以解析函数的理论与方法研究平面电磁场

余毅聪

2003年12月

主要想法

- 复变函数和电磁学这两门课中一些重要的公式是很相似的，本文试图在一定的程度上发掘其中的联系。

主要内容

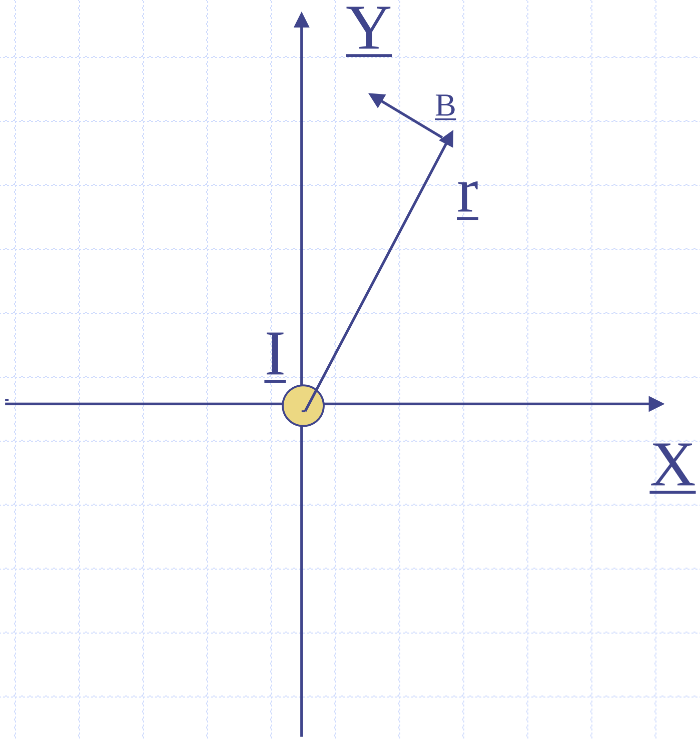
- 1 建立数学模型
- 2 根据模型推算基本定理
- 3 一些结论
- 4 二维场的保形变换

二维场数学模型

- 无穷长导线的磁场
- 如图，将一根无穷长的直导线置于坐标原点，方向为Z轴方向。于是易得(x,y)点处的磁场分量为：

$$B_x = \frac{-\mu_0 I y}{2\pi(x^2 + y^2)}$$

- $$B_y = \frac{\mu_0 I x}{2\pi(x^2 + y^2)}$$



现把Y-X平面视为复平面， z=x+iy, 并令：

$$w = w(z) = \frac{B_x + B_y i}{\mu_0 I / 2\pi} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{ix}{x^2 + y^2}$$

同样，对于电场，则有：

$$w = w(z) = \frac{E_x + E_y i}{\lambda / 2\pi\varepsilon_0}$$

在以下的讨论中，视 λ为二维电荷，I 为二维磁荷。并统一以符号 q 表示。

高斯定理与环路定理

注意到对于上面的两种情况，都有

$$\overline{w} = \overline{w}(z) = u - iv$$

是解析的，因为Cauchy-Riemman方程得到足：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-v)}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(-v)}{\partial x}$$

于是解析函数的理论与方法有了用武之地！

取C为一条围绕原点的简单封闭曲线，如果原点处存在无限长的导线（或者带电直线），则由留数定理可得：

$$\oint_C \overline{w}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}[\overline{w},0]$$

$$\oint_C \overline{w}\,dz = \oint_C (u - iv)(dx + idy) = 2\pi$$

比较实部虚部即得：

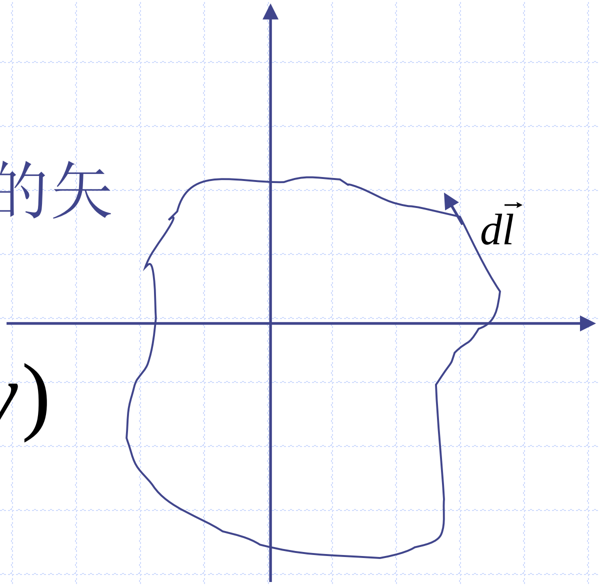
$$\oint_C (udx + vdy) = 2\pi \qquad (1)$$

$$\oint_C (udy - vdx) = 0 \qquad (2)$$

下面分析上面二式的意义。

对于图重的曲线积分,积分微元是

$$d\vec{l} = dx + i dy$$



于是,如果把w看作有两个分量的矢量,可有

$$w \cdot d\vec{l} = (u + iv)(dx + i dy)$$

$$= u dx + v dy$$

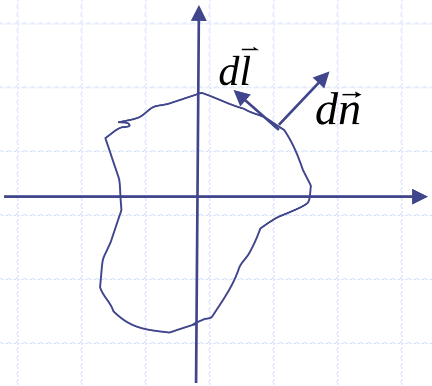
即得: $\oint_C w \cdot d\vec{l} = 2\pi$ 对于磁场的情况

由 $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I w}{2\pi}$ 最后得到: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

上式即是我们熟悉的安培环路定理.

而(2)式的意义又何在呢?注意到:

$$iw\cdot d\vec{l} = (u+iv)(dx+idy) = vdx - udy$$



如果我们定义: $d\vec{n} = -id\vec{l}$

则可以得到: $\oint_C w\cdot d\vec{n} = 0$

$d\vec{n}$的几何意义如图所示.当把曲线看成是无限长的柱面的截线时, 即是曲面的法向量.上式的意义即可理解为是二维平面的高斯定理.

显然,稍作推广即可以得到:

1. 对于磁场中的任意简单封闭曲线C,有

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i$$

2

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{n} = 0$$

对于电场的情况,由于电场和磁场所对应的w仅仅相差一个常数i, 所以情况完全类似,仅仅只需要将上面两式的右边交换即可.这里就不作过多的讨论了.

由解析的性质得到的一些结论

1　磁场和电场(以下仅称场)的分布由边界决定.

事实上,若w在边界C上的值为已知,则对于区域内部的一点Z',有

$$f(z') = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z'}dz$$

即是可以由边界上的函数值计算内部的值.

2　平均值公式.对于一个闭圆 $|z-a| \leq R$ 如果其内部没有电流(或电荷),则场在圆心处的值,等于圆周上的平均值.

上式的依据是平均值公式

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_C f(\xi)ds$$

圆心处实部和虚部的值对应为圆周上的平均值,于是即有以上结论.事实上,泊松公式为我们提供了计算区域内任何点场值的方法:

$$f(z'+re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z'+R\cdot e^{i\theta})\cdot\frac{R^2-Rre^{i(\theta-\varphi)}}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}d\theta$$

3 如果平面区域中没有电荷或者没有磁荷,则场的最大值只能在区域的边界上取到.

4 平面场所有的电荷之和为0。

5 如果穿过平面上有电荷:$q_1, q_2, \cdots, q_N$,且满足:

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_N \neq 0$$

则平面上一定存在场强为0的点.

证明: 射N根导线的坐标的复数为:$z_1, z_2, \ldots, z_N$

容易得到这个场对应的复函数w(z)为:

$$w(z) = \frac{q_1}{\bar{z} - \bar{z}_1} + \frac{q_2}{\bar{z} - \bar{z}_2} + \ldots + \frac{q_N}{\bar{z} - \bar{z}_N}$$

$$\therefore \overline{w} = \frac{q_1}{z - z_1} + \frac{q_2}{z - z_2} + \ldots + \frac{q_N}{z - z_N}$$

为证明结论,只需要证明函数

$$f(z) = \frac{q_1}{z - z_1} + \frac{q_2}{z - z_2} + \ldots + \frac{q_N}{z - z_N} \qquad (*)$$

在复平面上有非无穷远点的根即可.

为了证明上式,需要用到的结论有:

1 大圆弧引理:

设f(z)在区域D: $|z| \geq R_0, 0 \leq \arg z \leq \alpha \quad (0 < \alpha \leq 2\pi)$

上连续,且存在极限: $\lim_{z \to \infty} zf(z) = A$

设C是位于D中的圆弧,半径为R,则

$$\lim_{R \to \infty} \int_C f(z)dz = iA\alpha$$

2 辐角原理:

设f(z)在闭路C的内部可能有有限多个极点,除去这些极点外, f(z)在C及其内部解析,且在C上无零点,则有:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} = N - P$$

这里N,P分别为极点总数和零点总数.

有了上面的引理,下面证明(*)所表示的函数在复平面上定有非无穷远的根.事实上:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{\dfrac{q_1}{(z-z_1)^2} + \dfrac{q_2}{(z-z_2)^2} + \ldots + \dfrac{q_N}{(z-z_N)^2}}{\dfrac{q_1}{z-z_1} + \dfrac{q_2}{z-z_2} + \ldots + \dfrac{q_N}{z-z_N}}$$

在通分之后,分子的最高次为(2N-2)次,分母的最高次为(2N-1)次,系数均为:

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_N \neq 0$$

所以,成立:

$$\lim_{z\to\infty} z\frac{f'(z)}{f(z)} = -1$$

利用引理1即得到:

$$\lim_{R\to\infty}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -2\pi i$$

再由引力理2,有:

$$N = P - 1$$

又: $P = n \geq 2$

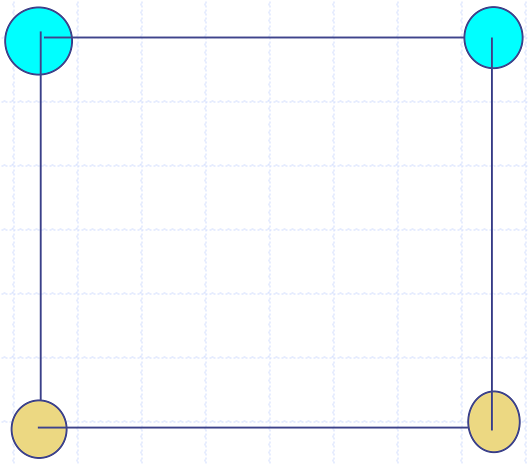
$\therefore \quad N \geq 1$

所以零点总是存在的!

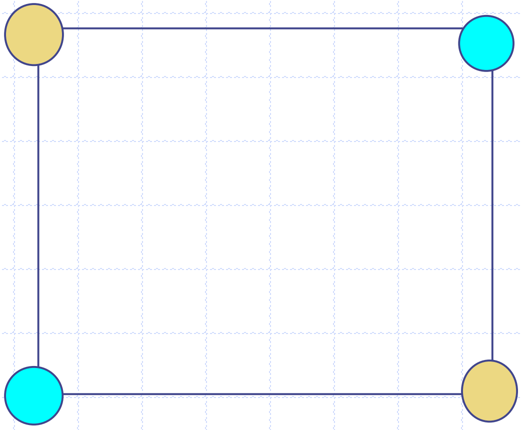
即平面上总是存在一点场强为零.

对于$I_1 + I_2 + \cdots + I_N = 0$ 的情况,则是没有一般结论.

如图,如果兰色代表正电,黄色代表负电,则在该场中是没有电场为0的点的.



而在下面的这张图中,显然正方形的中心的场强为0.



磁场中情况完全类似,不再赘述.

保形变换的应用

- 保形变换是二维空间所特有的，应此利用保形变换处理平面的电磁场问题，一定会给我们带来惊喜。
- 为此，先建立一套体系：

一个定义: $G(z)=\overline{w}(z)$ 为这个平面场的“场函数”

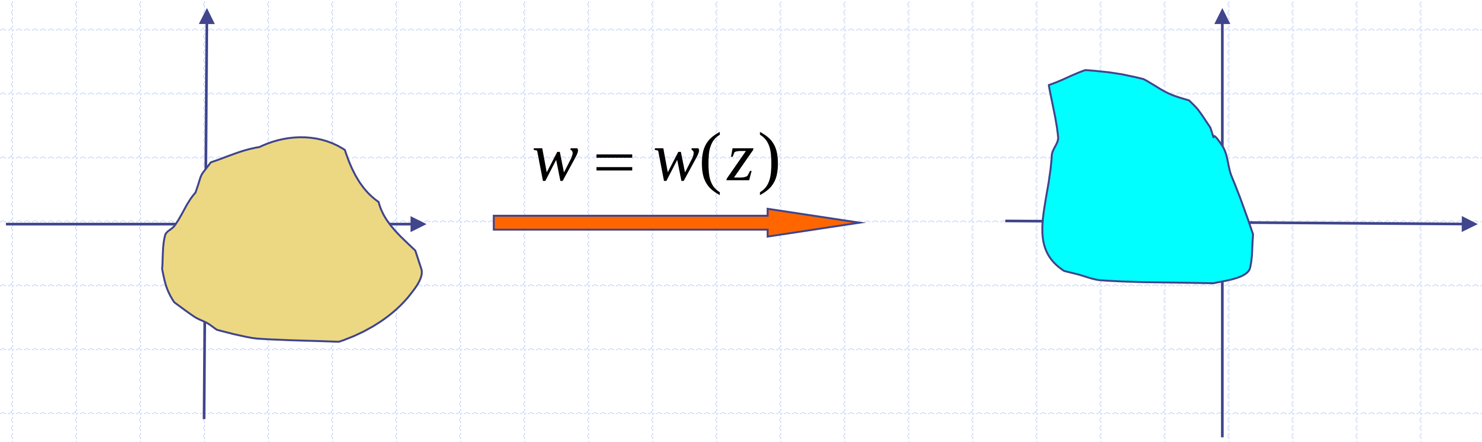
$G(z)$ 为场函数的充分必要条件是它满足高斯定理和安培环路定理，即是有:

$$\oint_C G(z)dz = 2\pi i\sum q$$

场函数是这样的函数，它在平面上存在场源的点的留数是电荷的值，其余点它取场的值的共轭

为讨论方便，一切常数假定为1。

我们知道，一个保形变换将一个区域映照成为另一个区域，如果我们把区域上的每一个点都标上该处的电荷（磁荷），那么保形变换就把一个场分布变换成为另一种场分布，称作“场的保形变换”。



一个定理：

设 $w = w(z)$ 为 $D \longrightarrow D'$ 的一个场的保形变换，场函数：

$$G(z) \longrightarrow G(w^{-1}(z))(w^{-1}(z))'$$

事实上，边界对应定理保证了

$$\oint_C G(z)dz = \oint_{C'} G(w^{-1}(z))(w^{-1}(z))'dz$$

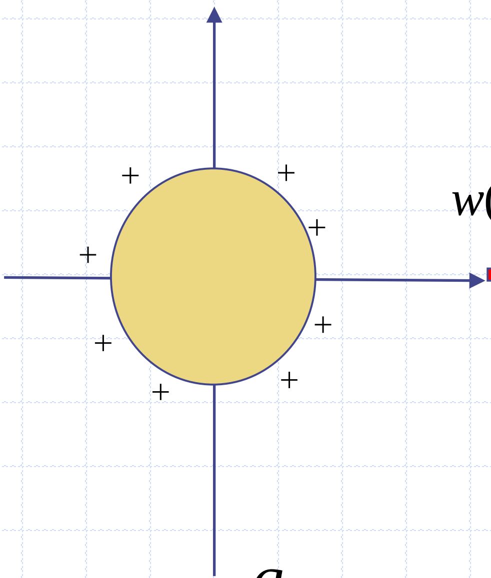
即变换后得到的函数仍然满足高斯定理和环路定理，即为新场的场函数。

一个结论：

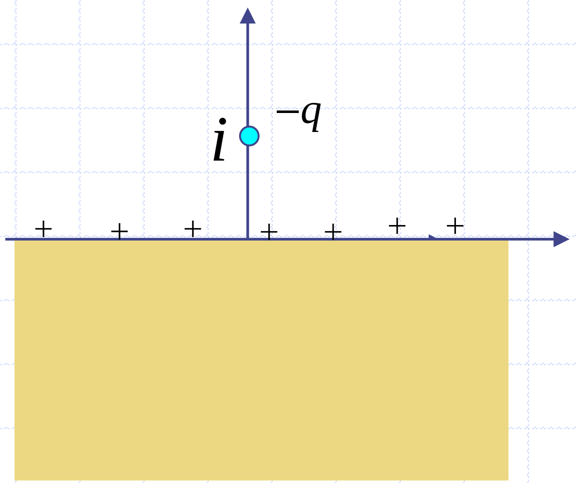
对于静电平衡的导体，在经过场的保形变换后仍静电平衡。

容易验证在经过场的保形变换后，对于所给定的一个点 $z \longrightarrow w(z)$ 等势线的辐角改变量和所对应的场函数的辐角改变量皆是 $\Delta\alpha = w'(z)$ 仍然满足静电平衡的条件。

得到一种新的求解电场的方法，举例如下：



$$w(z) = i\frac{z-i}{z+i}$$



$$G(z) = \frac{q}{z} \xrightarrow{w=w(z)} G(z) = \frac{q}{-i\dfrac{z+i}{z-i}}\frac{-2}{(z-i)^2} = \frac{q}{z+i} - \frac{q}{z-i}$$

黎曼定理断言，对于任意的区域（非全平面），总是存在保形变换将任意单连通区域映照成为单位圆，所以这种方法是具有普遍性的。

但是具体实现变换的细节，则是数学上的事情了，也远远超出本文的范围。本文任务已经完成，讨论到此为止！

感谢刘金英老师，感谢张文禄助教和班主任苑震生老师

感谢3班同学的信任

感谢在场所有听众的支持