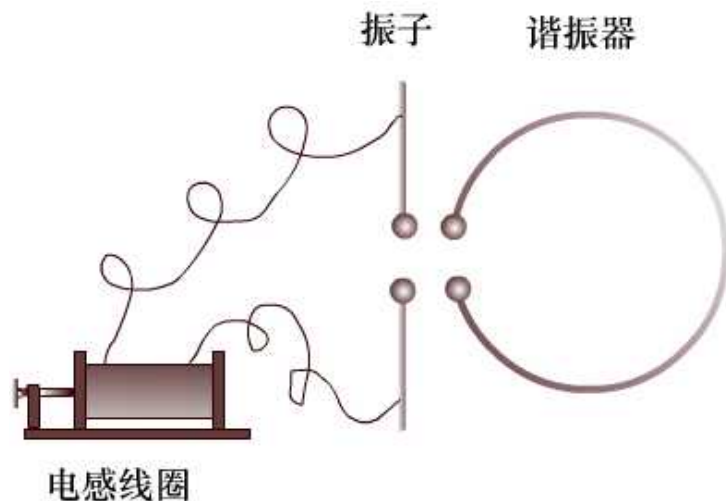
在真空中, 上式为:

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c$$

电磁波的传播速度为

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$$

赫兹实验证实了电磁波的存在·1886年10月, 赫兹在做放电实验时, 偶然发现其旁边的一个线圈也发出火花, 他敏锐地想到这可能是电磁共振, 随后他又做了一系列实验, 得到证实。



•如图，一个感应线圈与两根一端各装一个金属板，另一端各有一个金属小球的金属杆相连，相当于一个电容器，构成 LC 振荡回路，在其附近放置一个具有开口的金属圈，作为检测器，回路中振荡电流在电容器两极间形成电磁波，电磁波的电场使附近开口的金属圈也产生高频振荡，高电压使开口处产生火花。麦克斯韦的电磁理论和赫兹的实验为人类开创了一个电子和信息技术的新时代。

## §6-4 电磁波的辐射

### 一、偶极振子

电磁波是电磁振荡在空间中的传播。它是由发射台通过天线辐射出来的。原则上，任何一个 LC 共振

电路都可以作为发射电磁波的振源。然而，为了产生持续的电磁振荡，必须把 LC 电路接在晶体管或电子管上组成振荡器，由电路中的直流电源不断供给能量。进一步的分析表明，在通常的集中元件所组成的 LC 振荡电路中，电磁场和电磁能绝大部分都集中在电感和电容元件中。为了把电磁场和电磁能有效地发射出去，必须改造电路，使其尽可能开放，使电磁场尽可能分散到空间中去。同时，由于电磁波在单位时间内辐射的能量是与频率的 4 次方成正比的，而

$$f_0 \propto \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

因此，为了有效地把电路中的电磁能发射出去，必须尽量减小 L 和 C 的值，以提高电磁振荡频率  $f_0$ 。为此，我们把 LC 振荡电路逐步加以改造，使电路越来越开放，L 和 C 越来越小。最后，演化成直线型振荡电路，电流在其中往复振荡，两端出现正负交替的等量异号电荷，这样一个电路称为振荡偶极子。发射台的实际天线要比它复杂得多，但所发射的电磁波可以看成是偶极振子所发射的电磁波的叠加。

## 二、偶极振子发射时的电磁波

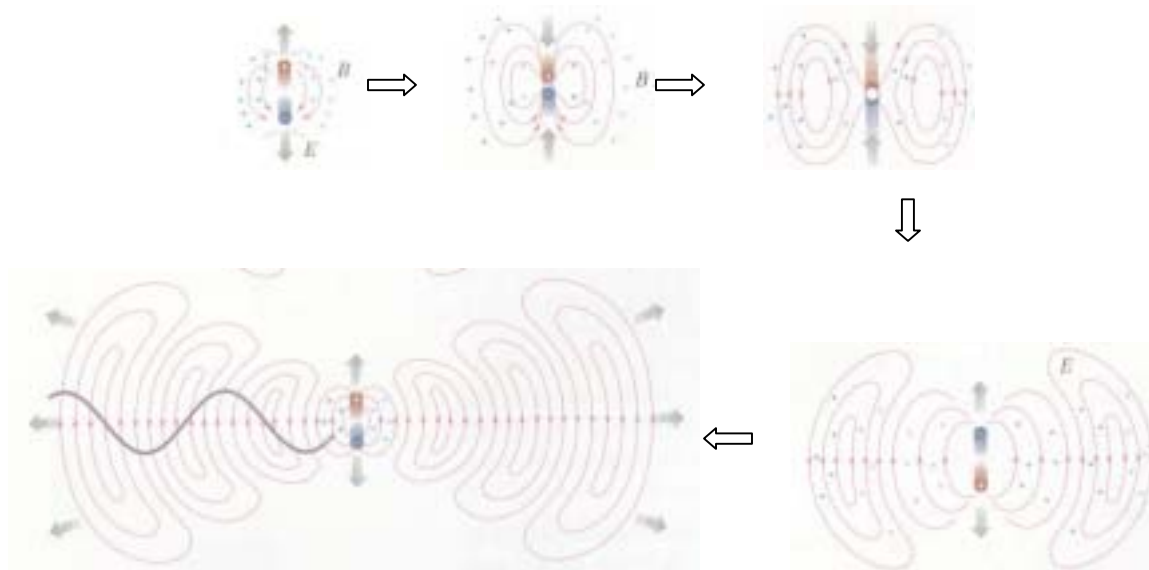
偶极振子周围的电磁场，可以用麦克斯韦方程组严格计算出来，在这里，我们只对结果作定性讨论，并假定偶极振子的电偶极矩的大小是随时间按正弦或余弦规律变化的，即

$$P = P_0 \cos \omega t$$

在偶极振子中心附近的近场区内，即在离振子中心的距离  $r$  远小于电磁波波长  $\lambda$  的范围内，电磁波传播速度有限性的影响可以忽略，电场的瞬时分布与一个静态偶极子的电场很相近。设  $t=0$  时偶极振子的正、负电荷都在中心，然后分别作简谐振动，于是，起始于正电荷、终止于负电荷的电场线的形状也随时间而

变化. 下图定性地画出了在偶极振子附近, 一条电场线从出现到形成闭合圈, 然后脱离电荷并向外扩张的过程. 当然, 在电场变化的同时也有磁场产生, 磁场线是以偶极振子为轴的疏密相间的同心圆. 电场线与磁场线互相套合, 以一定的速度由近及远地向外传播.

在离偶极振子足够远的地方, 即在  $r \gg \lambda$  的波场区, 波阵面逐渐趋于球形, 电磁场的分布如图所示.



若以偶极振子的中心为原点, 以偶极振子的轴线为极轴取球坐标, 则如图所示, 电场强度  $E$  趋于  $e_\theta$  方

向，磁场强度  $H$  沿  $e_\phi$  方向，磁场线是绕极轴的同心圆， $E$  与  $H$  同相位且互相垂直， $E \times H$  的方向指向波传播方向  $e_r$ 。

### 三、偶极振子的辐射能量

振荡偶极振子产生随时间变化的电磁场，以电磁波的形式向周围空间传播。由于电磁场具有能量，因此随着电磁波的传播，必然伴随着电磁能量的传输。以电磁波形式辐射出去的能量称为电磁辐射能。我们定义在单位时间内通过与波传播方向垂直的单位面积的能量为**能流密度矢量**，用  $s$  表示。它在一个周期内的平均值  $\bar{s}$  称为平均能流密度。可以证明，偶极振子辐射的平均能流密度为

$$\bar{s} = \frac{\pi^2 p_0^2 f^4}{2 c^3 \epsilon_0 r^2} \sin^2 \theta$$

它具有 3 个重要的特点：

(1)  $\bar{s} \propto f^4$

即偶极振子的平均能流密度与振子的振荡频率  $f$  的 4 次方成正比，振荡频率越高，辐射的能量越多。因此，实际用于广播的电磁波频率都在几十万赫兹以上。

(2)  $\bar{s} \propto \frac{1}{r^2}$ 。这正是球面波的特点，在离振子较远的地方，波阵面近似球面，根据能量守恒定律，通过



球面波阵面的能流  $4\pi r^2 \bar{S}$  是与  $r$  无关的常量. 所以, 对于球面波必定有  $\bar{S} \propto \frac{1}{r^2}$ .

(3)  $\bar{S} \propto \sin^2 \theta$  说明偶极振子发射的平均能流密度具有很强的方向性. 如图所示, 在垂直于偶极振子轴线的方向上辐射最强, 而在偶极振子轴线方向没有辐射。

实际上, 偶极振子的辐射也可以看成是由带电粒子的加速运动造成的. 可以证明, 对于一个匀速运动的电荷来说, 尽管它携带电磁场以及电磁场的能量和动量运动, 因此在电荷的运动方向上有一个净的能量流, 但是它并不辐射电磁能, 即任一闭合曲面的净能流通量为零. 然而, 对于一个作加速运动的电荷, 情况则大不相同, 一个加速运动的电荷的电场不再是径向的, 其电场线的图样如图 8.9 所示, 当电荷向右运动时, 左边的场减小, 而右边的场增加, 但是由于有加速度, 场的增大(对应于新的更大的加速度引起的速度)大于先前存在的场的减小(对应于较早较小的速度). 因此, 净的过剩能量必然被转移到整个空间, 即一个加速电荷辐射电磁能. 为了维持一个电荷作加速运动, 必须对它提供能量, 以补偿由于辐射而损失的能量.

可以证明, 如果被加速电荷相对于观测者暂时静止或缓慢运动, 因而波的有限传播速度所引起的推迟效应可以忽略不计. 则通过以这个电荷为中心、半径为  $r$  的球面, 每单位时间内辐射的能量为:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 a^2}{6 \pi \epsilon_0 c^3}$$

上式称为**拉莫尔公式**, 式中  $a$  为电荷的加速度. 如果电荷被减速, 则辐射的能量是由于电荷速度减小而使电磁场额外具有的能量, 上式依然成立, 这种减速辐射又称为**韧致辐射**. 例如, X 射线就是快速电荷轰击靶时所产生的韧致辐射。

## §6-5 电磁场的能量和动量

麦克斯韦方程组作为电磁场的普遍规律，不仅揭示了电磁波的存在，预言了光就是电磁波，而且揭示了电磁场具有能量和动量，能量和动量是物质的量度，从而麦克斯韦方程组揭示了电磁场的物质性。

### 一、电磁场的能量



假设一个电荷密度为  $\rho$  的带电体，由于在受电磁场的作用下以  $\mathbf{v}$  运动，在  $dt$  时间内，一小体积  $d\tau$  中的电荷  $\rho d\tau$  移动了距离  $d\mathbf{l} = \mathbf{v}dt$  则电磁场对电荷所作的元功为：

$$\begin{aligned}dw &= Fd\mathbf{l} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}dtd\tau \\ &= \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}dtd\tau \\ &= \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}dtd\tau\end{aligned}$$

可见，电磁场在单位时间内对整个空间传导电流所作的功为：

$$\frac{dw}{dt} = \iiint_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d\tau$$

• 我们从麦克斯韦方程组的两个方程来寻求机械功与电磁场矢量之间的关系

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

变形得到

$$[\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}] = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

令

$$u \equiv \frac{1}{2} \left( \varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right) \text{ 得}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

将上式对  $v$  空间求积分，利用高斯散度定理得：

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \iiint_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV + \iint_{\sigma} \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV$$

•考察两种情况:

(1) 若体积  $v$  为整个空间, 而电磁扰动只存在于有限范围的情况:

这种情况下:  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{E} = 0$

所以:  $-\frac{\partial U}{\partial t} = \iiint_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV$

上式右端是电磁场在单位时间内对传导电流所作的功, 根据能量守恒, 它一定是电磁场本身能量的减少, 所以  $-\frac{\partial U}{\partial t}$  代表单位时间电磁场能量的减少。U 是总能量, 而  $u$  则是电磁场的能量密度。

(2) 取体积  $v$  为电磁场的有限区域

此时  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$

得到:  $\frac{\partial U}{\partial t} + \iiint_V \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} dV = -\iint_{\sigma} \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$

方程左边表示单位时间内体积  $v$  内的电磁场能量的增加与导体内消耗的能量之和。根据能量守恒，右端的意义必定是单位时间内通过闭合曲面流入  $v$  内的电磁能，这样矢量  $s$  就代表单位时间内流过场中某点的垂直与  $s$  的单位面积的电磁能，称  $s$  为该点的电磁场能流密度矢量（坡印亭矢量），由此可见电磁场的能量能随着电磁场的运动而传播。

## 二、电磁场的动量

根据狭义相对论，能量和动量是密切联系着的：

$$\begin{cases} E = m c^2 \\ P = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

由此容易得到，相对论动量和能量之间的关系：

$$E^2 = P^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

光子的静止质量一定为 0，所以  $P = \frac{E}{c}$

电磁场的能量密度：

$$u = \frac{1}{2}(E \cdot D + B \cdot H)$$

$$D = \varepsilon_0 E$$

在真空中:  $B = \mu_0 H$

$$u = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) = \varepsilon_0 E^2$$

所以与真空中的平面波相联系的单位面积的电磁波动量为:

$$g = \frac{u}{c} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{c} = \frac{1}{c^2} |E \times H|$$

$$g = \frac{1}{c^2} (E \times H) = \frac{S}{c}$$

即电磁波的动量密度大小正比于能量密度, 方向沿电磁波的传播方向, 即能流密度方向。

由于电磁波具有动量, 因此在它们被物质表面反射或吸收时, 必定产生压强, 称为辐射压强. 光是一种电磁波, 它所产生的辐射压强称为光压. 光压是非常小的, 例如, 距强度为一百万烛光的光源 1m 远的镜面上, 所受到的可见光的光压只有  $10^{-5} \text{ N/m}^2$ , 与地面大气压强  $10^5 \text{ N/m}^2$  相比, 这是一个非常小的压强, 一般很难观察到. 太阳光对地球的总压力为  $7 \times 10^8 \text{ N}$ , 与太阳对地球的万有引力  $3 \times 10^{22} \text{ N}$  相比, 也是微不足道的. 然而, 在两个从尺度上看是截然相反的领域中, 光压却起着重要的作用. 在原子物理学中, 最

著名的现象是光在电子上散射时与电子交换动量的过程，即康普顿散射效应；在天体物理学中，恒星外层受到其核心部分的万有引力，相当大一部分是靠核心部分的核聚变所产生的强大的辐射压力来平衡的。美国天体物理学家钱德拉塞卡在研究恒星的寿命时认为，在恒星内部，尤其是靠近中心位置，在连续不断地发生核聚变的过程中产生电磁辐射，这种电磁辐射在恒星内部产生往外推的辐射压力，与往里拉的万有引力相抵消，才能使恒星保持平衡。一旦这两个力的数值不等，譬如在恒星演化的晚期，由于恒星内部核聚变燃料耗尽，使辐射压力大幅度下降，若向外的辐射压力抵挡不住引力的作用，就势必使恒星塌缩。他因为在研究恒星结构与演化过程方面的卓越贡献，荣获了 1983 年诺贝尔物理学奖。

### 三、电磁场是物质的一种形态

我们知道，能量和动量都是物质运动的量度，运动是物质的存在形式，运动和物质是不可分割的。电磁场具有能量和动量，证明它是与实物一样的物质的一种存在形态。场和实物是物质存在的两种不同的形态。电磁场与实物有很多相同点，例如，它们都具有能量、动量及质量。但另一方面，电磁场与实物又存在一些差异，如电磁场的基本组成部分是光子，而光子是没有静止质量的，但构成实物的电子、质子等微观粒子都具有静止质量；电磁场以波的形式在空间中传播，在真空中的速率永远是  $c=3 \times 10^8 \text{ m/s}$  折射率为  $n$  的介质中的传播速度为  $c/n$  上。一种实物占有的空间不能同时被另一种实物占领，即实物具有不可入性。可是频率不同的电磁波，可以同时占有同一空间，独立存在，各自保持自己的特性不变。综上所述，电磁场与实物有相同点也有不同点。

但随着科学技术的发展，发现“场”和“实物”之间的界限日益消失。对黑体辐射和光电效应等一系列现象的研究发现，光也具有不连续的微观结构，或者说，光在某些方面也具有微粒性，即光具有波粒二

象性。与此同时，电子衍射现象的发现，使人们认识到一向被认为是实物的微观电子同时也具有波动性。特别是 1932 年，人们发现一对正负电子结合后可以转化为  $\gamma$  射线，同时也发现一对  $\gamma$  光子相遇时产生一对正负电子。这些事实表明，电磁场和实物一样是客观存在的物质，只是电磁场和实物各具一些不同的属性，而这些属性还会在一定条件下相互转化。