

## §2-4 欧姆定律

### 一、欧姆定律的两种表示

#### 1. 欧姆定律的微分形式

实验指出，当金属导体中存在电场时，导体中便出现电流。当导体中的电场恒定时，形成的电流也是恒定的，一旦撤除电场，电流亦随之停止。进一步的实验指出：当保持金属的温度恒定时，金属中的电流密度 $\vec{j}$ 与该处的电场强度 $\vec{E}$ 成正比，即

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

比例系数 $\sigma$ 称为金属的电导率。上式对大部分导体都是成立的，称为欧姆定律的微分形式，它反映了导体内部任一点的电流密度与该点的电场分布和电导率无关。若导体是均匀的，则导体内各处的电导率都相等，若导体是非均匀的，则电导率是位置的函数。

在更加一般的情况下，电导率 $\sigma$ 本身也可以是电场强度 $\vec{E}$ 的函数，这时

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E}) \vec{E}$$

这时阻力就不再与定向速度成正比了。电导率 $\sigma$ 倒数称为电阻率，用 $\rho$ 表示

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

在 SI 单位制中，电导率的单位是(欧·米)<sup>-1</sup>，或 $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ；电阻率的单位是(欧·米)，或 $\Omega \cdot \text{m}$ ，这里 $\Omega$ 是电阻的单位，称为欧姆。

欧姆定律的微分形式对频率不是非常高的非稳恒电流亦适用。

## 2. 一段电路欧姆定律

在导体和绝缘体的交界面附近，由电场强度边界条件，即：

$$\vec{n} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

对于稳恒电流，电荷不可能在交界面堆积，否则电流不稳恒，因而电流密度只能沿着交界面亦即在交界面上，电流密度 $\mathbf{j}$ 只有切向分量，没有法向分量。

稳恒电流的闭合性要求通过导体任一截面的电流相等。即流过一段粗细均匀、材料均匀的导线，导线的截面积为 $S$ ，电导率为 $\sigma$ 。显然，导线的每一横截面都是等势面，相距为 $l$ 的两个横截面间的电势差为

$$\Delta\varphi = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int \rho\vec{j} \cdot d\vec{l} = I \int \frac{\rho dl}{S}$$

设

$$R = \int \frac{\rho dl}{S}$$

则：

$$U = IR \quad \text{或} \quad I = \frac{U}{R}$$

$R$  为所考察的两等势面间导体的电阻，它与导体材料的性质、导体的形状等因素有关，就是一段导体的欧姆定律。

实际上即使同一导体，当电流流动的方式不同时，对应的电阻也不同。如圆筒形导体，电流沿筒的轴向流动时的电阻与电流沿筒的径向流动时的电阻就是完全不同的。尽管电阻与导体形状及电流流动方式有关，但电阻率却与这些因素无关，仅由材料性质决定。表 2-1 给出了几种材料的电阻率。

表 2-1 几种材料的电阻率

材 料	电阻率/( $\Omega \cdot m$ )	材 料	电阻率/( $\Omega \cdot m$ )
铜	$1.67 \times 10^{-8}$	锗	0.64
铁	$9.71 \times 10^{-8}$	石墨	$1.4 \times 10^{-5}$
镍	$9.71 \times 10^{-8}$	玻璃	$10^{10} \sim 10^{14}$
锡	$1.59 \times 10^{-8}$	石英	$1 \times 10^{13}$
钨	$5.51 \times 10^{-8}$	食盐饱和溶液	$4.4 \times 10^{-2}$
汞	$9.58 \times 10^{-8}$	硫	$2 \times 10^{19}$
镍铬合金	$100 \times 10^{-8}$	木材	$10^8 \sim 10^{11}$

### 3. 电阻率与温度的关系

材料的电阻率与温度有关。实验测量表明，纯金属的电阻率随温度的变化较有规律，当温度变化的范围不很大时，电阻率与温度成线性关系，即

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$$

式中  $\rho$  是  $t^\circ\text{C}$  时的电阻率， $\rho_0$  是  $0^\circ\text{C}$  时的电阻率， $\alpha$  称为电阻的温度系数。大部分金属的电阻温度系数在 0.4% 左右。通常，电阻随温度变化的关系可以用下式表示：

$$R = R_0(1 + \alpha t)$$

电阻随温度变化的较精确的关系式为：

$$R = R_0(1 + 0.003985t - 0.000000586t^2)$$

上面两式中， $R$  是  $t^\circ\text{C}$  时导体的电阻， $R_0$  是  $0^\circ\text{C}$  时导体的电阻。

#### 4. 纳米材料的电阻

德国萨尔大学的 Gleiter 教授等人对纳米金属 Cu、Pd、Fe 块体的电阻与温度关系，电阻温度系数与颗粒尺寸的关系进行了系统的研究。他们发现纳米材料的电阻随温度的变化与纳米颗粒径有关，随颗粒尺寸减小，电阻温度系数下降。这个结果表明纳米金属和合金材料的电阻随温度变化的规律与常规粗晶基本相似，其差别在于纳米材料的电阻高于常规材料，电阻温度系数强烈依赖于晶粒尺寸。当颗粒小于某一临界尺寸（电子平均自由程）时，电阻温度系数可能由正变负。

例如，Ag 细粒径和构成粒子的晶粒直径分别减小至等于或小于 18nm 和 11nm 时，室温以下的电阻随温度上升呈线性下降，即电阻温度系数  $\alpha$  由正变负，而常规金属与合金  $\alpha$  为正值。

纳米金属与合金在电阻上的这种新特性可以这样解释：因为当电子在理想周期场中的运动时，如果势场不发生畸变，电子的能量状态不会变化，运动的速度不会改变。电子在周期势场中以波的形式（布洛赫波）传播。电子的函数可以看作是前进的平面波和各晶面的反射波的迭加。在一般情况下，各反射波的位相之间没有一定的关系，彼此相互抵消，从理想上可以认为周期势场对电子的传播没有障碍，但实际晶体存在原子在平衡位置附近的热振动，杂质或缺陷以及晶界。这样，电子在实际晶体中的传播由于散射使电子运动受障碍，这就产了电阻。纳米材料中大量的晶界的存在，几乎使大量电子运动局限在小颗粒范围，晶界原子排列越混乱，晶界厚度越大，对电子散射能力就越强，界面这种高能垒是使电阻升高的主要原因。

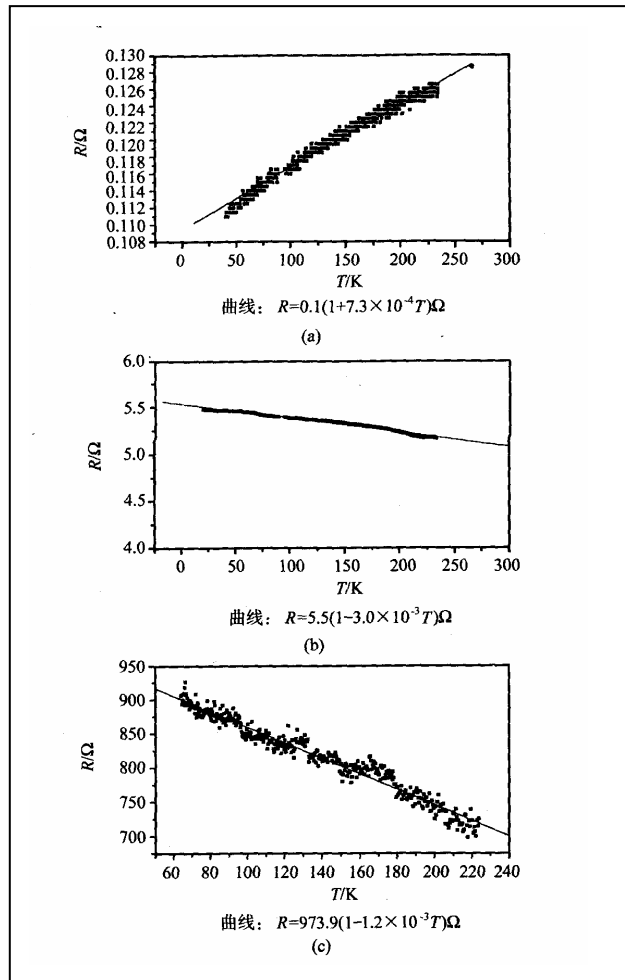


图 2-37 室温下纳米 Ag 的电阻随温度的变化。a) 粒径为 20nm, 晶粒度为 12nm; b) 粒径为 18nm, 晶粒度为 11nm; c) 粒径为 11nm, 晶粒度为 11nm。

总的来说，纳米材料从微结构来分析，它对电子的散射可划分为两个部：一是颗粒（晶内）组元；二是界面组元（晶界）。当颗粒尺寸与电子的平均自由程相当时，界面组元对电子的散射有明显的作用，而当颗粒尺寸大于电子平均自由程时，晶内组元对电子的散射逐渐优势，颗粒尺寸越大，电阻和电阻温度系数接近常规粗晶材料，这是因为常规粗晶材料主要是以晶内散射为主。当颗粒尺寸小于电子平均自由程，使界面对电子的散射起主导作用，这时电阻与温度的关系以及电阻温度系数的变化都明显地偏离了粗晶的情况，甚至出现反常现象。例如，电阻温度系数变负值就可以用占主导地位的界面对电子散射加以解释。我们知道，一些结构无序的系统，当电阻率趋向一“饱和值”时，电阻随温度上升增加的趋势减弱， $\alpha$ 减少，甚至由正变负。对于纳米，固体界面占据庞大的体积分数，面中原子排列混乱，这就会导致总的电阻率趋向饱和值，此外，粒径小于一定值时，量子尺寸效应的出现，也会导致颗粒内部对电阻率的贡献大大提高，这就是负温度系数出现在纳米固体试样中原因。

## 5. 电流的功和功率•焦耳定律

电流通过导体时，正电荷从高电势处向低电势处运动，在这过程中，电场对电荷做功。根据欧姆定律，电场做的功即电流的功率为

$$P = UI = I^2 R = U^2 / R$$

电场作的功将转变成其他形式的能量。电场所作的功为

$$\Delta A = I^2 R \Delta t$$

实验表明，电流通过欧姆介质时，电能将以发热的形式释放出来，即

$$Q = \Delta A = I^2 R \Delta t$$

这就是熟知的焦耳定律。它表明：这一结论只对纯电阻  $R$  的情况成立。

单位体积的导体内的电功率称为电功率密度。若用  $p$  表示电功率密度，则由欧姆定律的微分形式，可得

$$p = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\sigma}$$

这就是焦耳定律的微分形式。

## 二、 欧姆定律的解释

### 1. 金属导电性的经典微观解释

金属可以简单地看成是位于晶格点阵上带正电的原子实与自由电子的集合。原子实虽然被固定在晶格上，但可以在各自的平衡位置附近作微小的振动；自由电子则在晶格间作激烈的不规则运动，在没有外场或其它因素（如温度梯度、数密度梯度），不规则的运动一般并不形成宏观电流，但存在随机涨落。

当存在外场时，自由电子将获得一加速度，由于与晶格的碰撞，电子会改变速率和方向。设在  $t=0$  的时刻正好发生一次碰撞，碰撞后的速度为  $v_0$ ，则在下一次碰撞前，载流子的位移为

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = v_0 t + \frac{1}{2} \frac{q}{m} E t^2$$

$t$  是连续两次碰撞之间所经历的时间即自由时间。不同的电子，在碰撞后所具有的速度  $v_0$  各不相同，自由时间  $t$  也各不相同。对大量的电子求平均，有

$$\langle s \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{q}{m} \right) E \langle t^2 \rangle$$

由于  $t$  和  $v_0$  都是完全随机的，因而  $v_0 t$  的平均值为零。电子的定向运动平均速度为

$$u = \left\langle \frac{s}{\tau} \right\rangle$$

对不同的载流子，自由时间  $t$  是不同的，由分子物理学可知，在  $N$  个载流子中，自由时间为  $t$  到  $t+dt$  间隔内的粒子数与  $e^{-t/\tau} dt$  成正

比，平均值为

$$\langle t^2 \rangle = 2\tau^2$$

导体中的电流密度为

$$j = Nqu = N \frac{q^2}{m} \tau E$$

这就是欧姆定律的微分形式，而电导率 $\sigma$ 为

$$\sigma = N \frac{q^2}{m} \tau$$

这就是欧姆定律的经典电子论解释。由气体分子运动论知道，平均自由时间 $\tau$ 、平均速率 $v$ 和平均自由程 $\lambda$ 三者的关系为：

$$\lambda = v\tau$$

代入电导率 $\sigma$ 式子，由于 $\lambda$ 与温度无关，而 $v \propto \sqrt{T}$ ，故电导率 $\sigma$ 与温度的关系为：

$$\sigma \propto \frac{1}{\sqrt{T}}$$

这与实验结果不相符，所以经典电子论对金属的导电性的解释在定量方面并不成功。

## 2. 金属的导电性的量子理论

经典电子论困难的原因来自两方面：首先，电子气不同于理想气体，它不遵守麦克斯韦-波尔兹曼分布，而服从费米-狄拉克统



计；其次，电子具有波粒二象性，电子的平均自由程不能用经典分子运动论的方法来计算。

按照量子理论，电子应服从泡利不相容原理，金属中的自由电子气服从费米—狄拉克统计，服从费米—狄拉克统计的电子气称为费米电子气，对费米电子气，即使  $T=0^\circ\text{K}$ ， $N$  个电子也只能处在从最低能级数起的前  $N/2$  个能级上，其中最高能级的能量为费米能。金属的费米能很大，如铜的费米能  $\varepsilon_F=7.03\text{eV}$ ，若把与费米能相当的温度称为费米温度，则铜的费米温度  $T_F=81\,000\text{ }^\circ\text{K}$ 。按量子理论，即使在绝对零度，电子的平均动能也很大，其平均动能  $\varepsilon=3\varepsilon_F/5$ 。

在  $T=0^\circ\text{K}$  时，费米电子气占满费米能级以下的所有的能级，而费米能级以上的能级全空着，无电子占有。当  $T>0$  时，晶格上的原子实具有的动能为  $kT$  的数量级，在一般情况下比  $\varepsilon_F$  小得多。如  $T=300^\circ\text{K}$  时， $kT=0.026\text{eV}$ 。电子通过与晶格的碰撞从原子实取得的能量不可能超过  $kT$ ，只有能量接近费米能的能级上的电子，才可能通过碰撞从原子实取得能量而激发到费米能级上方的空能级上，在外电场时，全部电子都获得加速度，但对金属导电有贡献的只是费米能级附近的能级上的电子。这些电子可以从电场获得能量，进入能量较高的激发态能级上去，而远离费米能级的电子不参与导电，所以金属的导电性与费米能级附近的能级的多少即能级的密度密切相关，作为修正，电子的平均速度  $v$  可用与费米能对应的费米速度  $v_F$  代替，而

$$v_F = \sqrt{\frac{2\varepsilon_F}{m}}$$

另外，电子平均自由程的概念也要修正。电子是微观粒子，具有波粒二象性，所谓电子与晶格上原子实的碰撞实际上是电子波被晶格的散射。量子力学证明，若晶体是完整的，即原子实严格固定在周期性的晶格上，电子波是不会被晶格散射的，电子的平均自由程将为无限大，因而金属的电导率为无限大，即完整的晶体是没有电阻的。实际的晶体都有某种不完整性，它一方面来自原子实在晶格上的热振动，另一方面是因晶体中不可避免的含有杂质。原子实的振动相当于严格的周期性排列遭到某种偏离，在常温下，原子实振动的振幅的均方根值与绝对温度成正比，从而导致电子波被原子实散射的次数与绝对温度成正比，因而自由时间与温度成反比。由于费米能几乎与温度无关，故电导率与温度成反比，这正是实验结果所要求的。另外，严格的计算表明，按电子波散射求得平均自由程正好是经典理论求得的 100 倍，而  $v_F$  是  $v$  的 16 倍，两者结合恰好使电导率的理论值与实验值相等，解决了经典理论值偏小的问题。

杂质造成的不完整性与温度无关，所以在极低温下，杂质是引起电阻的主要原因。

### 三、 欧姆定律的失效问题

若平均自由时间 $\tau$ 与电场无关，则电流密度与电场强度成线性关系，这种导电介质就是欧姆介质；而当 $\tau$ 与电场有关时，电导率 $\sigma$ 本身与场强有关，欧姆定律失效，即 $\mathbf{j}$ 与 $\mathbf{E}$ 产或者说 $\mathbf{I}$ 与 $\mathbf{U}$ 的比例关系遭到破坏，而代之以非线性关系。

#### 1. 电场很强时

欧姆定律的微分形式在电流随时间变化时也成立，但是场强 $\mathbf{E}$ 随时间变化的周期 $T$ 应比 $\tau$ 大得多，即

$$T \gg \tau$$

对一般金属，电子的平均自由时间 $\tau$ 在 $10^{-13} \sim 10^{-14}$ s 范围内，这就要求 $T \gg 10^{-14}$ s 或频率 $\nu \ll 10^{14}$ Hz，这个频率属于可见光范围，而一般场强变化的频率比可见光频率小得多，故直到频率超过微波段（ $10^{11}$ Hz），欧姆定律仍成立。

例如在金属中 $E > 10^3 - 10^4 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ 时， $u$ 会很大，大到可以 $v$ 相比拟，这时，电子的平均自由飞行时间必然受到电场 $\mathbf{E}$ 的影响。 $\mathbf{j}$ 与 $\mathbf{E}$ 不再是线形关系，而是非线性的关系。

#### 2. 高压下的电离气体

此时，气体分子的平均自由程 $\lambda$ 很长，即使电场强度不很高时。 $\lambda$ 也很大，从而导致欧姆定律失效。

### 3. 晶体管、电子管等器件

I 与 U 的关系也是非线性的，如图 2-38 所示。

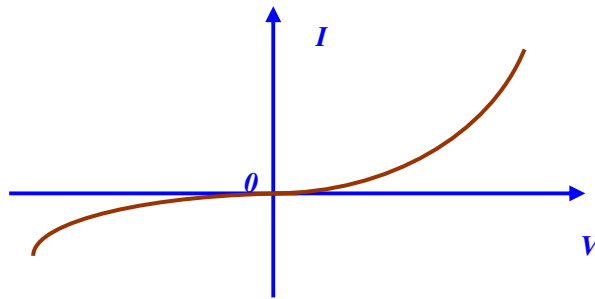


图 2-38 半导体二极管的伏安特性

### 4. 超导介质

超导介质内部的电流一经激发就能长期维持，而电场强度却处处为零，不能简单地把超导介质视为电导率 $\sigma$ 为无限大的导体，因为它的导电规律与通常的导体完全不同。

### 5. 其它情况

例如对某些晶体和处于磁场中有碰撞的等离子体，其导电特性与电流的方向有关，表现出各向异性，这时 $\mathbf{j}$ 与 $\mathbf{E}$ 不再同向，电导率 $\sigma$ 为张量。

#### 四、Ohm 及其 Ohm 定律

1826 年，德国物理学家 Georg Simon Ohm (1789—1854) 通过直接的实验，得出电磁学的基本实验定律之一——Ohm 定律。Ohm 定律不仅是电路的基本规律，而且是重要的介质方程之一，意义重大。



图 2-39 德国物理学家 Georg Simon Ohm

当时，Coulomb 定律问世已约 40 年，Volta 电池已诞生 20 多年，电流磁效应和温差电现象等也已相继发现。但是，由于实验设备和测量仪器都还相当原始，所以，尽管 Ohm 定律的数学形式最为简单，要发现它，却非易事。1825 年 5 月，Ohm 在几年研究的基础上，发表了一篇重要的电学论文《金属传导接触电所遵循的定律的暂时报告》，该论文中介绍了他用实验研究载流导线产生的电磁力与导线长度的关系。1825 年 7 月，Ohm 用类似的实验装置比较各种金属导线的电导率。Ohm 把各种金属（金，银，锌，黄铜，铁，铂，锡，铅等）制成直径相同的各种导线，实验时调节它们的长度，使每次测量时扭秤的磁针都指在相同位置，从而由导线的相对实验长度确定各种金属的相对电导率。

1826 年 4 月，Ohm 在题为《金属传导接触电所遵循的定律的测定，以及关于伏打装置和施威格倍增器的理论提纲》的重要论

文中，详细地描绘了他的实验工作，并给出了他总结实验结果得出的电路定律。

由于当时的 Volta 电池输出不稳定，电极又容易极化，很难做好实验。Ohm 接受 Poggendorff 的建议，采用稳定的温差电偶作电源。改进后，Ohm 得出了测量的电磁力（即扭秤上磁针的偏转角度） $F$  与被测导线的长度  $x$  有如下定量关系

$$F = \frac{a}{b + x}$$

式中  $a$ 、 $b$  是两个参量，其值可由  $F$  与  $x$  的数据得出。接着，Ohm 改变温差电偶的两端温度，重复测量，整理实验数据，就得出相应的  $a$  和  $b$  值，结果发现，在两组实验中得出的参量  $a$  的值不同， $a$  的值取决于温差电源的温度差，即取决于温差电动势（Ohm 称之为电源的激发力）；在两组实验中得出的参量  $b$  的值相同， $b$  的值取决于温差电源的内部阻抗（以及其他导线的阻抗）。

因此，上式中的  $F$  就是电流强度， $a$  是电源电动势， $x$  是待测导线的电阻， $b$  是电源内阻以及其他导线的电阻， $(x+b)$  是闭合回路的总电阻。上式就是我们今天所说的闭合回路的 Ohm 定律。

纵观 Ohm 的上述工作，首先，Ohm 经多次测量获得了比较准确的实验数据——这是基础。其次，根据这些数据，经过反复的揣摩、比较、计算、核对，找到了  $F$  随  $x$  变化的经验性的定量关系式——这是关键。然后，通过改变温差电源的温差，确定参量  $a$  和  $b$  的含义，最终使上式成为物理意义十分明确的电路定律。Ohm 的工作，从提出问题、设计实验、克服技术困难。准确测量、寻找经验关系，到最终发现规律，为我们提供了通过直接实验测量寻找定量规律的典型模式，这是物理学研究的一种基本方法，具有普遍意义。

1826 年 4 月，Ohm 又发表了题为《由伽伐尼电力产生的验电器现象的理论尝试》的论文。在这篇论文中，Ohm 把电路定律改写为

$$F = kS \frac{a}{l}$$

式中  $F$  是通过长度为  $l$  的导线的电流强度,  $S$  是导线的横截面积,  $k$  是电导率 (Ohm 称之为电导能力),  $a$  是导线两端的电压 (Ohm 称之为电张力之差)。显然, 该式就是电路中一段导体的 Ohm 定律。

1827 年, Ohm 出版了《用数学研究的伽伐尼电路》一书。在这本书里, Ohm 假定了电路的三条基本原理, 由此建立起电路的运动学方程, 求解运动学方程, 得出了一年前通过实验发现的定律。

遗憾的是, Ohm 定律建立后, 不仅没有立刻获得承认和应有的评价, 反而遭到一些有权势者的反对, 斥之为“纯粹不可置信的欺骗, 它唯一的目的是要亵读自然的尊严”。这种不幸的遭遇给 Ohm 带来了巨大的痛苦, 甚至使 Ohm 失去了工作, 生活都很困难。但是, Ohm 的工作仍然得到了 Lenz, Weber, Gauss 等人的赏识。直到 19 世纪 30 年代末和 40 年代初, 人们才认识到 Ohm 工作的重要意义。1841 年, 英国皇家学会把 Copley 奖章授予 Ohm 后, 他的学术地位和有关工作才得到公认。

Ohm 定律不仅是电路的基本定律, 还是重要的介质方程, 它的建立标志着对物质电磁性质研究的开始。电导率  $\sigma$  以及介电常量  $\epsilon$  和磁导率  $\mu$ , 从导电、极化、磁化等不同角度描述物质的不同电磁性质。Ohm 定律的微分形式  $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$  以及  $\mathbf{D}=\epsilon_r\epsilon_0\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}=\mu_r\mu_0\mathbf{H}$  构成了介质方程组, 与电磁场的方程组一起, 合成完备的 Maxwell 方程组。由此可见, Ohm 定律是十分重要的。

\* 《电磁学专题研究》陈秉乾等人著, 高等教育出版社 (2001), 55-60 页。